

*Vasile Cîrtoaje*  
*Alina-Simona Băieșu*

---

**SISTEME  
DE REGLARE  
AUTOMATĂ**

---

**Teorie  
și  
aplicații**

Vasile Cîrtoaje, Alina-Simona Băieșu  
**SISTEME DE REGLARE AUTOMATĂ - Teorie și aplicații**

**ISBN 978-973-719-788-7**

**EDITURA UNIVERSITĂȚII PETROL-GAZE DIN PLOIEȘTI  
2020**

**VASILE CÎRTOAJE**  
**ALINA-SIMONA BĂIEȘU**

**SISTEME**  
**DE REGLARE**  
**AUTOMATĂ**

**Teorie**  
**și aplicații**

**EDITURA UNIVERSITĂȚII PETROL-GAZE DIN PLOIEȘTI**

**- 2020 -**

Copyright©2020 Editura Universității Petrol-Gaze din Ploiești  
**Toate drepturile asupra acestei ediții sunt rezervate editurii**

*Autorii poartă întreaga răspundere morală, legală și materială față de editură și terțe persoane pentru conținutul lucrării.*

**Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României**

**CÎRTOAJE, VASILE**

**Sisteme de reglare automată : teorie și aplicații** / Vasile Cîrtoaje,  
Alina-Simona Băieșu. - Ploiești : Editura Universității Petrol-Gaze din  
Ploiești, 2020

Conține bibliografie

ISBN 978-973-719-788-7

I. Băieșu, Alina-Simona

62

Control științific:

Prof. univ. dr. ing. **Gabriel Rădulescu**

Prof. univ. dr. ing. **Cristian Pătrăscioiu**

Redactor:

Prof. univ. dr. ing. **Cristian Pătrăscioiu**

Tehnoredactare computerizată:

Prof. univ. dr. ing. **Vasile Cîrtoaje**

Conf. univ. dr. ing. **Alina-Simona Băieșu**

Coperta:

Șef lucr. dr. ing. **Marian Popescu**

Director editură:

Prof. univ. dr. ing. **Șerban Vasilescu**

---

Adresa:

Editura Universității Petrol-Gaze din Ploiești

Bd. București 39, cod 100680

Ploiești, România

Tel. 0244-573171, Fax. 0244-575847

<http://editura.upg-ploiesti.ro/>

## Prefață

*Cartea se adresează în primul rând studenților automatiști de la ciclurile de licență și masterat, care au în planul de învățământ discipline precum Teoria sistemelor, Sisteme automate cu eșantionare, Ingineria reglării automate, Algoritmi de reglare etc., putând fi însă utilă tuturor studenților cu profil ingineresc, în completarea și aprofundarea cunoștințelor din domeniul teoriei sistemelor și sistemelor de reglare automată.*

*În capitolul 1 sunt prezentate conceptele de sistem real, sistem abstract, sistem automat, sistem de reglare după abatere și sistem de reglare după perturbație, caracteristicile și trăsăturile fundamentale ale sistemelor, mărimile de intrare, de stare și de ieșire ale sistemelor, clasificare sistemelor, rolul și locul teoriei și ingineriei sistemelor în formarea și perfecționarea profesională a studenților și masteranzilor.*

*În capitol 2 este prezentată problematica reprezentării matematice a sistemelor, principalele aspecte abordate fiind următoarele: modelarea analitică, experimentală și mixtă, formele de reprezentare a sistemelor continue și discrete în varianta intrare-ieșire (forma primară, forma secundară, forma de convoluție și forma operațională) și în varianta intrare-stare-ieșire, precum și conversia sistemelor liniare dintr-o variantă în alta.*

*Capitolele 3 și 4 prezintă elemente de analiză intrare-ieșire și respectiv intrare-stare-ieșire a sistemelor liniare continue și discrete în domeniul timpului: calculul răspunsului în timp, echivalența de tip intrare-ieșire și de tip intrare-stare-ieșire, discretizarea sistemelor continue, reducerea sistemelor de tip intrare-stare-ieșire, conceptul de sistem monoton și metoda planului fazelor.*

*Capitolele 5 și 6 abordează studiul operațional al sistemelor liniare continue și discrete prin metoda transformării Laplace și respectiv metoda transformării Z. Principalele probleme și aspecte abordate sunt: conceptele de funcție de transfer și matrice de transfer, calculul funcției de transfer a sistemelor compuse, rolul funcției de transfer în simplificarea formalismului matematic implicat în analiza și sinteza sistemelor deschise și închise (cu legături de reacție), metodologia operațională de calcul al răspunsului sistemelor liniare continue și discrete, analiza sistemelor elementare de ordinul unu și doi, definirea și analiza sistemelor cu timp mort, problema reducerii sistemelor de tip intrare-ieșire, calculul discretizatului unui sistem continuu, caracteristici și proprietăți ale sistemelor cu eșantionare și ale sistemelor monotone.*

*Capitolul 7 este destinat analizei sistemelor în domeniul frecvenței. Este definită funcția de frecvență a unui sistem liniar continuu sau discret, este prezentată și demonstrată teorema de interpretare fizică a funcției de frecvență (teorema filtrării), sunt definite și analizate caracteristicile de frecvență ale sistemelor liniare continue cu și fără timp mort.*

*În capitolul 8 este tratată problematica stabilității sistemelor în ambele variante: stabilitatea internă (a stării) și stabilitatea externă (a ieșirii). Sunt prezentate și demonstrate principalele teoreme de stabilitate internă și externă pentru sistemelor liniare continue și discrete, criteriul algebric de stabilitate Hurwitz, criteriile frecvențiale de stabilitate Nyquist.*

*În capitolul 9 este tratată problema calității reglării în regim staționar și dinamic. Pentru regimul staționar este prezentată și demonstrată teorema preciziei reglării pentru procesele de tip proporțional și integral, iar pentru regimul dinamic sunt prezentați principalii indicatori direcți și indirecti de performanță ai reglării automate, precum și problema alocării polilor.*

*Capitolul 10 este destinat studiului sistemelor multivariabile de tip intrare-ieșire. Principalele probleme abordate sunt: stabilitatea sistemelor de reglare multivariabile,*

*analiza sistemelor de reglare multivariabile cu regulatoare monovariabile, analiza sistemelor de reglare multivariabile cu regulator multivariabil, problema decuplării.*

*Capitolul 11 abordează sistemele și algoritmi de reglare după perturbație. Sunt prezentate caracteristicile acestui tip de reglare, sistemele de reglare cu compensator static, sistemele de reglare cu compensator dinamic dedicat și sistemele de reglare cu compensator dinamic tipizat.*

*Capitolul 12 tratează sistemele și algoritmi de reglare după abatere (eroare). Principalele probleme și aspecte abordate sunt: caracteristicile și avantajele reglării după abatere, algoritmul de reglare PID continuu, algoritmul de reglare PID numeric, acordarea experimentală a regulatorului PID, sistemele de reglare speciale cu regulator P, sistemele de reglare bipoziționale, algoritmi de reglare predictivă, algoritmi de reglare cu model intern clasici și de tip P-IMC.*

*Capitolul 13 abordează teoria structurală a sistemelor. Sunt prezentate principalele proprietăți structurale ale sistemelor, formele canonice controlabile și formele canonice observabile.*

*Capitolul 14 tratează conceptul de reglare prin reacție după stare și estimator de stare, analiza și proiectarea estimatoarelor de stare de ordinul unu și problema preciziei reglării.*

*Cartea include o serie de contribuții originale ale autorilor, cum ar fi: 1) metoda modelului secundar pentru calculul în domeniul timpului al răspunsului sistemelor liniare de tip intrare-ieșire la intrări de tip original; 2) definirea și caracterizarea sistemelor monotone continue și discrete, cu prezentarea proprietăților lor principale; 3) teoremele de alocare a polilor la sistemele de reglare cu și fără timp mort; 4) introducerea conceptelor de mărimi T-echivalente și mărimi T-echivalente de ordinul zero, necesare definirii riguroase a discretizării propriu-zis al unui sistem liniar continuu; 5) metoda de decuplare a sistemelor multivariabile cu decuplaj dinamic tipizat; 6) metoda de reglare după perturbație cu compensator dinamic tipizat, bazată pe limitarea factorului de magnitudine al comenzii; 7) metoda experimentală simplă de acordare a regulatorului de tip PI; 8) algoritmul de reglare tip P-IMC.*

*Tratarea sistemelor de reglare automată este realizată atât sub aspect teoretic, prin abordarea matematică necesară elaborării unor soluții de reglare riguroase și temeinice, cât și sub aspect aplicativ, prin prezentarea unor metode experimentale de decuplare a sistemelor multivariabile și de acordare a regulatorilor după abatere și perturbație, precum și a numeroase exemple de probleme rezolvate sau propuse spre rezolvare. Soluțiile și rezultatele problemelor de autotestare sunt date la sfârșitul lucrării.*

Vasile Cîrtoaje, Alina Băieșu

Ploiești, iulie, 2020

# CUPRINS

<b>1. INTRODUCERE IN TEORIA SI INGINERIA SISTEMELOR</b>	<b>9</b>
1.1. Caracterizarea sistemelor .....	10
1.2. Clasificarea sistemelor .....	16
1.3. Aplicații rezolvate .....	30
<b>2. REPREZENTAREA MATEMATICĂ A SISTEMELOR</b>	<b>33</b>
2.1. Modelarea sistemelor .....	34
2.2. Sisteme continue de tip I-E .....	42
2.3. Sisteme discrete de tip I-E .....	47
2.4. Sisteme continue de tip I-S-E .....	50
2.5. Sisteme discrete de tip I-S-E .....	52
2.6. Conversia sistemelor liniare .....	53
2.7. Aplicații rezolvate .....	58
2.8. Aplicații de autocontrol .....	67
<b>3. ELEMENTE DE ANALIZĂ ÎN DOMENIUL TIMPULUI A SISTEMELOR LINIARE DE TIP I-E</b>	<b>71</b>
3.1. Răspunsul în timp al sistemelor continue .....	72
3.2. Răspunsul în timp al sistemelor discrete .....	79
3.3. Sisteme echivalente intrare-ieșire .....	85
3.4. Discretizarea sistemelor continue de tip I-E .....	87
3.5. Sisteme monotone .....	92
3.6. Aplicații rezolvate .....	94
3.7. Aplicații de autocontrol .....	121
<b>4. ELEMENTE DE ANALIZĂ ÎN DOMENIUL TIMPULUI A SISTEMELOR LINIARE DE TIP I-S-E</b>	<b>125</b>
4.1. Răspunsul în timp al sistemelor continue .....	125
4.2. Calculul matricei fundamentale .....	129
4.3. Răspunsul în timp al sistemelor discrete .....	132
4.4. Sisteme echivalente intrare-stare-ieșire .....	136
4.5. Discretizarea sistemelor continue de tip I-S-E .....	138
4.6. Conexiuni serie, paralel și cu reacție .....	140
4.7. Reducerea sistemelor .....	141
4.8. Metoda planului fazelor .....	143
4.9. Aplicații rezolvate .....	151
4.10. Aplicații de autocontrol .....	163
<b>5. METODA OPERATIONALĂ LAPLACE</b>	<b>165</b>
5.1. Transformarea Laplace .....	167
5.2. Funcția de transfer .....	169
5.3. Matricea de transfer .....	176
5.4. Funcția de transfer a sistemelor compuse .....	179
5.5. Calculul răspunsului sistemelor .....	184
5.6. Răspunsul sistemelor elementare .....	186
5.7. Sisteme cu timp mort .....	201

5.8. Reducere sistemelor .....	204
5.9. Realizarea sistemelor continue .....	208
5.10. Sisteme continue monotone .....	214
5.11. Aplicații rezolvate .....	218
5.12. Aplicații de autocontrol .....	244
<b>6. METODA OPERATIONALA Z</b> .....	<b>249</b>
6.1. Transformarea Z .....	251
6.2. Funcția de transfer .....	257
6.3. Calculul răspunsului în timp .....	262
6.4. Discretizatul unui sistem continuu .....	263
6.5. Sisteme cu eșantionare .....	270
6.6. Sisteme discrete monotone .....	274
6.7. Aplicații rezolvate .....	278
6.8. Aplicații de autocontrol .....	296
<b>7. FUNCȚIA DE FRECVENȚĂ</b> .....	<b>299</b>
7.1. Definiție și proprietăți .....	299
7.2. Interpretare fizică .....	301
7.3. Caracteristici de frecvență .....	302
7.4. Funcția de frecvență a sistemelor discrete .....	316
7.5. Aplicații rezolvate .....	317
7.6. Aplicații de autocontrol .....	321
<b>8. STABILITATEA SISTEMELOR LINIARE</b> .....	<b>323</b>
8.1. Stabilitatea internă .....	324
8.2. Stabilitatea externă .....	327
8.3. Criteriul de stabilitate Hurwitz .....	331
8.4. Criteriile de stabilitate Nyquist .....	333
8.5. Aplicații rezolvate .....	338
8.6. Aplicații de autocontrol .....	362
<b>9. CALITATEA REGLĂRII</b> .....	<b>365</b>
9.1. Calitatea reglării în regim staționar .....	365
9.2. Calitatea reglării în regim dinamic .....	371
9.3. Aplicații rezolvate .....	386
9.4. Aplicații de autocontrol .....	404
<b>10. SISTEME DE REGLARE MULTIVARIABILE</b> .....	<b>407</b>
10.1. Stabilitatea sistemelor de reglare multivariabile .....	409
10.2. SRM cu reglatoare monovariabile .....	410
10.3. SRM cu regulator multivariabil .....	412
10.4. Aplicații rezolvate .....	419
10.5. Aplicații de autocontrol .....	428
<b>11. SISTEME ȘI ALGORITMI DE REGLARE DUPĂ PERTURBAȚIE</b> .....	<b>431</b>
11.1. Caracteristici ale reglării după perturbație .....	431
11.2. Reglarea cu compensator de tip static .....	433
11.3. Reglarea cu compensator dinamic dedicat .....	435
11.4. Reglarea cu compensator dinamic tipizat .....	439

11.5. Aplicații rezolvate .....	444
11.6. Aplicații de autocontrol .....	454
<b>12. SISTEME ȘI ALGORITMI DE REGLARE DUPĂ ABATERE</b>	<b>457</b>
12.1. Caracteristici ale reglării după abatere .....	457
12.2. Algoritm de reglare PID continuu .....	458
12.3. Algoritm de reglare PID numeric .....	465
12.4. Acordarea experimentală a regulatorului PID .....	467
12.5. Sisteme speciale de reglare cu regulator de tip P .....	470
12.6. Sisteme de reglare bipozițională .....	472
12.7. Algoritmi de reglare cu predicție .....	476
12.8. Algoritmi de reglare cu model intern .....	486
12.9. Aplicații de autocontrol .....	521
<b>13. PROPRIETĂȚI STRUCTURALE ALE SISTEMELOR LINIARE</b>	<b>523</b>
13.1. Controlabilitatea .....	523
13.2. Stabilizabilitatea .....	530
13.3. Forme canonice controlabile .....	531
13.4. Observabilitatea .....	534
13.5. Dectectabilitatea .....	537
13.6. Forme canonice observabile .....	538
11.5. Aplicații rezolvate .....	539
11.6. Aplicații de autocontrol .....	548
<b>14. REGLAREA PRIN REACȚIE DUPĂ STAREA ESTIMATĂ</b>	<b>551</b>
14.1. Reglarea prin reacție după stare .....	552
14.2. Estimatoare de stare .....	554
14.3. Ecuațiile compensatorului și sistemului de reglare cu estimator și reacție după stare.....	556
14.4. Precizia reglării .....	557
14.5. Aplicații rezolvate .....	559
14.6. Aplicații de autocontrol .....	561
<b>REZULTATE ALE APLICATIILOR DE AUTOCONTROL</b> .....	<b>563</b>
<b>BIBLIOGRAFIE</b>	<b>595</b>





# 1

---

## INTRODUCERE ÎN TEORIA ȘI INGINERIA SISTEMELOR

---

Conceptul de *sistem* a apărut și s-a dezvoltat de-a lungul timpului, ca rezultat al evidențierii unor trăsături, caracteristici și comportamente comune pentru o serie de procese și fenomene din diferite domenii de activitate, ceea ce a permis tratarea acestora, din punct de vedere structural-funcțional, într-un mod *unitar, sistemic*.

Noțiunea de sistem are o sferă de cuprindere foarte largă, fiind întâlnită în toate domeniile de gândire și acțiune umană, însă aproape întotdeauna în asociație cu un atribut de specificare; de exemplu: sistem automat, sistem de transmisie, sistem informațional, sistem de semnalizare, sistem economic, sistem de producție, sistem politic, sistem social, sistem solar etc.

În cele ce urmează, prin **sistem** vom înțelege *un set de elemente (părți), care se manifestă ca un tot unitar și interacționează între ele și cu exteriorul după anumite reguli și legi, în vederea realizării și menținerii unui sens, obiectiv, scop*.

Așadar, un sistem este structurat ca o conexiune de elemente, fiecare element constituind la rândul său un sistem (subsistem). Interacțiunea dintre elementele unui sistem poate imprima sistemului proprietăți, caracteristici și comportamente noi, asemănătoare sau radical diferite de cele ale subsistemelor componente.

În cazul sistemelor fizice (reale), funcționarea și interacțiunea subsistemelor au loc pe baza legilor fizico-chimice generale, prin intermediul fluxurilor de masă și energie, purtătoare de informație. Sistemele fizice pot fi *naturale* sau *artificiale* (create de om).

**Sistemele automate** sunt sisteme tehnice de supraveghere (monitorizare), comandă și/sau control al proceselor și instalațiilor tehnologice, fără intervenția direct a omului.

În conformitate cu definițiile date sistemului și sistemului automat, orice om este un sistem (cel mai evoluat sistem viu cunoscut), dar nu este sistem automat.

**Reglarea automată** a unui sistem (proces) constă în menținerea unei mărimi (scalare sau vectoriale) a sistemului la valori cât mai apropiate de cele ale unei mărimi de referință, în condițiile modificării în timp a mărimii de referință și a acțiunii perturbațiilor asupra procesului reglat.

**Teoria sistemelor** reprezintă un ansamblu de cunoștințe, concepte, metode și principii, independente de aplicații, necesare studiului structurii, proprietăților și caracteristicilor dinamice ale sistemelor în general, ale sistemelor automate în mod special. Teoria sistemelor are ca obiect de studiu sistemul abstract, de tip model matematic, apt a descrie caracteristicile și comportamentul dinamic al unei întregi clase de sisteme fizice, reale. Teoria sistemelor introduce și dezvoltă un mod de gândire logic, așa zis sistemic, bazat pe respectarea principiului cauzalității, care permite abordarea interdisciplinară a realității înconjurătoare. În conformitate cu principiul cauzalității (numit și principiul cauză-efect): 1) orice efect este rezultatul unei cauze; 2) efectul este întârziat față de cauză; 3) cauze identice generează în aceleași condiții efecte identice.

**Ingineria sistemelor** este domeniul principal de aplicabilitate a teoriei sistemelor, având ca scop proiectarea, execuția, implementarea, exploatarea și dezvoltarea sistemelor tehnice utile și eficiente, cu bune performanțe și grad ridicat de complexitate, prin îmbinarea armonioasă a cunoștințelor și realizărilor din diverse domenii ale științei și tehnicii (matematică, fizică, chimie, electrotehnică, electronică, mecanică, automatică, calculatoare etc.).

**Teoria și ingineria sistemelor de reglare** sunt domenii particulare importante ale teoriei și ingineriei sistemelor, care vizează descrierea, înțelegerea, aprofundarea și rezolvarea problemelor specifice domeniului reglării automate a instalațiilor și proceselor tehnologice.

## 1.1. CARACTERIZAREA SISTEMELOR

Caracteristicile fundamentale ale sistemelor sunt următoarele:

- caracterul *structural-unitar*, care reflectă proprietatea unui sistem de a fi descompus și reprezentat sub forma unei conexiuni de subsisteme a căror acțiune este orientată și dirijată în vederea realizării unui sens sau scop;

- Caracterul *dinamic-cauzal*, care reflectă proprietatea unui sistem de-ași schimba starea și evolua în timp sub acțiunea factorilor interni și externi, cu respectarea *principiului cauzalității*;

- Caracterul *informațional*, care reflectă proprietatea unui sistem de-a primi, prelucra, memora și transmite (altor sisteme) informație.

În sensul teoriei sistemelor, prin *informație* se înțelege orice factor care contribuie la modificarea și descrierea stării curente a unui sistem. La sistemele tehnice, mărimile fizice utilizate ca suport pentru transmisia și stocarea informației se numesc *semnale*.

Mărimile variabile asociate unui sistem sunt de trei feluri: mărimi de intrare, mărimi de stare și mărimi de ieșire.

*Mărimile de intrare* sunt mărimi de tip *cauză*, deci independente de starea sistemului, care influențează din exterior starea și evoluția sistemului.

*Mărimile de stare* sunt mărimi de tip *efect*, dependente de mărimile de intrare și de caracteristicile interne ale sistemului, având rolul de-a descrie starea curentă a sistemului.

*Mărimile de ieșire* sunt mărimi de tip *efect*, dependente de mărimile de intrare și de caracteristicile interne ale sistemului, având rolul de-a transmite în exterior (sistemelor învecinate) informație despre starea curentă a sistemului.

Unele mărimi de ieșire pot fi în același timp mărimi de stare. Mărimile de ieșire ale sistemelor tehnice sunt măsurabile, în timp ce mărimile de stare nu sunt întotdeauna accesibile măsurării.

Un sistem interacționează cu sistemele învecinate numai prin intermediul mărimilor de intrare și de ieșire. Mărimile de ieșire ale unui sistem sunt mărimi de intrare pentru sistemele învecinate.

Teoria sistemelor operează cu două concepte de sistem:

- *sistem de tip I-E* (intrare-ieșire);
- *sistem de tip I-S-E* (intrare-stare-ieșire).

Sistemele de tip I-E conțin explicit numai mărimi de intrare și mărimi de ieșire, în timp ce sistemele de tip I-S-E conțin mărimi de intrare, mărimi de stare și mărimi de ieșire. Teoria clasică a sistemelor operează cu sisteme de tip I-E, în timp ce teoria așa zis modernă operează cu sisteme de tip I-S-E.

La sistemele de tip I-E, întregul transfer intrare-ieșire se realizează direct (fig. 1.1, a), cu *întârziere* (la *sistemele dinamice*) sau *instantaneu* (la *sistemele statice*).

La sistemele de tip I-S-E, transferul principal de informație între intrare și ieșire se realizează în mod indirect, prin intermediul stării (fig. 1.1, b). Transferul intrare-stare ( $I \rightarrow S$ ) are loc cu *întârziere strictă*, după o dinamică proprie sistemului, în timp ce transferul stare-ieșire ( $S \rightarrow E$ ) se realizează

instantaneu. În cazul sistemelor la care mărimea de ieșire are o componentă ce urmărește instantaneu variațiile mărimii de intrare (cu respectarea la limită a principiului cauzalității), există un canal direct intrare-ieșire ( $I \rightarrow E$ ) prin care transferul se realizează instantaneu (canalul cu linie întreruptă).

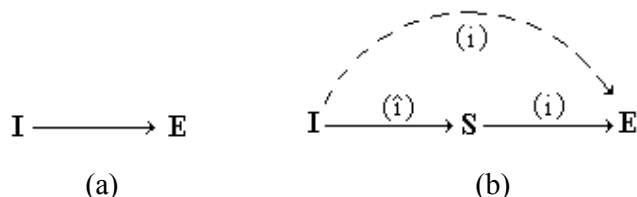


Fig. 1.1. Transferuri cauzale între mărimile unui sistem:  
(a) de tip I-E; (b) de tip I-S-E.

Teoria sistemelor operează și cu *sisteme triviale de tip static*, la care mărimea de ieșire, în ansamblul său, urmărește instantaneu variațiile mărimii de intrare. Sistemele de acest tip nu conțin mărimi de stare, iar transferul intrare-ieșire se realizează numai pe canalul direct  $I \rightarrow E$  (cu linie întreruptă în fig. 1.1, b). Un circuit electric pur rezistiv și un dispozitiv mecanic tip pârghie cu brațe rigide și articulație fără joc sunt exemple de sisteme statice. Sistemele la care mărimea de ieșire urmărește cu întârziere variațiile mărimii de intrare (care au cel puțin o variabilă de stare și conțin canalul principal  $I \rightarrow S \rightarrow E$ ) se numesc *sisteme dinamice*. Un sistem dinamic cu întârziere mică pe canalul intrare-ieșire sau intrare-stare poate fi considerat de tip static prin neglijarea întârzierii respective. În fig. 1.2 este arătat modul de reprezentare a unui sistem  $\Sigma$ , în care  $U$  este vectorul coloană  $m$ -dimensional al mărimilor de intrare,  $Y$  - vectorul coloană  $p$ -dimensional al mărimilor de ieșire, iar  $X$  - vectorul coloană  $n$ -dimensional al mărimilor de stare:

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Numărul  $n$  al variabilelor de stare ale unui sistem reprezintă *dimensiunea* sau *ordinul* sistemului.

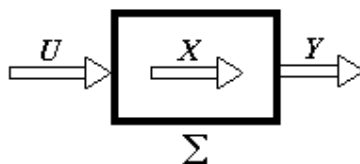


Fig. 1.2. Reprezentarea unui sistem  $\Sigma$ .

Mărimile de stare ale unui sistem au două proprietăți esențiale:

- de *mediere* a transferului întârziat intrare-ieșire, care devine astfel transfer *intrare-stare-ieșire*;

- de *acumulare* într-o formă concisă a informației utile privind evoluția anterioară a sistemului, astfel încât starea  $X$  la momentul  $t$ , adică  $X(t)$ , să fie complet determinată de starea  $X_0$  la momentul inițial  $t_0$  ( $t_0 < t$ ) și de intrarea  $U$  pe intervalul de timp  $[t_0, t]$ , adică  $U_{[t_0, t]}$ . De aici reiese existența unei *funcții de tranziție a stării*  $\phi$ , care exprimă evoluția în timp a stării  $X$  dintr-o stare inițială  $X_0$  sub acțiunea intrării  $U$ :

$$X(t) = \phi(t; t_0, X_0, U_{[t_0, t]}). \quad (1)$$

Axiomatica funcției de tranziție include *proprietatea de consistență*:

$$\phi(t_0; t_0, X_0, U(\cdot)) = X_0, \quad \forall t_0, X_0. \quad (2)$$

La *sistemele continue*, funcția de tranziție a stării este de tip integral, conținând o integrală cu limita de integrare inferioară  $t_0$  și limita de integrare superioară  $t$ . Astfel, dacă transferul intrare  $u$  - stare  $x$  este descris de *ecuația diferențială* liniară cu coeficienți constanți

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + bu(t), \quad t \in \mathbf{R},$$

atunci sistemul are funcția de tranziție a stării

$$\phi(t; t_0, X_0, U_{[t_0, t]}) = e^{a(t-t_0)} x_0 + b \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)} u(\tau) d\tau, \quad t \geq t_0. \quad (3)$$

In cazul particular  $a=0$  (când sistemul este de tip pur integral), funcția de tranziție are forma

$$\phi(t; t_0, X_0, U_{[t_0, t]}) = x_0 + b \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau.$$

La *sistemele discrete* cu perioada de discretizare a timpului egală cu 1, funcția de tranziție a stării este sub forma unei sume de termeni ce conțin valorile funcției de intrare la momentele de timp

$$t_0, t_0 + 1, \dots, t - 1,$$

anterioare momentului curent  $t$ . Astfel, sistemul la care transferul intrare  $u$  - stare  $x$  este descris de *ecuația cu diferențe* liniară cu coeficienți constanți

$$x(t+1) = ax(t) + bu(t), \quad t \in \mathbf{Z},$$

are funcția de tranziție a stării

$$\phi(t; t_0, X_0, U_{[t_0, t)}) = a^{t-t_0} x_0 + b \sum_{i=t_0}^{t-1} a^{t-1-i} u(i), \quad t \geq t_0. \quad (4)$$

În cazul particular  $a=1$  (când sistemul este de tip pur integral), funcția de tranziție are forma

$$\phi(t; t_0, X_0, U_{[t_0, t)}) = x_0 + b \sum_{i=t_0}^{t-1} u(i).$$

Pentru o stare inițială  $X_0$  și o intrare dată  $U_{[t_0, \infty)}$ , curba de evoluție a stării  $X(t)=[x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]^T$  în spațiul stărilor ( $n$ -dimensional) se numește *traietorie de stare*. Pentru  $n=2$ , traiectoriile de stare pot fi reprezentate grafic. O traiectorie de stare definită prin starea inițială  $X_0 \neq 0$  și intrarea (comanda)  $U_{[t_0, \infty)} = 0$  se numește *liberă*. Dacă însă  $X_0 = 0$  și  $U_{[t_0, \infty)} \neq 0$ , atunci traiectoria este *forțată* (fig. 1.3).

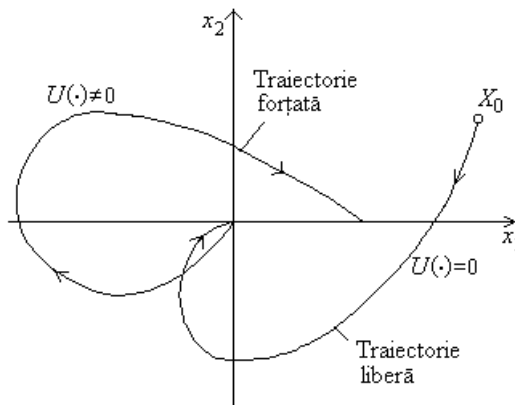


Fig. 1.3. Traietoriile de stare.

La rândul ei, ieșirea  $Y$  poate fi exprimată în raport de starea curentă  $X$  și de intrarea curentă  $U$  prin intermediul *funcției de ieșire*

$$Y(t) = \eta(t; X(t), U(t)). \quad (5)$$

În afara mărimilor variabile de intrare, de stare și de ieșire, în descrierea comportamentului unui sistem intervin și unele *mărimi parametrice* constante sau pseudo-constante (ușor variabile). La sistemele fizice, mărimile parametrice (numite, pe scurt, parametri) sunt de regulă mărimi ce

caracterizează proprietățile fizico-chimice ale sistemului: densitate, viscozitate, lungime, arie, volum, rezistență electrică, capacitate electrică, conductivitate termică etc. La sistemele cu parametri constanți, funcția de ieșire  $\eta$  nu depinde explicit de  $t$ , fiind deci de forma  $Y(t) = \eta(X(t), U(t))$ .

♦ Un exemplu de sistem îl constituie *circuitul electric RLC* din fig. 1.4. Dacă tensiunea variabilă  $u_1$  este generată din exterior, cu valoarea independentă de circuit, și dorim să cunoaștem modul de variație în timp a tensiunii  $u_L$  de la bornele inductivității  $L$ , atunci circuitul *RLC* poate fi considerat un sistem în care  $u_1$  este mărime de intrare,  $u_L$  mărime de ieșire, iar tensiunile  $u_R$  și  $u_C$  de la bornele rezistorului  $R$  și condensatorului  $C$  sunt mărimi de stare. Rezistența  $R$ , capacitatea  $C$  și inductivitatea  $L$  sunt parametri ai sistemului.

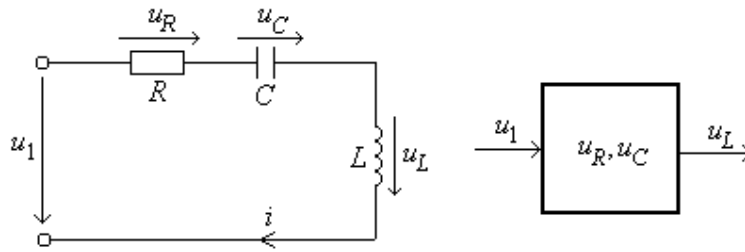


Fig. 1.4. Exemplu de sistem fizic.

Sistemul are două variabile de stare deoarece conține 2 elemente capabile să înmagazineze și să transfere energie (capacitatea  $C$  și inductivitatea  $L$ ). De remarcat faptul că dintre tensiunile de tip efect  $u_R$ ,  $u_C$  și  $u_L$ , numai primele două ( $u_R$  și  $u_C$ ) pot fi alese variabile de stare, tensiunea  $u_L$  nefiind strict întârziată în raport cu tensiunea  $u_1$  (la modificarea treptă a tensiunii  $u_1$  cu 3V, tensiunea  $u_L$  se modifică instantaneu cu 3V, după care scade treptat la 0 V). Pe de altă parte, există o infinitate de moduri de alegere a variabilelor de stare, de exemplu  $x_1 = u_R$  și  $x_2 = u_R + k u_C$ , unde  $k$  poate fi orice constantă reală nenulă.

Dacă, pe lângă  $u_L$ , interesează și modul de variație în timp a tensiunii  $u_C$ , atunci sistemul are două mărimi de ieșire ( $u_L$  și  $u_C$ ), iar  $u_C$  este atât variabilă de ieșire, cât și variabilă de stare.

La sistemele care respectă principiul cauzalității, transferul intrare-ieșire are loc cu întârziere (cel mult instantaneu). Dacă, de exemplu, între o variabilă de tip cauză  $u$  și o variabilă de tip efect  $y$  există o corelație de forma

$$5 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 2u(t+3), \quad t \in \mathbf{R}, \quad (6)$$

sau de forma



$$y(t) + y(t-1) = 6u(t+3), \quad t \in \mathbf{Z}, \quad (7)$$

ambele exprimând faptul că efectul  $y$  la momentul  $t$  este influențat de cauza  $u$  la momentul  $t+3$ , atunci sistemele respective nu sunt cauzale, adică nu respectă principiul cauzalității. Pe de altă parte, sistemul continuu impropriu descris prin ecuația

$$y(t) = 2 \frac{du(t)}{dt}, \quad (8)$$

la care ordinul de derivare a intrării depășește ordinul de derivare a ieșirii, este irealizabil fizic, deoarece răspunsul la intrare treaptă este de tip impuls Dirac (crește și coboară instantaneu de la 0 la  $\infty$  și de la  $\infty$  la 0).

## 1.2. CLASIFICAREA SISTEMELOR

Pe baza unor proprietăți derivate din definiția și proprietățile sistemelor (caracterul structural-unitar, cauzal-dinamic și informațional), acestea pot fi împărțite pe categorii și clase, sistemele aparținând unei clase având proprietăți și caracteristici asemănătoare sub anumite aspecte.

### 1.2.1. Sisteme continue și discrete

*Sistemele cu timp continuu (analogice)* sunt acele sisteme la care mărimile de intrare, de stare și de ieșire iau valori la toate momentele de timp  $t$  aparținând mulțimii numerelor reale  $\mathbf{R}$ .

Sistemele cu timp continuu pot fi *continue (netede)* sau *discontinue*. La sistemele continue, pentru orice stare inițială  $X_0$  și orice funcție de intrare  $U(t)$  continuă (fără variații bruște), funcția de stare  $X(t)$  și funcția de ieșire  $Y(t)$  sunt, de asemenea, funcții continue. Sistemele cu timp continuu care nu satisfac această proprietate se numesc *discontinue*.

Sistemele continue dinamice sunt descrise cu ajutorul ecuațiilor diferențiale.

♦ Un circuit electronic care conține elemente analogice și un releu electromagnetic având un contact într-o ramură a circuitului este un sistem discontinuu.

*Sistemele cu timp discret* sunt acele sisteme la care mărimile de intrare, de stare și de ieșire iau valori numai la anumite momente discrete  $t_k$  ale timpului. Sistemele cu timp discret la care discretizarea timpului este uniformă (cu pas constant), adică  $t_k = kT$ , unde  $T$  este perioada (tactul) și  $k \in \mathbf{Z}$ , se

numesc *sisteme discrete*. Alegând, prin convenție,  $T=1$ , rezultă că timpul  $t$  este o variabilă de tip întreg ( $t=k \in \mathbf{Z}$ ). Sistemele discrete dinamice sunt descrise cu ajutorul ecuațiilor cu diferențe.

Sistemele fizice discrete sunt sisteme artificiale (create de om) care conțin un generator de tact (ceas) cu perioada  $T$ . Sistemele discrete sunt adesea reprezentări matematice cvasi-echivalente ale sistemelor continue, utile în simularea numerică, cu ajutorul calculatorului, a comportamentului sistemelor continue.

Sistemele cu timp discret la care variabilele (de intrare, de stare, de ieșire) iau numai două valori distincte (“0” și “1”) se numesc *sisteme logice* sau *binare*, iar sistemele la care variabilele iau un număr mare de valori se numesc *sisteme numerice* sau *digitale*.

♦ Dispozitivele de semnalizare optică și acustică (la ieșirea unei mărimi fizice în afara limitelor admise) sunt sisteme logice, iar calculatoarele sunt, din punctul de vedere al utilizatorului, sisteme numerice.

Sistemele care conțin atât elemente continue cât și elemente discrete se numesc *sisteme cu eșantionare* sau *sisteme eșantionate*. Interconectarea elementelor continue și discrete se face prin intermediul convertoarelor analog-numeric și numeric-analogice. Semnalele numerice obținute prin *eșantionarea* (discretizarea) periodică a semnalelor continue se numesc *semnale eșantionate*. Semnalul de ieșire al unui convertor numeric-analogic este, de regulă, de *tip scară*, având valoarea constantă (egală cu cea a semnalului numeric) între două momente discrete succesive ale timpului.

### 1.2.2. Sisteme liniare și neliniare

Sistemele *liniare* sunt acelea care verifică *principiul superpoziției* (suprapunerii efectelor): *efectul sumei cauzelor este egal cu suma efectelor cauzelor*, adică

$$E(c_1 + c_2 + \dots + c_k) = E(c_1) + E(c_2) + \dots + E(c_k), \quad (9)$$

unde prin  $E(c_i)$  am notat efectul cauzei  $c_i$ .

Să considerăm un sistem liniar cu intrarea  $u$  și ieșirea  $y$ , aflat până la momentul inițial  $t_0 = 0$  în regim staționar cu  $u = y = 0$ . Fiind nule pentru  $t < 0$ , funcția de intrare  $u(t)$  și funcția de ieșire  $y(t)$  sunt funcții de tip *original*. Dacă intrării de tip original  $u = f_1(t)$  îi corespunde răspunsul  $y = g_1(t)$ , iar

intrării de tip original  $u = f_2(t)$  îi corespunde răspunsul  $y = g_2(t)$ , atunci intrării

$$u = \alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)$$

îi va corespunde răspunsul

$$y(t) = \alpha_1 g_1(t) + \alpha_2 g_2(t).$$

Pentru sistemele liniare există o *teorie unitară*, riguroasă și coerentă, care permite studiul acestora într-un mod unitar, simplu și precis. Sistemul obținut prin interconectarea a două sau mai multor subsisteme liniare este, de asemenea, liniar. Reciproca acestei afirmații nu este adevărată, adică liniaritatea unui sistem nu implică în mod necesar liniaritatea subsistemelor componente.

*Sistemele liniare* sunt descrise prin ecuații matematice liniare (algebrice, diferențiale sau cu diferențe). *Ecuațiile liniare* sunt formate din termeni de gradul zero sau unu, care conțin doar o singură variabilă (de intrare, de stare sau de ieșire) sau derivată a acesteia.

*Sistemele neliniare* sunt acele sisteme care nu satisfac în toate cazurile principiul superpoziției (adică acele sisteme care nu sunt liniare). Modul neconstructiv de definire a sistemelor neliniare (prin negarea unei proprietăți) și multitudinea modurilor de manifestare a neliniarităților conduc la ideea imposibilității construirii unei teorii unitare a sistemelor neliniare. În consecință, sistemele neliniare sunt studiate pe *clase de sisteme*, definite constructiv pe baza unor proprietăți comune (de exemplu, clasa sistemelor continue și liniare pe porțiuni, clasa sistemelor cu caracteristici statice de tip releu, clasa sistemelor neliniare de ordinul unu etc.).

Sistemele fizice pot fi liniare cel mult într-un domeniu mărginit de funcționare, delimitat de zone de neliniaritate (de blocare și saturație). Sistemele cu neliniarități slabe în interiorul domeniului studiat sunt considerate, de cele mai multe ori, ca fiind liniare sau liniare pe porțiuni.

### 1.2.3. Sisteme statice și dinamice

Sistemele *statice* (numite și *fără memorie*) sunt sisteme de *ordinul zero* (fără variabile de stare), având valoarea ieșirii  $Y$  la momentul curent  $t$  complet determinată de valoarea intrării  $U$  la momentul  $t$ . La aceste sisteme, ieșirea urmărește instantaneu variațiile în timp ale intrării. Sistemele fizice

statice nu conțin elemente capabile să înmagazineze și să transfere cantități semnificative de masă și energie.

Sistemele *dinamice* (numite și *cu memorie*) au ordinul mai mare decât zero și se caracterizează prin prezența regimurilor tranzitorii, ca o consecință a faptului că ieșirea urmărește cu întârziere variațiile în timp ale intrării. Sistemele fizice dinamice includ în componența lor elemente capabile să acumuleze și să transfere cantități semnificative de masă și energie.

Sistemele statice sunt descrise prin ecuații algebrice, sistemele continue dinamice prin ecuații diferențiale, iar sistemele discrete dinamice prin ecuații cu diferențe.

Studiul unui sistem alcătuit din subsisteme interconectate este mult mai simplu atunci când unele subsisteme sunt de tip static. Un subsistem din componența unui asemenea sistem poate fi considerat de tip static atunci când are timpul de răspuns la intrare treaptă neglijabil, adică de cel puțin 5...10 ori mai mic decât timpul de răspuns al sistemului.

◆ Sistemul reprezentat de circuitul electric *RLC* din fig. 1.4 este un sistem dinamic. Un circuit care conține numai rezistoare este un sistem static. De asemenea, o pârgie mecanică rigidă și cu articulație fără joc, având ca variabile de intrare-ieșire deplasările capetelor barei, este un sistem static. Un traductor tip termocuplu, deși are un timp de răspuns de ordinul minutelor la o variație treaptă a temperaturii, poate fi considerat un subsistem static în cazul unui sistem automat de reglare a temperaturii unui cuptor tubular de mari dimensiuni, caracterizat printr-un timp de răspuns de ordinul zecilor de minute.

#### **1.2.4. Sisteme cu parametri constanți și variabili**

Sistemele *cu parametri constanți* (numite și *invariante*) au o structură fixă și parametri interni constanți în timp, iar sistemele *cu parametri variabili* (numite și *variante*) au cel puțin un parametru intern variabil în timp. Starea unui sistem invariant aflat inițial în regim staționar (caracterizat prin constanța în timp a tuturor variabilelor de intrare, de stare și de ieșire) se poate modifica numai din exterior, prin acțiunea variabilelor de intrare.

Sistemele cu parametri constanți sunt descrise prin ecuații cu coeficienți constanți, iar sistemele cu parametri variabili prin ecuații cu cel puțin un coeficient variabil în timp.

♦ Circuitul electric  $RLC$  din fig. 1.4 este un sistem invariant. El devine însă un sistem variant atunci când rezistența  $R$  este variabilă în timp, prin deplasarea unui cursor mobil.

Un cuptor tubular utilizat la încălzirea produsului care circulă prin tubulatură (serpentină) poate fi un exemplu de sistem variant datorită fenomenului de cocsare în timp a materialului tubular, având ca efect modificarea parametrilor de transfer al căldurii de la flacăra la produsul încălzit. Prin comparație cu fenomenul de încălzire a produsului în cuptor, fenomenul de cocsare este mult mai lent (sesizabil după una sau mai multe luni de funcționare), astfel încât cuptorul tubular este, în mod uzual, considerat invariant, dar cu parametri ușor diferiți de la o perioadă de timp la alta.

### 1.2.5. Sisteme monovariabile și multivariabile

Sistemele *monovariabile* au o singură intrare și o singură ieșire. Sistemele *multivariabile* au cel puțin două intrări și două ieșiri, iar cel puțin o ieșire este influențată de minimum două intrări.

Sistemele cu o singură intrare ( $m=1$ ) și mai multe ieșiri ( $p>1$ ), precum și sistemele cu mai multe intrări ( $m>1$ ) și o singură ieșire ( $p=1$ ), pot fi reduse la  $p$ , respectiv  $m$  sisteme monovariabile. Sistemele monovariabile se mai numesc sisteme SISO (single input-single output), iar sistemele multivariabile se mai numesc sisteme MIMO (multi input-multi output).

♦ Circuitul electric de tip RC din fig. 1.5, având ca intrări tensiunile  $u_1$  și  $u_2$ , iar ca ieșiri tensiunile  $v_1$  și  $v_2$ , este un exemplu de sistem multivariabil cu patru canale intrare-ieșire (două directe și două indirecte).

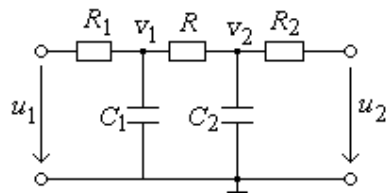


Fig. 1.5. Sistem multivariabil.

### 1.2.6. Sisteme deschise și închise

*Sistemele deschise* (cu structură deschisă) sunt caracterizate printr-un flux de informație *unidirecțional*, orientat de la intrare spre ieșire. *Sistemele închise* (cu structură sau buclă închisă, sau cu reacție) sunt sisteme la care poate fi evidențiat un flux de informație *bidirecțional*, prin care mărimea de ieșire a unui subsistem influențează propria sa stare viitoare, prin intermediul altor subsisteme.

♦ Un *sistem automat* este format din două subsisteme principale: procesul (instalația) de automatizat  $P$  și dispozitivul de automatizare  $DA$  (fig. 1.6). Sistemele automate cu

structurile (a) și (b) sunt sisteme deschise, iar cele cu structura (c) sunt sisteme închise. Sistemul cu structura (a) este un *sistem de supraveghere sau monitorizare automată* (de măsurare și/sau semnalizare), sistemul cu structura (b) este un *sistem de comandă automată* după un program prestabilit sau după o mărime variabilă independentă de proces, iar sistemul cu structura (c) este un *sistem de reglare automată* în buclă închisă. În ultimul caz, dispozitivul de automatizare **DA** primește informație de la mărimea de ieșire a procesului reglat **P** și, pe baza acestei informații și a informației de referință  $r$ , generează comenzi convenabile asupra procesului, în vederea aducerii și menținerii mărimii reglate  $y$  la o valoare cât mai apropiată de cea a mărimii de referință, în condițiile acțiunii perturbației  $p$  asupra procesului și a modificării referinței  $r$ .

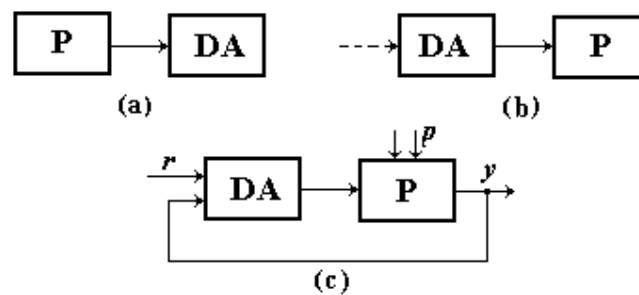


Fig. 1.6. Sisteme automate: (a), (b) deschise; (c) închis.

### 1.2.7. Sisteme cu timp mort

În cazul sistemelor fizice la care viteza de propagare a masei și/sau energiei este relativ redusă (cazul proceselor cu transfer masic și caloric, de exemplu), între mărimile de ieșire și mărimile de intrare poate fi evidențiată o întârziere pură, de tip *timp mort*. Astfel, dacă mărimea de intrare  $u$  se modifică brusc (în formă de treaptă) la momentul  $t_0=0$  (fig. 1.7), efectul devine observabil la ieșirea  $y$  a sistemului începând de la un anumit moment  $\tau$ ,  $\tau > 0$ . Intervalul de timp  $\tau$  în care efectul este insesizabil la ieșire se numește *timp mort*.

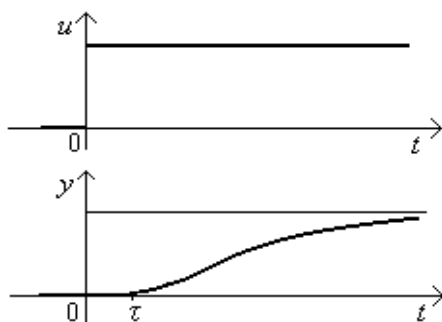


Fig. 1.7. Răspunsul la intrare treaptă al unui sistem cu timp mort.

În cazul cel mai simplu, ecuațiile matematice ale unui sistem cu timp mort  $\tau$  pot fi obținute din ecuațiile sistemului fără timp mort prin înlocuirea variabilei de intrare  $u(t)$  cu  $u(t-\tau)$  (deoarece o întârziere a cauzei cu timpul  $\tau$  produce o întârziere a efectului cu același timp  $\tau$ ).

Analiza și sinteza sistemelor închise cu timp mort sunt mult mai dificile decât la sistemele fără timp mort.

♦ Un cuptor tubular pentru încălzirea unui produs lichid, având ca mărime de intrare debitul de combustibil și ca mărime de ieșire temperatura produsului încălzit (la ieșirea din cuptor), constituie un exemplu de sistem cu timp mort, deoarece apare efect sesizabil la ieșire abia după câteva zeci de secunde (sau chiar câteva minute) după modificarea treaptă a debitului de combustibil. Un efect asemănător se produce și în cazul modificării debitului sau temperaturii produsului la intrarea acestuia în cuptor.

### 1.2.8. Sisteme cu parametri concentrați și distribuiți

Sistemele cu *parametri concentrați* sunt acelea la care se poate considera, cu suficientă precizie, că mărimile fizice asociate oricărui element al sistemului au aceeași valoare în toate punctele elementului respectiv.

Sistemele cu *parametri distribuiți* sunt acelea la care cel puțin o mărime fizică asociată unui element dimensional al sistemului are valori care diferă sensibil de la un punct la altul, adică are valori distribuite de-a lungul unei linii, în plan sau în spațiu.

♦ Pentru exemplificare, în timp ce presiunea unui gaz într-un vas are practic aceeași valoare în toate punctele vasului, presiunea unui produs lichid sau gazos într-o conductă lungă de transport are valori diferite de-a lungul conductei. Prin urmare, primul proces poate fi considerat cu parametri concentrați, iar cel de-al doilea cu parametri distribuiți.

Comportamentul dinamic al sistemelor continue cu parametri concentrați este descris prin *ecuații diferențiale ordinare*, iar cel al sistemelor cu parametri distribuiți prin *ecuații diferențiale cu derivate parțiale* (în afara variabilei timp  $t$  intervenind cel puțin una dintre variabilele spațiale  $x, y, z$ ).

Având în vedere complexitatea formalismului matematic al sistemelor cu parametri distribuiți, în multe cazuri se recomandă considerarea unui asemenea sistem ca fiind cu parametri concentrați dacă eroarea de modelare rezultată din renunțarea la ipoteza de distributivitate este relativ redusă. În asemenea situații, sistemele cu parametri distribuiți pot fi tratate în maniera specifică sistemelor cu parametri concentrați, alegând ca variabile de intrare și

de ieșire mărimi fizice locale asociate unor puncte sau poziții reprezentative (de obicei extreme) ale sistemului.

### 1.2.9. Sisteme deterministe și stochastice

La sistemele *stochastice* (numite și *probabiliste* sau *nedeterministe*), starea inițială  $X_0$  și funcția de intrare  $U_{[t_0, t]}$  nu mai determină în mod univoc starea  $X$  la momentul  $t$ . Sistemele stochastice au cel puțin un parametru intern care variază aleator și imprimă caracter aleator mărimilor de stare și de ieșire.

Caracterul determinist sau stochastic al unui sistem nu este influențat de tipul semnalelor aplicate la intrare (deterministe sau aleatoare). Sistemele stochastice generează semnal aleator pentru intrări deterministe sau aleatoare, iar sistemele deterministe generează semnal determinist la intrări deterministe și semnal aleator la intrări aleatoare.

Dacă anumite ipoteze asupra formei de variație a semnalelor stochastice pot fi admise apriori, atunci este posibilă caracterizarea acestora pe baza elementelor de *calcul probabilistic* și *statistică matematică*. Formalismul matematic este considerabil simplificat în cazul sistemelor stochastice cu caracter *staționar* (caracterizate prin constanța în timp a proprietăților statistice) și cu caracter *ergodic* (care permite analiza sistemului pe baza unui singur tip de semnal aleator reprezentativ).

### 1.2.10. Clasificarea sistemelor automate

Un sistem automat este alcătuit din două părți principale: *procesul de automatizat* și *dispozitivul de automatizare* (fig. 1.6). În majoritatea aplicațiilor practice de *reglare automată*, dispozitivul de automatizare conține un element de măsurare (traductor) **T**, un dispozitiv de comandă (regulator) **R** și un element de execuție **E** (fig. 1.8), care îndeplinesc respectiv funcțiile de *măsurare* (mai corect de traducere, transformare), de *comandă* și de *execuție*.

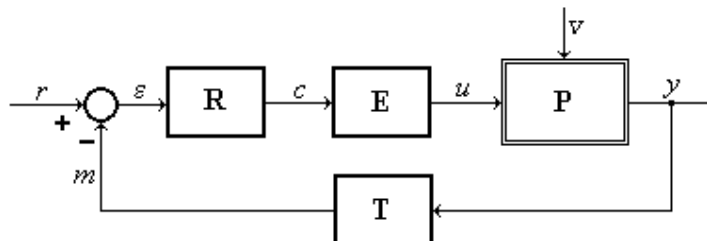


Fig. 1.8. Sistem de reglare automată după abatere.



Uneori este însă convenabilă o structurare a sistemului automat în alte două părți principale: *partea fixată* și *dispozitivul de comandă* (fig. 1.9). Partea fixată include procesul împreună cu elementul de execuție și elementul traductor.

a) După natura elementelor din componența dispozitivului de automatizare și a semnalelor de comunicație între elemente, sistemele automate pot fi: *electronice*, *pneumatice*, *hidraulice*, *mecanice* și *mixte*.

Sistemele electronice sunt superioare celorlalte în privința performanțelor tehnice și a posibilităților de cuplare la echipamentele de calcul numeric și de transmisie a semnalelor la distanță. În mediile cu pericol de explozie, sistemele electronice pot fi utilizate numai în construcție antiexplozivă sau în varianta cu circuite integrate și puteri neglijabile. Elementele pneumatice și hidraulice sunt utilizate mai ales ca dispozitive de execuție (acționare), deoarece permit generarea prin mijloace simple a unor forțe, momente și puteri relativ mari, fără pericol de explozie.

Când sistemul automat conține elemente de natură diferită, interconectarea acestora se face prin intermediul unor elemente convertitoare (de interfață).

b) După gradul de universalitate a elementelor din componența dispozitivului de automatizare, sistemele automate pot fi *unificate* sau *specializate*. Sistemele unificate conțin elemente universale și funcționează cu *semnal unificat* (standard).

Sistemele automate *specializate* sunt utilizate în cazul automatizărilor de complexitate redusă și când nu se pune problema transmiterii semnalelor la mare distanță. Acestea sunt de obicei sisteme destinate, simple și robuste.

Majoritatea sistemelor unificate electronice de tip continuu funcționează cu *semnal electronic unificat* 4 ... 20 mA c.c. Semnalul de tip curent, spre deosebire de semnalul tip tensiune, poate fi transmis fără pierdere la distanțe relativ mari, de până la 2000 m. Domeniul de variație al semnalului unificat este deplasat față de zero pentru ca raportul

$$r = \frac{\text{semnal util}}{\text{zgomot}}$$

să aibă o valoare ridicată, chiar și în cazul în care semnalul util are valoarea minimă (4 mA).

De regulă, semnalul unificat 4 ... 20 mA este curentul de colector al unui tranzistor final (de putere). Deplasarea față de zero a curentului de colector permite menținerea punctului de funcționare al tranzistorului în zona de amplificare liniară. Receptoarele de semnal unificat 4 ... 20 mA sunt conectate

în serie. Prin conectarea unei rezistențe de  $250 \Omega$  la bornele de intrare ale fiecărui receptor, curentul  $4 \dots 20 \text{ mA}$  este transformat în tensiune în gama  $1 \dots 5 \text{ V}$ . Numărul total de receptoare este limitat, pentru a nu influența valoarea curentului, ca urmare a depășirii puterii sau tensiunii maxime ale generatorului de curent. De remarcat faptul că un generator de semnal  $4 \dots 20 \text{ mA}$  are structura unui *sistem de reglare după abatere*, cu regulator de tip proporțional, cu reacție negativă de la curentul de ieșire și cu amplificare mare pe calea directă (de ordinul miilor), pentru ca mărimea reglată (reprezentată chiar de semnalul unificat generat) să nu fie influențată de valoarea rezistenței de sarcină.

În practică, semnalul unificat  $I=4 \dots 20 \text{ mA}$  se exprimă frecvent în procente, între valoarea  $I^*$  în % și valoarea  $I$  în mA existând relațiile

$$I^* = \frac{I-4}{16} \cdot 100, \quad I = 4 + \frac{16}{100} I^*. \quad (10)$$

Valoarea procentuală  $I^*$  a semnalului generat de un traductor unificat cu caracteristică statică liniară este egală cu valoarea procentuală  $y^*$  a mărimii măsurate ( $I^* = y^*$ ), ultima obținându-se prin raportare la lungimea domeniului de măsurare înscris pe plăcuța cu denumirea și caracteristicile tehnice ale traductorului, fixată pe carcasa adaptorului (generator de semnal unificat) din componența traductorului. Corelația între valoarea semnalului unificat  $I$  (în mA) și cea a mărimii măsurate  $y$  (în unități fizice ingineresti) se poate obține ușor prin intermediul exprimării procentuale. Astfel, în cazul unui traductor de temperatură cu domeniul  $400 \dots 600^\circ\text{C}$ , temperaturii  $T=450^\circ\text{C}$  îi corespunde valoarea procentuală

$$T^* = \frac{T-400}{600-400} \cdot 100 = 25\%$$

și semnalul unificat

$$I = 4 + \frac{16}{100} I^* = 4 + \frac{16}{100} T^* = 8 \text{ mA}.$$

Invers, semnalului unificat  $I=10 \text{ mA}$  îi corespunde valoarea procentuală

$$I^* = \frac{I-4}{16} \cdot 100 = 37,5\%$$

și temperatura

$$T = 400 + (600-400) \frac{T^*}{100} = 400 + (600-400) \frac{I^*}{100} = 475^\circ\text{C}.$$

În ultimii 20 ani, s-au dezvoltat și extins *rețelele de comunicație digitale* (rețele FIELDBUS, PROFIBUS etc.), care oferă o serie de avantaje tehnico-

economice, cum ar fi: creșterea calității operațiilor de automatizare, reducerea costurilor și a dimensiunilor, posibilitatea interfațării elementelor inteligente la nivelul traductoarelor și elementelor de execuție, creșterea flexibilității, siguranței în funcționare și competitivității.

Sistemele unificate pneumatice funcționează cu *semnal pneumatic unificat* în gama 0,2 ... 1,0 bar, unde

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa (N/m}^2) \approx 1 \text{ kgf/cm}^2.$$

Presiunea maximă de 1 bar nu implică probleme deosebite de etanșare și nici consum energetic ridicat pentru prepararea *aerului instrumental* de alimentare a dispozitivelor pneumatice unificate (aer din atmosferă, curățat de impurități, uscat și comprimat la 1,4 bar); în același timp, presiunea de 1 bar este suficient de mare pentru a crea forțe de ordinul sutelor sau miilor de kgf (prin intermediul unor membrane circulare cu raza de 5...50 cm), necesare în acționarea robinetelor de reglare. Deoarece nu generează scântei, dispozitivele pneumatice sunt frecvent utilizate în medii cu pericol de explozie, în special ca elemente de execuție. În mod frecvent, mărimile sistemelor automate unificate se exprimă în procente.

c) În raport cu funcția îndeplinită, sistemele automate se clasifică în:

- sisteme automate de *supraveghere* sau *monitorizare* (prin măsurare și/sau semnalizare);
- sisteme automate de *protecție*;
- sisteme automate de *comandă după un program prestabilit*;
- sisteme automate de *reglare în buclă deschisă*, la care comanda este elaborată numai pe baza valorilor curente ale unei mărimi de referință și a unei mărimi perturbatoare, fără informație privind starea curentă a procesului;
- sisteme automate de *reglare în buclă închisă*, la care comanda este elaborată pe baza valorilor curente ale mărimii de referință și mărimii reglate;
- sisteme automate de *conducere* (prin supraveghere, protecție, comandă și reglare).

Măsurarea este o operație cantitativă, în timp ce semnalizarea (optică și acustică) este o operație calitativă (care pune în evidență starea normală sau de depășire a unei mărimi de proces).

Protecția automată presupune oprirea (blocarea) parțială sau totală a procesului (instalației), atunci când o mărime a acestuia iese în afara domeniului admisibil de funcționare, afectând calitatea produsului finit și/sau securitatea instalației. Unei mărimi fizice a procesului i se pot asocia două sisteme de semnalizare și de protecție: la depășirea limitei superioare și la

scăderea sub limita inferioară. Limita superioară de protecție trebuie fixată la o valoare mai mare decât limita superioară de semnalizare.

Sistemele clasice de semaforizare a unei intersecții rutiere sunt exemple de sisteme automate de comandă după un program prestabilit, deoarece timpii de semaforizare au valori independente de starea curentă a traficului rutier.

Problema reglării constă în elaborarea unei comenzi convenabile  $C$  asupra părții fixate (procesului reglat)  $P$ , astfel încât mărimea de ieșire a procesului  $Y$  să urmărească cât mai bine mărimea de referință  $R$  impusă din exterior, în condițiile acțiunii perturbațiilor  $V_1$  și  $V_2$  asupra procesului (fig. 1.9). Comanda  $C$  este elaborată de elementul decizional (de comandă)  $R$ , numit *regulator* sau *compensator*, după un algoritm adecvat, pe baza valorilor curente ale mărimii reglate  $Y$ , referinței  $R$  și perturbației măsurate  $V_1$ . La sistemele de reglare avansate, regulatorul  $R$  poate îndeplini și alte funcții speciale (de identificare a procesului  $P$ , de optimizare etc.).

În cazul ideal, sistemul de reglare realizează condiția de reglare

$$Y(t) \equiv R(t)$$

oricare ar fi intrarea de referință  $R(t)$  și perturbația  $V_1(t)$  din clasa funcțiilor de intrare admise. În aplicațiile practice, problema reglării trebuie *relaxată*, în sensul înlocuirii condiției rigide de urmărire exactă a mărimii de referință  $R$  de către mărimea reglată  $Y$  printr-o condiție de urmărire cu un grad de precizie rezonabil.

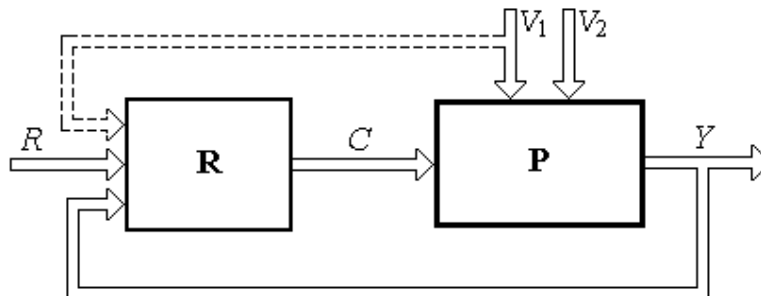


Fig. 1.9. Sistem mixt de reglare automată după abatere și perturbație.

Conform **principiului reglării după perturbație**, se măsoară valoarea curentă a perturbației și, anticipând efectul acesteia asupra mărimii reglate, se intervine în paralel, deci în buclă deschisă, asupra procesului în vederea compensării efectului direct produs de perturbație asupra mărimii reglate. Deoarece acțiunea compensatoare are loc simultan cu acțiunea perturbatoare,

sistemul de reglare poate *preveni* modificarea mărimii reglate de către perturbația considerată  $V_1$ . Pentru realizarea unei reglări performante (care să atenueze cât mai bine influența mărimii perturbatoare asupra mărimii reglate) este necesară *cunoașterea cât mai exactă a modelului dinamic* al procesului reglat (a canalului perturbator și canalului de execuție). Chiar și în acest caz, efectul perturbațiilor nemăsurate rămîne în totalitate necompensat, ceea ce constituie principalul *dezavantaj* al reglării după perturbație. Sistemele de reglare după perturbație sunt sisteme cu *structură deschisă*, deoarece compensatorul nu primește informație referitoare la valoarea mărimii reglate, deci la efectul acțiunii sale asupra procesului reglat. În consecință, compensatorul nu poate efectua acțiuni de autocorecție, iar aplicațiile practice de reglare bazate numai pe principiul reglării după perturbație sunt adesea nesatisfăcătoare, deoarece performanțele reglării depind în mod decisiv de calitatea (acuratețea) modelului procesului. Sistemele de reglare după perturbație pot aduce însă un plus de calitate în cadrul sistemelor de reglare mixtă (după perturbație și după efect). Sistemele cu reglare după perturbație (cauză) se mai numesc sisteme cu *precompensare* sau cu “*feedforward*”.

Conform *principiului reglării după abatere*, se măsoară mărimea de ieșire a procesului (mărimea reglată) și se compară cu mărimea de referință, iar pe baza diferenței (abaterii, erorii) rezultate, se elaborează un semnal de comandă convenabil și se intervine asupra procesului în vederea reducerii și eliminării abaterii respective, indiferent de cauza care a generat-o (acțiunea perturbațiilor asupra procesului sau variația în timp a referinței). La sistemele cu acțiune după efect, apariția abaterii (erorii) nu poate fi prevenită, dar acțiunea de reducere a acesteia începe din momentul producerii celei mai mici abateri sesizabile, indiferent de cauza care a generat abaterea. Sistemele de reglare după abatere sunt *sisteme închise* (în buclă închisă), robuste, sigure și mai precise decât cele după perturbație (în buclă deschisă), deoarece realizează operații permanente de autocorecție, pe baza informației referitoare la mărimea reglată (de ieșire a procesului reglat) – fig. 1.6. Sistemele cu reglare după abatere (efect) se mai numesc sisteme cu *reacție* sau cu “*feedback*”.

Omul, cel mai evoluat sistem cunoscut, utilizează în mod curent cele două principii ale reglării. În plus, majoritatea proceselor interne specifice corpului viu se desfășoară (autoreglează) în strânsă corelație cu aceste principii.

Regulatele clasice (convenționale) generează comanda  $c$  (fig. 1.8) prin prelucrarea erorii curente  $\varepsilon = r - m$  ( $r$  - semnal de referință sau “setpoint”,  $m$  - semnal de măsurare sau de reacție) după cunoscutul *algoritm de reglare PID* (proporțional-integral-derivativ). În majoritatea cazurilor, algoritmul continuu PID este prezentat sub următoarea formă simplificată (improprie):

$$c = K_R \left( \varepsilon + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon dt + T_d \frac{d\varepsilon}{dt} \right) + c_0, \quad \varepsilon = r - m, \quad (11)$$

în care  $K_R$ ,  $T_i$  și  $T_d$  sunt parametri de acordare ( $K_R$  - factorul de proporționalitate,  $T_i$  - constanta de timp integrală,  $T_d$  - constanta de timp derivativă), iar  $c_0$  este valoarea comenzii  $c$  la momentul  $t=0$  și în ipoteza că sistemul de reglare se află în regim inițial staționar (de echilibru) cu eroarea nulă. Între factorul de proporționalitate  $K_R$  și banda de proporționalitate  $B_p$  (cu care se operează uneori în practică) există relația  $K_R = 100/B_p$ . Cele două constante de timp se află una la numitor, cealaltă la numărător, din considerente de omogenitate dimensională (pentru ca cei trei termeni ai sumei să fie echivalenți sub aspect dimensional, adică să aibă unitățile de măsură ale erorii  $\varepsilon$ ).

În forma (11) a algoritmului de reglare PID, factorul de proporționalitate  $K_R$  influențează în mod egal cele trei componente ale comenzii. Prin creșterea/scăderea acestuia de către operatorul uman se poate obține o comandă mai puternică/slabă, fără a se schimba ponderea relativă a celor trei componente. În majoritatea cazurilor practice, componenta proporțională P a algoritmului de comandă nu poate elimina în totalitate eroarea  $\varepsilon$ , dar eroarea finală (la încheierea unui regim tranzitoriu) este cu atât mai mică cu cât  $K_R$  este mai mare. Creșterea excesivă a lui  $K_R$  generează însă în sistem un regim oscilant, caracterizat prin oscilații amortizate, întreținute sau chiar crescătoare.

Componenta integrală are caracter *persistent* și rol de *eliminare a abaterii*, deoarece acțiunea de integrare a erorii (deci de modificare a comenzii) încetează numai atunci când eroarea este zero. Componenta derivativă are caracter *anticipativ*, deoarece derivata erorii, echivalentă cu viteza de variație a erorii, exprimă tendința de variație a erorii. Componenta derivativă apare în ecuația (11) într-o *formă improprie* (în care ordinul de derivare a erorii – ca mărime de intrare este mai mare decât cel al comenzii – ca mărime de ieșire), răspunsul acestei componente la referință treaptă fiind de tip impuls Dirac, deci irealizabil fizic.

În realizarea unei reglări performante, un rol important îl au intensitatea și modul de distribuție a comenzii pe cele trei componente, ambele cerințe putând fi realizate prin alegerea adecvată a celor trei parametri de acordare. Valorile optime ale parametrilor de acordare ai regulatorului sunt dependente de caracteristicile dinamice ale procesului reglat.

*Exprimarea procentuală* a mărimilor unui sistem de reglare unificat permite compararea a două mărimi de natură fizică diferită (de exemplu, presiunea - ca mărime reglată și semnalul electric unificat - ca mărimea de referință), asigurând adimensionalitatea factorilor de proporționalitate ai elementelor sistemului (ale căror valori nu mai depind de unitățile de măsură ale mărimilor de intrare și ieșire) și reducerea volumului calculelor de proiectare.

### 1.3. APLICAȚII REZOLVATE

♦ **Aplicația 1.1.** Transferul intrare-stare al unui *sistem continuu* cu intrarea  $u$  și starea  $x$  este descris de ecuația diferențială cu coeficienți constanți

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + bu(t), \quad t \in \mathbf{R}.$$

Să se arate că sistemul are funcția de tranziție a stării

$$\phi(t; t_0, x_0, u(\cdot)) = e^{a(t-t_0)} x_0 + b \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)} u(\tau) d\tau.$$

**Soluție.** Înmulțind ambii membri ai ecuației diferențiale cu exponențiala  $e^{-at}$ , obținem succesiv:

$$e^{-at} (\dot{x} - ax) = be^{-at} u,$$

$$(e^{-at} x)' = be^{-at} u,$$

$$\int_{t_0}^t (e^{-at} x)' dt = b \int_{t_0}^t e^{-a\tau} u(\tau) d\tau,$$

$$e^{-at} x(t) - e^{-at_0} x(t_0) = b \int_{t_0}^t e^{-a\tau} u(\tau) d\tau,$$

$$x(t) = e^{a(t-t_0)} x_0 + b \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)} u(\tau) d\tau, \quad t \geq t_0$$

Se poate verifica ușor că funcția de tranziție verifică proprietatea de consistență

$$\phi(t_0; t_0, x_0, u(\cdot)) = x_0.$$

**Remarcă.** În cazul în care coeficienții  $a$  și  $b$  sunt funcții de timp, funcția de tranziție are forma

$$\phi(t; t_0, x_0, u(\cdot)) = e^{\int_{t_0}^t a(\xi) d\xi} x_0 + b \int_{t_0}^t e^{\int_{\tau}^t a(\xi) d\xi} b(\tau) u(\tau) d\tau.$$

Ea se obține într-un mod similar, înmulțind ambii membri ai ecuației diferențiale cu funcția  $k(t) = e^{-\int_{t_0}^t a(\xi) d\xi}$ , care verifică ecuația diferențială  $\dot{k}(t) = -k(t)a(t)$ .

♦ **Aplicația 1.2.** Transferul intrare-stare al unui sistem discret cu intrarea  $u$  și starea  $x$  este descrisă de ecuația cu diferențe

$$x(t+1) = ax(t) + bu(t), \quad t \in \mathbf{Z}.$$

Să se arate că sistemul are funcția de tranziție a stării

$$\phi(t; t_0, x_0, u(\cdot)) = a^{t-t_0} x_0 + b \sum_{i=t_0}^{t-1} a^{t-1-i} u(i).$$

**Soluție.** Avem

$$\begin{aligned} x(t_0+1) &= ax(t_0) + bu(t_0), \\ x(t_0+2) &= a^2x(t_0) + abu(t_0) + bu(t_0+1), \\ &\dots\dots\dots \\ x(t_0+k) &= a^kx(t_0) + a^{k-1}bu(t_0) + a^{k-2}bu(t_0+1) + \dots + bu(t_0+k-1). \end{aligned}$$

În ultima relație, înlocuind pe  $k$  cu  $t-t_0$ , obținem

$$x(t) = a^{t-t_0}x(t_0) + a^{t-t_0-1}bu(t_0) + a^{t-t_0-2}bu(t_0+1) + \dots + bu(t-1), \quad t \geq t_0.$$

♦ **Aplicația 1.3.** Un sistem electronic unificat de măsurare a presiunii are domeniul  $P = 10 \dots 40$  bar și semnalul de ieșire  $I = 4 \dots 20$  mA.

- Care este valoarea presiunii  $P$  dacă  $I = 10$  mA ?
- Care este valoarea curentului de ieșire  $I$  dacă presiunea este  $P = 15$  bar ?

**Soluție.** Valoarea procentuală a unei mărimi se obține prin raportare la lungimea domeniului a variației mărimii față de limita inferioară a domeniului:

$$P^* = \frac{P - P_{inf}}{Dom} \cdot 100\%, \quad I^* = \frac{I - I_{inf}}{dom} \cdot 100\%,$$

unde  $Dom$  este lungimea domeniului de măsurare a presiunii, iar  $dom$  este lungimea domeniului de variație a semnalului unificat. Din  $P^* = I^*$ , rezultă corelația directă între  $P$  și  $I$ :

$$\frac{P - P_{inf}}{Dom} = \frac{I - I_{inf}}{dom}.$$

- Presiunea are valoarea



$$P^* = I^* = \frac{I - I_{inf}}{dom} \cdot 100 = \frac{10 - 4}{20 - 4} \cdot 100 = 37,5 \%,$$

$$P = P_{inf} + \frac{P^*}{100} \cdot Dom = 10 + \frac{37,5}{100} \cdot (40 - 10) = 21,25 \text{ bar},$$

sau, direct,

$$P = P_{inf} + \frac{Dom}{dom} (I - I_{inf}) = 10 + \frac{30}{16} (10 - 4) = 21,25 \text{ bar}.$$

b) Curentul are valoarea

$$I^* = P^* = \frac{P - P_{inf}}{Dom} \cdot 100 = \frac{15 - 10}{30} \cdot 100 = \frac{50}{3} \%,$$

$$I = I_{inf} + \frac{I^*}{100} \cdot dom = 4 + \frac{50}{300} \cdot 16 = \frac{20}{3} \text{ mA},$$

sau, direct,

$$I = I_{inf} + \frac{dom}{Dom} (P - P_{inf}) = 4 + \frac{16}{30} (15 - 10) = \frac{20}{3} \text{ mA}.$$

# 2

---

## REPREZENTAREA MATEMATICĂ A SISTEMELOR

---

Comportamentul unui sistem în *regim dinamic* (care include *regimul tranzitoriu* și, implicit, *regimul staționar*) poate fi descris cu ajutorul unui *model matematic* format din ecuații algebrice și din ecuații diferențiale sau cu diferențe, după cum sistemul este continuu sau discret.

Caracterizarea unui sistem prin ecuații de tip intrare-ieșire (I-E) implică un formalism matematic aparent mai simplu, care însă nu pune în evidență toate aspectele referitoare la structura și starea internă a sistemului. Astfel, pentru un sistem continuu de ordinul  $n$  (descriș printr-o ecuație diferențială de ordinul  $n$ ), valoarea ieșirii  $y$  la momentul  $t$  poate fi determinată pe baza intrării  $u_{[0,t]}$  și a primelor  $n$  condiții inițiale  $y(0), \dot{y}(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$ .

La un sistem continuu de tip intrare-stare-ieșire (I-S-E), în locul condițiilor inițiale se utilizează starea inițială a sistemului, descriș de vectorul  $n$ -dimensional  $X_0$ . Conceptele de stare și de sistem I-S-E sunt esențiale în *teoria modernă* a sistemelor. Reamintim că numărul  $n$  al variabilelor de stare, adică dimensiunea vectorului de stare  $X$ , determină *dimensiunea* sau *ordinul* sistemului.

Reprezentarea matematică a sistemelor continue cu *parametri distribuiți* se face prin *ecuații diferențiale cu derivate parțiale*, deoarece în afara variabilei timp  $t$  mai intervine cel puțin una dintre variabilele spațiale  $x, y, z$ . Aceste sisteme fac parte din categoria sistemelor *infini dimensional*.

Tot din categoria sistemelor *infini dimensional* fac parte sistemele cu *timp mort*. Modelul unui sistem cu timp mort  $\tau$  se obține, în cazul cel mai simplu, din modelul sistemului fără timp mort, prin înlocuirea funcției de

intrare  $u(t)$  cu  $u(t-\tau)$  (deoarece o întârziere pură a mărimii de intrare cu timpul  $\tau$  produce o întârziere a mărimii de ieșire cu același timp  $\tau$ ).

În continuare ne vom referi la sistemele deterministe, cu parametri concentrați și fără timp mort, care sunt sisteme *finit dimensionale*.

## 2. 1. MODELAREA SISTEMELOR

*Modelul matematic* al unui sistem este un *set de relații și ecuații matematice care permit descrierea caracteristicilor, proprietăților și răspunsului sistemului în sensul intrare-ieșire sau intrare-stare-ieșire*.

Unui sistem dinamic (cu memorie) i se poate asocia un *model dinamic* - pentru caracterizarea regimului de funcționare dinamic, și un *model staționar* - pentru caracterizarea regimului de funcționare staționar. *Regimul staționar* poate fi de *tip static* (când sistemul se află în echilibru, cu toate mărimile de intrare, de stare și de ieșire constante în timp) sau de *tip permanent* (când forma de variație în timp a mărimilor sistemului rămâne neschimbată – tip constantă, tip rampă, tip sinusoidal etc.). În continuare, vom considera modelul staționar ca fiind asociat regimului staționar de tip static.

Modelele sistemelor statice (fără memorie, cu răspuns instantaneu) și modelele staționare ale sistemelor dinamice sunt formate din *ecuații algebrice*, în timp ce modelele dinamice ale sistemelor dinamice sunt constituite din *ecuații diferențiale* (la sistemele continue) sau din *ecuații cu diferențe* (la sistemele discrete). Modelul dinamic include și modelul staționar, ultimul putând fi obținut din primul printr-o particularizare convenabilă (prin anularea tuturor derivatelor în raport cu timpul ale mărimilor sistemului – la sistemele continue, respectiv prin egalarea valorilor fiecărei mărimi a sistemului la toate momentele de timp – la sistemele discrete). Modelul staționar nu conține variabila timp  $t$ .

Sistemelor liniare le corespund *modele liniare* (formate din ecuații liniare), iar sistemelor neliniare - *modele neliniare* (care conțin cel puțin o ecuație neliniară). În majoritatea aplicațiilor practice, pentru simplificarea formalismului matematic, sistemelor cu neliniarități slabe li se asociază modele liniare sau liniarizate pe porțiuni ale domeniului de funcționare.

*Modelarea* unui sistem fizic, adică operația de obținere a modelului matematic, se poate efectua prin *metode analitice, experimentale sau mixte*.

*Simularea* este operația de determinare a caracteristicilor și comportamentului unui sistem pe baza modelului acestuia. Simularea sistemelor de ordin superior (mai mare decât doi) se efectuează cu ajutorul calculatorului numeric. Precizia de simulare este dată, în principal, de precizia și acuratețea modelului matematic, dar poate fi influențată de complexitatea și volumul operațiilor de calcul.

**Modelarea analitică** a unui sistem fizic se efectuează pe baza legilor generale și particulare care guvernează fenomenele fizico-chimice asociate sistemului (legea conservării masei/volumului/energiei/impulsului/sarcinii electrice, legile echilibrului fizico-chimic etc.).

Modelarea analitică a sistemelor fizice se face prin luarea în considerare a unor *ipoteze cu rol simplificator*. După modul de alegere a ipotezelor simplificatoare și gradul de concordanță a acestora cu fenomenul real, modelul obținut este mai simplu sau mai complex, reflectând realitatea fizică cu un grad de precizie mai mic sau mai mare. Dacă numărul ipotezelor simplificatoare luate în considerare este mare, atunci modelul obținut este simplu, robust, ușor de prelucrat și de interpretat, dar mai puțin precis. Nici modelele complicate, obținute prin neglijarea ipotezelor simplificatoare, nu sunt recomandate, din cauza acurateței reduse în determinarea valorii unor parametri, a dificultății studiului analitic (fără calculator) și a erorilor de rotunjire și trunchiere în procesarea numerică.

Legea conservării masei este aplicată frecvent în forma

$$Q_{m1}(t) - Q_{m2}(t) = \frac{dm_a(t)}{dt}, \quad (1)$$

care exprimă faptul că *diferența dintre debitul masic de admisie  $Q_{m1}$  și debitul masic de evacuare  $Q_{m2}$  este egală cu viteza de variație a masei acumulate  $m_a$* . Relația (1) se obține prin derivarea în raport cu variabila  $t$  a ecuației de bilanț material

$$m_1(t) - m_2(t) = m_a(t),$$

unde  $m_1(t)$ ,  $m_2(t)$  și  $m_a(t)$  reprezintă respectiv masa admisă, masa evacuată și masa acumulată în intervalul de timp  $[0, t]$ . Legea conservării volumului lichidelor (fluidelor incompresibile) are un enunț similar, iar legea conservării energiei aplicată reacțiilor chimice trebuie să țină seama și de căldura degajată sau absorbită prin reacție.

În cazul sistemului reprezentat de *amestecătorul* de produse lichide din fig. 2.1, considerăm că aria  $A$  a secțiunii orizontale a vasului și densitățile  $\rho_1$  și  $\rho_2$  ale lichidelor de intrare sunt constante, iar debitele volumice  $Q_1$ ,  $Q_2$  și  $Q$  sunt mărimi variabile ce pot fi modificate independent de starea amestecătorului, cu ajutorul unor robinete sau pompe reglabile. În consecință, cele trei debite sunt mărimi de intrare ale sistemului, nivelul  $h$  și densitatea  $\rho$  sunt mărimi de ieșire, iar  $\rho_1$  și  $\rho_2$  sunt mărimi parametrice.

Pentru obținerea *modelului analitic*, acceptăm următoarele două ipoteze simplificatoare:

- lichidele sunt incompresibile (nu conțin gaze dizolvate);
- amestecarea este perfectă, adică densitatea  $\rho$  are aceeași valoare în toate punctele amestecului.

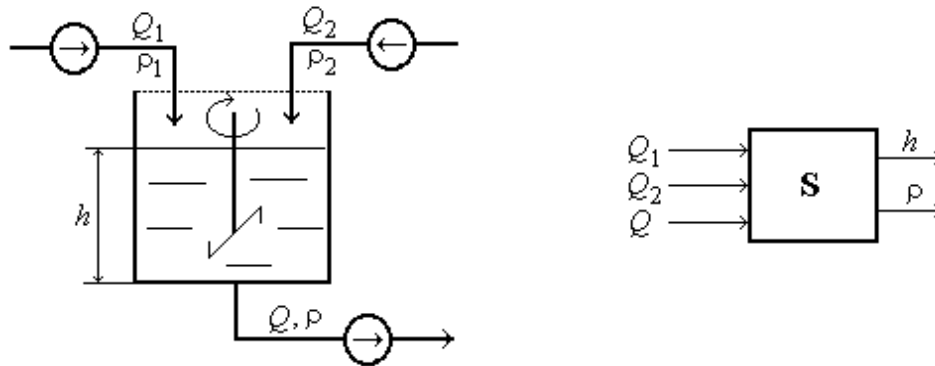


Fig. 2.1. Amestecător cu debite comandabile (cu ajutorul pompelor).

Aplicând legea conservării masei sub forma (1) și apoi, în mod similar, legea conservării volumului, rezultă

$$\rho_1 Q_1 + \rho_2 Q_2 - \rho Q = A \frac{d(h\rho)}{dt}, \quad (2)$$

$$Q_1 + Q_2 - Q = A \frac{dh}{dt}. \quad (3)$$

Din aceste relații obținem următorul model al sistemului:

$$\begin{cases} A \frac{dh}{dt} = Q_1 + Q_2 - Q \\ Ah \frac{d\rho}{dt} + (Q_1 + Q_2)\rho = \rho_1 Q_1 + \rho_2 Q_2 \end{cases}. \quad (4)$$

În conformitate cu modelul obținut, sistemul este dinamic, multivariabil, determinist, neliniar (cu a doua ecuație neliniară), cu parametri concentrați și fără timp mort. Cele trei canale prin care intrările  $Q_1$ ,  $Q_2$  și  $Q$  influențează nivelul  $h$  sunt liniare, de tip pur integral.

Modelul (4) sugerează posibilitatea descompunerii sistemului  $S$  în două subsisteme interconectate (fig. 2.2), unul liniar ( $S_1$ ) și celălalt neliniar ( $S_2$ ).

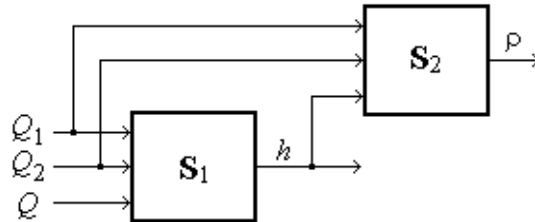


Fig. 2.2. Descompunerea amestecătorului cu debite comandabile.

Dacă scurgerea amestecului din vas are loc *liber* (fig. 2.3), debitul evacuat  $Q$  depinde de presiunea hidrostatică din zona robinetului, deci de nivelul  $h$ . Prin urmare, debitul  $Q$  se transformă din variabilă cauză (de intrare) în variabilă efect (de ieșire).

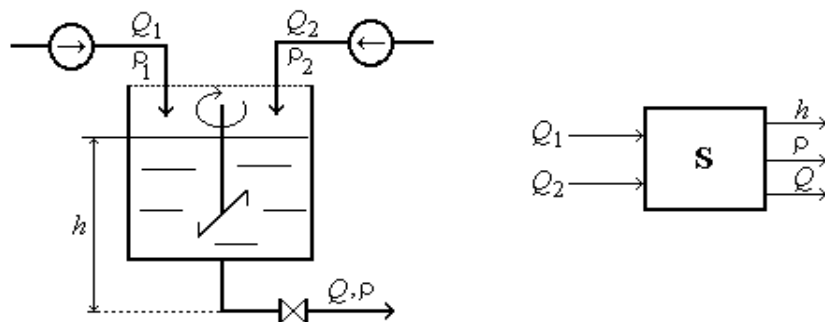


Fig. 2.3. Amestecător cu scurgere liberă.

În regim laminar de curgere, relația debit evacuat  $Q$  - nivel  $h$  are forma liniară

$$Q = \alpha h, \quad (5)$$

iar în regim turbulent, are forma neliniară

$$Q = \beta \sqrt{h}, \quad (6)$$

unde  $\alpha$  și  $\beta$  sunt coeficienți dependenți de vâscozitatea lichidului, de forma și dimensiunile secțiunii obturatoare a robinetului. Ținând seama de aceste relații, obținem modelul de regim laminar

$$\begin{cases} A \frac{dh}{dt} + \alpha h = Q_1 + Q_2 \\ Ah \frac{d\rho}{dt} + (Q_1 + Q_2)\rho = \rho_1 Q_1 + \rho_2 Q_2 \\ Q = \alpha h \end{cases}, \quad (7)$$

respectiv modelul de regim turbulent

$$\begin{cases} A \frac{dh}{dt} + \beta \sqrt{h} = Q_1 + Q_2 \\ Ah \frac{d\rho}{dt} + (Q_1 + Q_2)\rho = \rho_1 Q_1 + \rho_2 Q_2 \\ Q = \beta \sqrt{h} \end{cases}. \quad (8)$$

Prin anularea derivatelor, din (7) rezultă modelul staționar de regim laminar

$$\begin{cases} h = \frac{1}{\alpha} (Q_1 + Q_2) \\ \rho = \frac{\rho_1 Q_1 + \rho_2 Q_2}{Q_1 + Q_2} \\ Q = \alpha h \end{cases}, \quad (9)$$

iar din (8) rezultă modelul staționar de regim turbulent

$$\begin{cases} h = \left( \frac{Q_1 + Q_2}{\beta} \right)^2 \\ \rho = \frac{\rho_1 Q_1 + \rho_2 Q_2}{Q_1 + Q_2} \\ Q = \beta \sqrt{h} \end{cases}. \quad (10)$$

În schema descompusă din fig. 2.4, subsistemele  $S_1$  și  $S_2$  sunt de tip dinamic, iar subsistemul  $S_3$  este de tip static. În regim de curgere laminară, subsistemele  $S_1$  și  $S_3$  sunt liniare, iar  $S_2$  este neliniar, în timp ce în regim de curgere turbulent, toate cele trei subsisteme sunt neliniare.

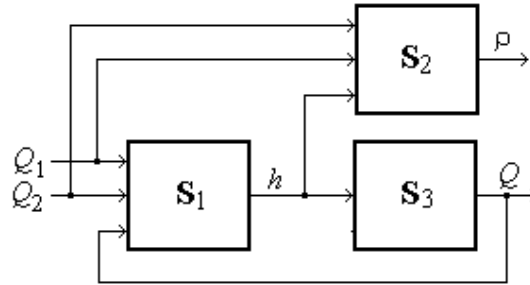


Fig. 2.4. Descompunerea în subsisteme a amestecătorului cu scurgere liberă.

În cazul în care amestecătorul conține un deversor pentru menținerea constantă a nivelului ( $h=h_0$ ), sistemul are ca variabile de intrare debitele  $Q_1$  și  $Q_2$ , iar ca variabile de ieșire debitul  $Q$  și densitatea  $\rho$  (fig. 2.5). Ținând seama de (4), rezultă modelul

$$\begin{cases} Q = Q_1 + Q_2 \\ Ah_0 \frac{d\rho}{dt} + Q\rho = \rho_1 Q_1 + \rho_2 Q_2 \end{cases} \quad (11)$$

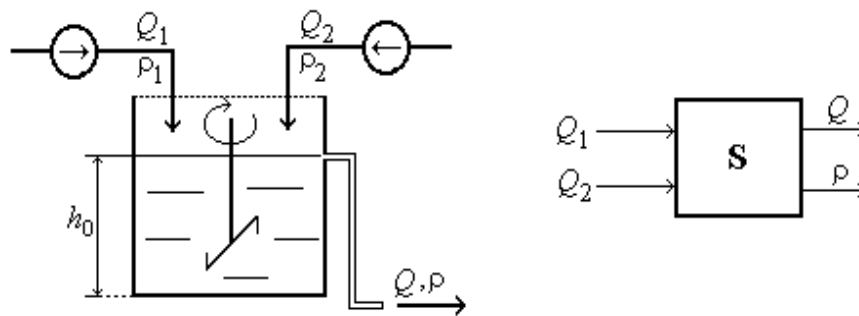


Fig. 2.5. Amestecător cu deversor.

Gradul de complexitate al sistemului crește atunci când o parte a debitului de ieșire este recirculată (reintrodusă în vas).



**Modelarea experimentală** (denumită și *identificare*) presupune efectuarea unor teste asupra sistemului fizic în vederea determinării modelului matematic al sistemului (cazul sistemelor de tip *black box*), fie numai determinarea valorii unor parametri ai modelului, atunci când se cunoaște forma acestuia, din modelarea pe cale analitică.

Pentru exemplificare, să considerăm un sistem fizic având ca mărime de intrare un debit  $Q$  și ca mărime de ieșire o temperatură  $T$ , aflat în regim staționar pentru  $t < 0$ , cu  $Q = Q_0$  și  $T = T_0$ . Definim mărimile sistemice de intrare și de ieșire

$$u = Q - Q_0 = \Delta Q, \quad y = T - T_0 = \Delta T,$$

și presupunem că în urma modificării treapte a mărimii de intrare,  $u(t) = \alpha \cdot 1(t)$ , răspunsul  $y(t)$  determinat experimental are forma din fig. 2.6.

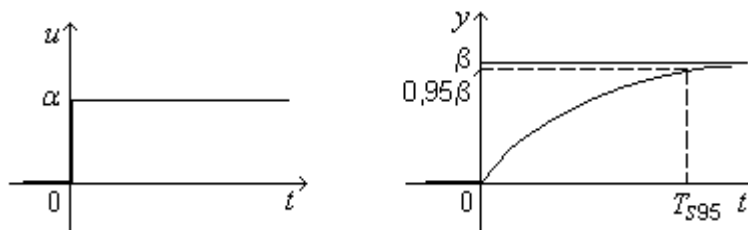


Fig. 2.6. Determinarea experimentală a modelului unui sistem liniar de întârziere de ordinul unu.

Având în vedere forma concav-monotonă și mărginită a răspunsului sistemului, vom considera următoarea formă de model liniar:

$$T_1 \frac{dy}{dt} + y = Ku, \quad (12)$$

cu

$$K = \frac{\beta}{\alpha}, \quad T_1 \approx \frac{T_{s95}}{3}. \quad (13)$$

unde  $T_{s95}$  reprezintă timpul de stabilizare a răspunsului, în care acesta atinge 95 % din valoarea sa finală.

Din modelul dinamic (12) rezultă modelul staționar  $y = Ku$  (prin anularea derivatei  $\dot{y}$  a ieșirii), valabil pentru  $t < 0$  și pentru  $t \rightarrow \infty$ .

Deoarece  $u = \alpha$  și  $y = \beta$  pentru  $t \rightarrow \infty$ , factorul de proporționalitate  $K$  rezultă imediat din modelul staționar  $y = Ku$  pentru  $u = \alpha$  și  $y = \beta$ .

De asemenea, expresiile factorului  $K$  și constantei de timp  $T_1$  rezultă din soluția ecuației diferențiale

$$T_1 \frac{dy}{dt} + y = K\alpha$$

pentru  $t \geq 0$  și  $y(0) = 0$ , anume

$$y(t) = \alpha K (1 - e^{-t/T_1}), \quad t \geq 0. \quad (14)$$

Deoarece  $y(\infty) = \beta$  (din răspunsul experimental) și  $y(\infty) = \alpha K$  (din soluția (14)), rezultă  $K = \beta / \alpha$ . De asemenea, din (14) rezultă

$$y(3T_1) = \alpha K (1 - e^{-3}) \approx 0,95 \alpha K = 0,95 y(\infty) = y(T_{s95}),$$

deci  $T_{s95} \approx 3T_1$ .

În cazul sistemelor de reglare automată se realizează modelarea experimentală a părții fixate - formată din proces, element de execuție și traductor, deoarece operatorul uman nu are acces la mărimile de intrare și de ieșire ale procesului propriu-zis, ci la mărimile de intrare și de ieșire ale părții fixate.

**Modelarea mixtă** îmbină metodele și procedeele de tip analitic cu cele de tip experimental. O variantă de modelare mixtă este aceea în care forma modelului este determinată pe cale analitică, iar unii parametri necunoscuți sau cunoscuți cu un grad ridicat de incertitudine sunt determinați pe cale experimentală.

Metoda modelării mixte poate fi aplicată, de exemplu, amestecătorului cu scurgere liberă în regim turbulent din figura 2.3, cu modelul (8) determinat analitic. Dacă parametrii  $A$ ,  $\rho_1$  și  $\rho_2$  sunt cunoscuți cu precizie suficient de bună, în schimb parametrul  $\beta$  poate fi determinat cu precizie numai pe cale experimentală. Deoarece  $\beta$  intervine în ecuația  $Q = \beta \sqrt{h}$ , cea mai simplă cale de determinare experimentală a acestui parametru constă în stabilirea unui regim staționar, caracterizat prin nivelul  $h_0$  și debitele  $Q_{10}$  și  $Q_{20}$ . Valoarea parametrului  $\beta$  este dat de relația

$$\beta = \frac{Q_{10} + Q_{20}}{\sqrt{h_0}}.$$

## 2.2. SISTEME CONTINUE DE TIP I-E

Modelul dinamic de tip I-E al unui sistem continuu monovariabil de ordinul  $n$ , cu intrarea  $u$  și ieșirea  $y$ , are forma generală

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots, y, u^{(r)}, u^{(r-1)}, \dots, u, t), \quad (15)$$

unde  $f$  este o funcție continua de  $n+r+2$  variabile. La sistemele invariante (cu parametri constanți), funcția  $f$  nu depinde explicit de variabila timp  $t$ . Diferența  $n-r$  dintre ordinul maxim de derivare a ieșirii și ordinul maxim de derivare a intrării reprezintă *ordinul relativ* al sistemului. Ordinul relativ caracterizează *gradul de inerție* al sistemului.

În cazul unui sistem *liniar monovariabil cu parametri constanți, de ordinul  $n$* , modelul dinamic are *forma primară* (standard)

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b_r u^{(r)} + b_{r-1} u^{(r-1)} + \dots + b_1 u' + b_0 u, \quad (16)$$

unde  $a_i$  și  $b_i$  sunt coeficienți constanți ( $a_n \neq 0$ ,  $b_r \neq 0$ ). La sistemele cu *parametri variabili*, cel puțin un coeficient  $a_i$  sau  $b_i$  este variabil în timp. În modelul (16), variabila de intrare  $u$  și cea de ieșire  $y$  sunt de *tip original*, adică sunt nule pentru timp  $t < 0$ . Ipoteza variabilelor sistemice de tip original se justifică prin faptul că sistemul se află în regim staționar pentru  $t < 0$ , iar  $u$  și  $y$  reprezintă variațiile mărimilor fizice corespunzătoare față de valorile lor inițiale. Prin utilizarea variabilelor sistemice de tip original, modelele sistemelor liniare și graficele răspunsurilor acestora la diferite tipuri de intrări au o formă mai simplă.

Sistemele liniare pot fi *propriii* (cu  $r \leq n$ ) sau *improprii* (cu  $r > n$ ). Cele proprii pot fi *strict proprii* (cu  $r < n$ ) sau *simplu proprii* (cu  $r = n$ ).

Sistemele liniare improprii sunt cauzale, dar irealizabile fizic. Astfel, în cazul  $r = n+1$ , răspunsul sistemului la intrarea treaptă unitară  $u=1(t)$  - fig. 2.7, numit *răspuns indicial*, va conține componenta improprie

$$y_{impr}(t) = \frac{b_{n+1}}{a_n} \cdot \delta_0(t),$$

unde  $\delta_0(t)$  este funcția impuls Dirac (fig. 2.8). Funcția  $\delta_0(t)$  (irealizabilă fizic) acoperă o arie egală cu 1 și are valoarea infinită pe o durată de timp infinit mică:

$$\delta_0(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \delta_\tau(t), \quad \int_{0^-}^t \delta_0(\tau) d\tau = \int_{0^-}^{0^+} \delta_0(\tau) d\tau = 1, \quad t > 0.$$

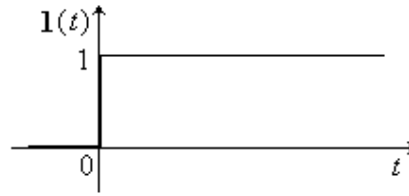
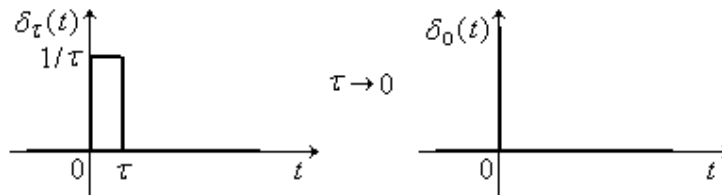


Fig. 2.7. Funcția tip treaptă unitară.

Fig. 2.8. Funcția impuls Dirac  $\delta_0(t)$ .

La *sistemele strict proprii*, transferul intrare-ieșire se realizează cu întârziere strictă, iar la *sistemele simplu proprii*, răspunsul sistemului la o intrare arbitrar dată conține o componentă care urmărește instantaneu variațiile intrării. Astfel, pentru  $r=n$ , răspunsul indicial conține componenta instantanee

$$y_{inst}(t) = \frac{b_n}{a_n} \cdot 1(t).$$

În cazul  $r = n = 0$ , când sistemul este simplu propriu de tip static (de ordinul zero, fără memorie), întregul răspuns urmărește instantaneu variațiile intrării.

Sistemele proprii sunt realizabile fizic. Uneori însă, pentru simplificarea formalismului matematic, în analiza și sinteza unor sisteme compuse pot fi utilizate și subsisteme improprii, dar numai în condițiile în care acestea sunt neutralizate de alte subsisteme învecinate (înseriate) strict proprii.

Prin anularea tuturor derivatelor intrării  $u$  și ieșirii  $y$ , din modelul dinamic (16) se obține *modelul staționar*

$$y = Ku, \quad (17)$$

cu factorul de proporționalitate  $K = b_0 / a_0$ . Dacă răspunsul indicial al sistemului tinde spre o valoare mărginită (sistemul este stabil), atunci deosebim două regimuri staționare: un regim staționar trivial pentru  $t < 0$  (în

care  $u = 0$  și  $y = 0$ ) și un regim staționar final pentru  $t \rightarrow \infty$  (în care  $u = 1$  și  $y = Ku = K$ ). Așadar, dacă răspunsul indicial este mărginit, atunci el are valoarea finală egală cu factorul static de proporționalitate, adică  $y(\infty) = K$ .

În cazul  $a_0 \neq 0$  și  $b_0 \neq 0$ , în care caracteristica statică  $y = Ku$  este o dreaptă oblică cu panta  $K$ , sistemul este de tip *proporțional*. Majoritatea sistemelor fizice sunt sisteme de tip proporțional. Traductoarele, de exemplu, sunt sisteme de tip proporțional.

În cazul  $a_0 = 0$  și  $b_0 \neq 0$ , în care caracteristica statică  $y = Ku$  este o dreaptă verticală (mai corect, nu există), sistemul este de tip *integral*. Sistemul pur integral are modelul  $a_1 \dot{y} = b_0 u$ , echivalent cu

$$y = \frac{b_0}{a_1} \int_0^t u dt.$$

Răspunsul indicial al unui sistem pur integral este de tip rampă (cu panta constantă pentru  $t \geq 0$ ). Sistemele de tip integral sunt sisteme cu *caracter persistent*, deoarece ieșirea  $y$  se stabilizează numai atunci când intrarea  $u$  este nulă. De regulă, răspunsul indicial al unui sistem integral tinde asimptotic la o dreaptă oblică, fiind de tip “rampă întârziată”. Un condensator electric ideal cu capacitatea  $C$ , având ca intrare curentul  $i$  și ca ieșire tensiunea  $u$ , este un sistem pur integral deoarece

$$u = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_0, \quad \Delta u = \frac{1}{C} \int_0^t \Delta i dt.$$

Un rezervor cu aria transversală constantă  $A$ , având ca intrări debitul volumic de lichid admis  $Q_1$  și debitul volumic de lichid evacuat  $Q_2$ , iar ca ieșire nivelul  $h$ , are ambele canale  $Q_1 \rightarrow h$  și  $Q_2 \rightarrow h$  de tip pur integral:

$$h = \frac{1}{A} \int_0^t (Q_1 - Q_2) dt + h_0, \quad \Delta h = \frac{1}{A} \int_0^t (\Delta Q_1 - \Delta Q_2) dt.$$

În cazul  $a_0 \neq 0$  și  $b_0 = 0$ , în care caracteristica statică  $y = Ku$  este o dreaptă orizontală (cu panta  $K$  nulă), sistemul este de tip *derivativ*. Un sistem de tip derivativ are modelul staționar  $y = 0$ . Deoarece variabila de ieșire  $y$  are valoarea nulă în regim staționar, răspunsul indicial mărginit al unui sistem derivativ se stabilizează la valoarea 0. Datorită formei de impuls a răspunsului indicial (care are valoarea inițială 0 și se stabilizează la valoarea 0), sistemele de tip derivativ sunt sisteme cu *caracter anticipativ*. Modelul

$$y = \frac{b_1}{a_0} \cdot \frac{du}{dt} \quad (18)$$

caracterizează cel mai simplu *sistem derivativ impropriu*, iar modelul

$$a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_1 \frac{du}{dt} \quad (19)$$

caracterizează cel mai simplu *sistem derivativ simplu propriu*. Un condensator electric ideal cu capacitatea  $C$ , având ca intrare tensiunea  $u$  și ca ieșire curentul  $i$ , este un sistem pur derivativ, cu modelul impropriu

$$i = C \frac{du}{dt}.$$

Un circuit serie de tip RC, având ca intrare tensiunea aplicată  $u$  și ca ieșire curentul  $i$ , este un sistem derivativ simplu propriu, cu modelul

$$RC \frac{di}{dt} + i = C \frac{du}{dt}.$$

Principalul neajuns al modelului primar (16) îl constituie prezența derivatelor mărimii de intrare  $u$ . Deoarece prima derivată a intrării tip treaptă unitară este impulsul Dirac, modelul primar cu  $r \geq 1$  nu poate fi utilizat pentru calculul elementar al răspunsului indicial.

Modelul I-E al unui sistem liniar de ordinul  $n$ , cu o singură ieșire și  $m$  intrări, are forma

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = \sum_{i=1}^m [b_{ri} u_i^{(r_i)} + \dots + b_{li} \dot{u}_i + b_{0i} u_i]. \quad (20)$$

Dacă sistemul are  $m$  intrări și  $p$  ieșiri, atunci modelul conține  $m \cdot p$  ecuații de forma primară (16) - câte una pentru fiecare canal monovariabil care leagă o ieșire de o intrare, sau numai  $p$  ecuații de forma (20) - câte una pentru fiecare ieșire.

Modelul primar (16) de tip I-E este echivalent cu următorul *model secundar*, care nu conține derivate ale variabilei de intrare  $u$ :

$$\begin{cases} a_n w^{(n)} + a_{n-1} w^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{w} + a_0 w = u \\ y = b_r w^{(r)} + \dots + b_1 \dot{w} + b_0 w \end{cases} \quad (21)$$

Echivalența celor două modele poate fi demonstrată pur matematic sau, mai simplu, pe baza *principiului superpoziției*. Din modelul primar (16) rezultă că ieșirea  $y$  este efectul sumei celor  $r + 1$  cauze de forma  $b_i u^{(i)}$  din dreapta semnului egal. Pe de altă parte, din prima ecuație a modelului secundar (21) rezultă că  $w$  este efectul cauzei primare  $u$ . Conform principiului superpoziției, efectul sumei cauzelor este egal cu suma efectelor cauzelor, iar în consecință, unei cauze multiplicat și derivate îi va corespunde un efect multiplicat și derivat. Astfel, cauzei  $b_i u^{(i)}$  îi va corespunde efectul  $b_i w^{(i)}$ , iar efectul  $y$  al sumei celor  $r + 1$  cauze de forma  $b_i u^{(i)}$  este egal cu suma efectelor  $b_i w^{(i)}$ . Acest rezultat este exprimat de a doua ecuație a modelului secundar (21). Strict matematic, se poate verifica faptul că prin înlocuirea în modelul primar (16) a variabilelor  $u$  și  $y$  date de modelul secundar (21) se obține o identitate.

Deoarece nu conține derivate ale mărimii de intrare  $u$ , modelul secundar poate fi utilizat și pentru *intrări nederivabile* sau chiar *discontinue*, cum este cazul funcției de intrare tip treaptă unitară  $u = 1(t)$ .

O a treia formă de reprezentare matematică de tip I-E în domeniul timpului a sistemelor continue liniare, monovariabile și cu parametri constanți este *modelul de convoluție*

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau, \quad (22)$$

unde  $g(t)$  este așa numita *funcție pondere*, reprezentând răspunsul sistemului la funcția de intrare impuls Dirac  $u = \delta_0(t)$ . Modelul de convoluție poate fi dedus pe baza următoarei consecințe a principiului superpoziției: *dacă între două cauze există o anumită corelație, atunci aceeași formă de corelație se păstrează și între efecte*. În cazul nostru, forma (22) a modelului de convoluție rezultă din faptul că între cauzele reprezentate de intrarea particulară  $\delta_0(t)$  și intrarea arbitrară  $u(t)$  există relația

$$u(t) = \int_0^t \delta_0(t-\tau)u(\tau)d\tau.$$

Funcția pondere  $g(t)$  poate fi obținută din *funcția indicială*  $h(t)$ , definită ca fiind răspunsul sistemului la intrarea treaptă unitară  $u = 1(t)$ , cu relația

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt}, \quad (23)$$

care rezultă din principiul superpoziției, ținând seama de relația între cauze

$$\delta_0(\tau) = \frac{d1(t)}{dt}.$$

Modelul de convoluție (22) are o mare importanță teoretică, deoarece *sugerează* posibilitatea existenței unei forme simple a modelului dinamic, similară celei a modelului staționar  $y = Ku$ , prin transformarea produsului de convoluție într-un produs algebric. Astfel, prin aplicarea transformării Laplace ambilor membri ai modelului de convoluție (22), se obține modelul *operațional* (complex)

$$Y(s) = G(s)U(s), \quad (24)$$

în care  $U(s)$ ,  $Y(s)$  și  $G(s)$  sunt respectiv transformatele Laplace ale funcțiilor de tip original  $u(t)$ ,  $y(t)$  și  $g(t)$ . Funcția de variabilă complexă  $G(s)$  se numește *funcție de transfer*.

Datorită formei sale simple, modelul operațional este cel mai frecvent utilizat în studiul sistemelor liniare continue. Funcția pondere  $g(t)$  și funcția de transfer  $G(s)$  înglobează toate proprietățile și caracteristicile dinamice ale sistemului, fiind deci echivalentele parametrilor  $a_i$  și  $b_i$  din componența modelului primar (16) și modelului secundar (21).

### 2.3. SISTEME DISCRETE DE TIP I-E

Modelul dinamic de tip I-E al unui sistem discret monovariabil, cu perioada de discretizare a timpului egală cu 1, are forma *ecuației cu diferențe*

$$y(t) = f(y(t-1), y(t-2), \dots, y(t-n), u(t), u(t-1), \dots, u(t-r), t), \quad (25)$$

în care variabila timp  $t$  ia valori în mulțimea numerelor întregi ( $t \in \mathbf{Z}$ ), fiind un multiplu al perioadei de discretizare a timpului  $T=1$ . La sistemele cu parametri constanți, funcția  $f$  nu depinde explicit de variabila  $t$ .

Dacă sistemul este *liniar* și *cu parametri constanți*, modelul dinamic are *forma primară* (standard)

$$a_0 y(t) + a_1 y(t-1) + \dots + a_n y(t-n) = b_0 u(t) + b_1 u(t-1) + \dots + b_r u(t-r), \quad (26)$$



unde  $a_i$  și  $b_i$  sunt coeficienți constanți ( $a_0 \neq 0$ ), iar variabilele  $u$  și  $y$  sunt de tip original. Sistemul discret cu modelul (26) are *ordinul* egal cu  $\max\{n,r\}$  și este *propriu* (*strict propriu* dacă  $b_0=0$  și *simplu propriu* dacă  $b_0 \neq 0$ ). La sistemele simplu proprii, răspunsul la intrarea  $u(t)$  conține *componenta instantanee*

$$y_{inst}(t) = \frac{b_0}{a_0} \cdot u(t).$$

Răspunsul sistemului la intrarea treaptă unitară  $u(t)=1^0(t)$  (fig. 2.9) se numește răspuns indicial.



Fig. 2.9. Funcția discretă tip treaptă unitară.

În regim staționar, când variabilele de intrare și de ieșire au valori constante la toate momentele de timp, din modelul dinamic (26) obținem modelul staționar

$$y=Ku , \quad (27)$$

cu factorul static de proporționalitate

$$K = \frac{b_0 + b_1 + \dots + b_r}{a_0 + a_1 + \dots + a_n} . \quad (28)$$

În cazul  $K$  finit și nenul ( $a_0 + a_1 + \dots + a_n \neq 0$  și  $b_0 + b_1 + \dots + b_r \neq 0$ ), caracteristica statică este o dreaptă oblică, iar sistemul este de *tip proporțional*.

În cazul  $a_0 + a_1 + \dots + a_n = 0$  și  $b_0 + b_1 + \dots + b_r \neq 0$ , caracteristica statică este o dreaptă verticală (mai corect, sistemul nu are caracteristică statică), iar sistemul este de *tip integral*. Sistemul *pur integral* are modelul

$$y(t) - y(t-1) = b_0 u(t) . \quad (29)$$

În cazul  $K=0$  ( $a_0 + a_1 + \dots + a_n \neq 0$  și  $b_0 + b_1 + \dots + b_r = 0$ ), caracteristica statică coincide cu axa absciselor, iar sistemul este de *tip derivativ*. Sistemul *derivativ* cu  $n=r=1$  are modelul

$$a_0y(t)+a_1y(t-1)=u(t)-u(t-1). \quad (30)$$

Prin înlocuirea variabilei  $t$  cu variabila  $k \in \mathbf{Z}$ , modelul primar (26) poate fi scris astfel:

$$a_0y_k+a_1y_{k-1}+\dots+a_ny_{k-n}=b_0u_k+b_1u_{k-1}+\dots+b_ru_{k-r}. \quad (31)$$

În conformitate cu principiul superpoziției, modelul primar (26) poate fi scris sub *forma secundară* echivalentă

$$\begin{cases} a_0w(t)+a_1w(t-1)+\dots+a_nw(t-n)=u(t) \\ y(t)=b_0w(t)+b_1w(t-1)+\dots+b_rw(t-r) \end{cases}. \quad (32)$$

Deoarece ecuația cu diferențe a modelului secundar (32) are membrul drept mult mai simplu decât modelul primar (26), modelul secundar este preferat în calculul analitic al răspunsului sistemului la o intrare dată de tip original (nulă pentru  $t < 0$ ).

O a treia formă de reprezentare matematică în domeniul timpului a sistemelor discrete liniare monovariabile este *modelul de convoluție*

$$y(t)=\sum_{i=0}^t g(t-i)u(i), \quad (33)$$

unde  $g(t)$  este *funcția pondere*, egală cu răspunsul sistemului la funcția de intrare tip impuls unitar  $u=\delta^0(t)$  - figura 2.10. Modelul de convoluție poate fi dedus pe baza principiului superpoziției, în mod direct sau indirect, ținând seama că între cauzele  $\delta^0(t)$  și  $u(t)$  există relația

$$u(t)=\sum_{i=0}^t \delta^0(t-i)u(i).$$

Între funcția pondere  $g(t)$  și funcția indicială  $h(t)$  există relațiile

$$g(t)=h(t)-h(t-1), \quad h(t)=g(0)+g(1)+\dots+g(t). \quad (34)$$

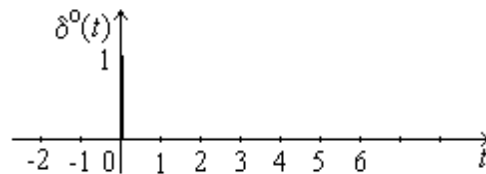


Fig. 2.10. Funcția discretă tip impuls unitar.

Aceste relații sunt consecințe ale principiului superpoziției și relațiilor între cauze

$$\delta^0(t)=1^0(t)-1^0(t-1), \quad 1^0(t)=\delta^0(t)+\delta^0(t-1)+\dots+\delta^0(0).$$

Din modelul de convoluție (33), prin aplicarea transformării  $Z$ , se obține modelul *operațional* (complex)

$$Y(z)=G(z)U(z), \quad (35)$$

în care  $U(z)$ ,  $Y(z)$  și  $G(z)$  sunt respectiv transformatele  $Z$  ale funcțiilor de tip original  $u(t)$ ,  $y(t)$  și  $g(t)$ . Modelul dinamic operațional (35) are aceeași formă simplă ca cea a modelului staționar (27) și a modelului operațional (24) al sistemelor continue.

## 2.4. SISTEME CONTINUE DE TIP I-S-E

Modelul general I-S-E al unui *sistem cu timp continuu*, multivariabil și cu parametri concentrați are următoarea formă:

$$\begin{cases} \dot{X}(t)=f(t,X(t),U(t)) \\ Y(t)=g(t,X(t),U(t)) \end{cases}, \quad (36)$$

în care  $U(t):\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}^m$  este funcția de intrare,  $X(t):\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}^n$  este funcția de stare și  $Y(t):\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}^p$  este funcția de ieșire.

La sistemele continue (netede), funcțiile  $f$  și  $g$  sunt continue în raport cu  $X$  și  $U$ , iar la sistemele discontinue, cel puțin una dintre funcțiile  $f$  și  $g$  este discontinuă în raport cu  $X$  sau  $U$ .

Prima ecuație a modelului (36) este *ecuația diferențială a stării*, iar cea de-a doua - *ecuația algebrică a ieșirii*. Datorită formei ecuației stării (în care starea  $X$  apare derivată, iar intrarea  $U$  nederivată), starea  $X$  urmărește variațiile intrării  $U$  cu întârziere strictă.

La sistemele *cu parametri constanți*, funcțiile  $f$  și  $g$  nu depind explicit de variabila timp  $t$ , adică au forma  $f(X(t),U(t))$ , respectiv  $g(X(t),U(t))$ .

Sistemele descrise prin modele I-S-E sunt *sisteme proprii*. Dacă ieșirea  $Y$  nu depinde direct de intrarea  $U$ , adică funcția  $g$  este de forma  $g(t,X(t))$ ,

atunci sistemul este *strict propriu*. La sistemele strict proprii, transferul intrare-ieșire este realizat în totalitate prin intermediul stării; în consecință, ieșirea este *strict întârziată* în raport cu intrarea, în sensul că nu conține o componentă care să urmărească instantaneu variațiile intrării. Dacă în ecuația ieșirii apare și funcția de intrare  $U(t)$ , atunci sistemul este *simplu propriu*. La sistemele simplu proprii, ieșirea conține o componentă care urmărește instantaneu variațiile intrării.

Un sistem continuu *liniar* are modelul sub forma

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \\ Y(t) = CX(t) + DU(t) \end{cases}, \quad (37)$$

unde  $A(n \times n)$  este matricea *pătrată* a parametrilor de stare,  $B(n \times m)$ -matricea parametrilor de intrare,  $C(p \times n)$ - matricea parametrilor de ieșire și  $D(p \times m)$ - matricea parametrilor de transmisie directă intrare-ieșire. La sistemele cu parametri constanți, matricele  $A$ ,  $B$ ,  $C$  și  $D$  sunt constante, iar la sistemele cu parametri variabili, cel puțin una dintre acestea este funcție de  $t$ . În cazul  $D=0$ , sistemul este *strict propriu*.

Ecuațiile (37) pot fi scrise explicit (pe componente) astfel :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & & b_{1m} \\ & \ddots & \\ b_{n1} & & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & & c_{1n} \\ & \ddots & \\ c_{p1} & & c_{pn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & & d_{1m} \\ & \ddots & \\ d_{p1} & & d_{pm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}.$$

Prin convenție, ca și la sistemele liniare de tip I-E, variabilele de intrare, de stare și de ieșire reprezintă *variațiile* mărimilor fizice respective față de valorile lor inițiale.

La sistemele monovariabile (cu o singură intrare și o singură ieșire),  $B$  este matrice coloană,  $C$  este matrice linie, iar  $D$  este scalar:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u,$$

$$y = [c_1 \ \cdots \ c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + du.$$

Sub formă scalară, modelul unui sistem monovariabil are forma

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1u \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_nu \end{cases}$$

$$y_1 = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + du.$$

De remarcat faptul că forma I-S-E de reprezentare matematică a unui sistem nu este unică. Această observație este confirmată și de faptul că sistemele liniare monovariabile, de ordinul  $n$  și de tip I-S-E au  $(n+1)^2$  parametri scalari, în timp ce sistemele proprii de tip I-E au cel mult  $2n+1$  parametri scalari independenți.

## 2.5. SISTEME DISCRETE DE TIP I-S-E

Modelul I-S-E al unui *sistem discret* are forma

$$\begin{cases} X(t+1) = f(t, X(t), U(t)) \\ Y(t) = g(t, X(t), U(t)) \end{cases}, \quad (38)$$

unde  $U(t): \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}^m$ ,  $X(t): \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,  $Y(t): \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}^p$ , iar  $f$  și  $g$  au aceeași semnificație ca la modelul (36) al unui sistem continuu. Variabila  $t$  ia valori în mulțimea numerelor întregi ( $t \in \mathcal{Z}$ ), perioada  $T$  de discretizare a timpului fiind egală cu 1. Sistemele discrete de tip I-S-E, ca și cele continue, sunt sisteme proprii. Dacă ieșirea  $Y$  nu depinde direct de intrarea  $U$ , adică funcția  $g$  este de forma  $g(t, X(t))$ , atunci sistemul este *strict propriu*.

Sistemele *discrete liniare* și *cu parametri constanți* au modelul I-S-E de forma

$$\begin{cases} X(t+1)=AX(t)+BU(t) \\ Y(t)=CX(t)+DU(t) \end{cases}, \quad (39)$$

unde  $A$ ,  $B$ ,  $C$  și  $D$  sunt matrice constante cu aceleași dimensiuni ca la sistemele continue. In cazul  $D=0$ , sistemul este *strict propriu*. Modelul (39) poate fi scris și sub forma

$$\begin{cases} X_{k+1}=AX_k+BU_k \\ Y_k=CX_k+DU_k \end{cases}, \quad k \in \mathbf{Z}. \quad (40)$$

## 2.6. CONVERSIA SISTEMELOR LINIARE

In acest capitol este abordată problema conversiei unui sistem liniar din forma intrare-ieșire (I-E) în forma intrare-stare-ieșire (I-S-E), și invers. Sistemul inițial și sistemul obținut prin conversie sunt *echivalente intrare-ieșire*, adică au același răspuns pentru orice funcție de intrare comună de tip original (nulă pentru  $t < 0$ ).

### 2.6.1. Conversia unui sistem continuu de tip I-E în sistem I-S-E

Considerăm sistemul liniar monovariabil *continuu* de ordinul  $n$ , cu modelul intrare-ieșire

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = b_n u^{(n)} + \dots + b_1\dot{u} + b_0u.$$

Din forma secundară a modelului sistemului,

$$\begin{cases} w^{(n)} + a_{n-1}w^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{w} + a_0w = u \\ y = b_n w^{(n)} + b_{n-1}w^{(n-1)} + \dots + b_1\dot{w} + b_0w \end{cases},$$

alegând variabilele de stare

$$x_1 = w, \quad x_2 = \dot{w}, \quad \dots, \quad x_n = w^{(n-1)} \quad (41)$$

și ținând seama că

$$\begin{aligned} w^{(n)} &= -a_0 w - a_1 \dot{w} - \dots - a_{n-1} w^{(n-1)} + u \\ &= -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \dots - a_{n-1} x_n + u, \end{aligned}$$

obținem următorul model I-S-E:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \dots - a_{n-1} x_n + u \end{cases}, \quad (42)$$

$$y = (b_0 - b_n a_0) x_1 + (b_1 - b_n a_1) x_2 + \dots + (b_{n-1} - b_n a_{n-1}) x_n + b_n u, \quad (43)$$

cu parametrii matriceali

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C = [b_0 - b_n a_0 \quad b_1 - b_n a_1 \quad \dots \quad b_{n-1} - b_n a_{n-1}], \quad D = b_n.$$

Ecuția ieșirii rezultă din a doua ecuație a modelului secundar, astfel:

$$\begin{aligned} y &= b_n w^{(n)} + b_{n-1} w^{(n-1)} + \dots + b_1 \dot{w} + b_0 w = b_n \dot{x}_n + b_{n-1} x_n + \dots + b_1 x_2 + b_0 x_1 \\ &= b_n (-a_0 x_1 - a_1 x_2 - \dots - a_{n-1} x_n + u) + b_{n-1} x_n + \dots + b_1 x_2 + b_0 x_1. \end{aligned}$$

La sistemele simplu proprii (cu  $b_n \neq 0$ ), din ecuația ieșirii (43) reiese că ieșirea  $y$  conține componenta  $b_n u$  care urmărește instantaneu variațiile intrării  $u$ . La sistemele strict propriu (cu  $b_n = 0$ ), ieșirea depinde de intrare numai prin intermediul variabilelor de stare:

$$y = b_0 x_1 + b_1 x_2 + \dots + b_{n-1} x_n. \quad (44)$$

Forma de reprezentare I-S-E a unui sistem nu este unică. Atunci când fiecare dintre variabilele de stare  $x_2, x_3, \dots, x_n$  sunt derivatele variabilelor de stare precedente - cazul reprezentării (42), variabilele de stare se numesc *variabile de fază*.

### 2.6.2. Conversia unui sistem discret de tip I-E în sistem I-S-E

Considerăm sistemul liniar monovariabil *discret* de ordinul  $n$ , cu  $r = n$ , având modelul intrare-ieșire

$$y(t) + a_1 y(t-1) + \dots + a_n y(t-n) = b_0 u(t) + b_1 u(t-1) + \dots + b_n u(t-n).$$

Din forma secundară a modelului sistemului,

$$\begin{cases} w(t) + a_1 w(t-1) + \dots + a_n w(t-n) = u(t) \\ y(t) = b_0 w(t) + b_1 w(t-1) + \dots + b_n w(t-n) \end{cases},$$

alegând variabilele de stare

$$x_1(t) = w(t-1), \quad x_2(t) = w(t-2), \quad \dots, \quad x_n(t) = w(t-n) \quad (45)$$

și ținând seama că

$$\begin{aligned} w(t) &= -a_1 w(t-1) - a_2 w(t-2) - \dots - a_n w(t-n) + u(t) \\ &= -a_1 x_1(t) - a_2 x_2(t) - \dots - a_n x_n(t) + u(t), \end{aligned}$$

obținem următorul model I-S-E:

$$\begin{cases} x_1(t+1) = -a_1 x_1(t) - \dots - a_n x_n(t) + u(t) \\ x_2(t+1) = x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t+1) = x_{n-1}(t) \end{cases} \quad (46)$$

$$y(t) = (b_1 - b_0 a_1) x_1(t) + (b_2 - b_0 a_2) x_2(t) + \dots + (b_n - b_0 a_n) x_n(t) + b_0 u(t).$$

La sistemele strict proprii (cu  $b_0 = 0$ ), ecuația ieșirii are forma:

$$y(t) = b_1 x_1(t) + b_2 x_2(t) + \dots + b_n x_n(t). \quad (47)$$

Să considerăm acum un sistem strict propriu ( $b_0 = 0$ ) cu  $r > n$ , având modelul intrare-ieșire

$$y(t) + a_1 y(t-1) + \dots + a_n y(t-n) = b_1 u(t-1) + b_2 u(t-2) + \dots + b_r u(t-r), \quad r > n.$$

Din forma secundară a modelului sistemului,



$$\begin{cases} w(t) + a_1 w(t-1) + \dots + a_n w(t-n) = u(t) \\ y(t) = b_1 w(t-1) + b_2 w(t-2) + \dots + b_r w(t-r) \end{cases}$$

alegând variabilele de stare

$$x_1(t) = w(t-1), \quad x_2(t) = w(t-2), \quad \dots, \quad x_r(t) = w(t-r), \quad (48)$$

obținem modelul I-S-E de ordinul  $r$ :

$$\begin{cases} x_1(t+1) = -a_1 x_1(t) - \dots - a_n x_n(t) + u(t) \\ x_2(t+1) = x_1(t) \\ \vdots \\ x_r(t+1) = x_{r-1}(t) \end{cases}, \quad (49)$$

$$y(t) = b_1 x_1(t) + b_2 x_2(t) + \dots + b_r x_r(t).$$

Dacă sistemul este simplu propriu ( $b_0 \neq 0$ ), ecuația stării rămâne neschimbată, iar ecuația ieșirii are forma

$$y(t) = (b_1 - b_0 a_1) x_1(t) + (b_2 - b_0 a_2) x_2(t) + \dots + (b_r - b_0 a_r) x_r(t) + b_0 u(t),$$

cu coeficienții  $a_i = 0$  pentru  $i > n$ .

### 2.6.3. Conversia unui sistem continuu de tip I-S-E în sistem I-E

Din modelul I-S-E al unui sistem liniar *continuu*, cu parametri constanți și de ordinul  $n$ ,

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \\ Y(t) = CX(t) + DU(t) \end{cases}$$

putem obține modelul primar de tip I-E prin eliminarea funcției vectoriale de stare  $X(t)$  și a derivatei  $\dot{X}(t)$ . Operația de eliminare se face prin derivarea succesivă a ecuației ieșirii și înlocuirea derivatei  $\dot{X}(t)$  cu  $AX(t) + BU(t)$ .

În cazul unui sistem cu o singură ieșire  $y(t)$ , prin derivarea succesivă de  $n$  ori a ecuației ieșirii, obținem

$$\begin{aligned} y &= CX + DU, \\ \dot{y} &= CAX + CBU + D\dot{U}, \end{aligned}$$

$$\ddot{y} = CA^2X + C(ABU + B\dot{U}) + D\ddot{U}, \quad (50)$$

$$y^{(n)} = CA^nX + C \sum_{i=0}^{n-1} A^{n-i-1} BU^{(i)} + DU^{(n)}.$$

Din aceste  $n+1$  ecuații, prin eliminarea celor  $n$  variabile de stare din componența vectorului  $X$ , se obține modelul I-E. În cazul în care matricea pătrată (de observabilitate)

$$Q_n = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (51)$$

este nesingulară (are determinantul nenul), din primele  $n$  ecuații (50) rezultă în mod unic  $X$ , iar prin înlocuirea acestuia în ultima ecuație (50) obținem modelul I-E de ordinul  $n$ . Dacă matricea  $Q_n$  este singulară, atunci ordinul modelului I-E este mai mic decât  $n$ .

#### 2.6.4. Conversia unui sistem discret de tip I-S-E în sistem I-E

Din modelul I-S-E al unui sistem liniar *discret* de ordinul  $n$ ,

$$\begin{cases} X_{k+1} = AX_k + U_k \\ Y_k = CX_k + DU_k \end{cases},$$

putem obține modelul I-E al sistemului prin eliminarea funcției vectoriale de stare. Astfel, în cazul unui sistem cu o singură ieșire  $y$ , prin iterarea ecuației ieșirii pentru valori crescătoare ale lui  $k$  și înlocuirea la fiecare iterație a lui  $X_{k+1}$  cu  $AX_k + U_k$ , obținem

$$y_{k+j} = CA^j X_k + \sum_{i=0}^{j-1} CA^{j-i-1} BU_{k+i} + DU_{k+j}, \quad j = \overline{0, n}. \quad (52)$$

Din aceste  $n+1$  ecuații, prin eliminarea celor  $n$  variabile de stare din componența vectorului  $X_k$ , se obține modelul I-E cu valorile

$y_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+n}$  ale variabilei de ieșire. Pentru ca modelul să aibă forma standard (31), se înlocuiește  $k$  cu  $k-n$ . La fel ca la sistemele continue, dacă matricea  $Q_n$  cu expresia (51) este nesingulară, atunci modelul I-E rezultă de ordinul  $n$ . În cazul contrar, ordinul modelului I-E este mai mic decât  $n$ .

## 2.7. APLICAȚII REZOLVATE

◆ **Aplicația 2.1.** Considerăm circuitul electric din fig. 2.11. Să se afle:

- modelul I-E pentru  $u_1$  intrare și  $u_C$  ieșire;
- modelul I-E pentru  $u_1$  intrare și  $u_L$  ieșire;
- modelul I-S-E pentru  $u_1$  intrare,  $u_C$  ieșire și  $x_1 = u_C$  și  $x_2 = u_R$ ;
- modelul I-S-E pentru  $u_1$  intrare,  $u_L$  și  $u_C$  ieșiri,  $x_1 = u_C$  și  $x_2 = u_R$ .

Să se arate că:

- tensiunile  $u_L$  și  $u_C$  nu pot fi variabile de stare;
- tensiunile  $u_R$  și  $u_L$  nu pot fi variabile de stare.

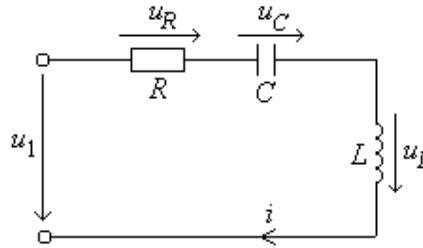


Fig. 2.11. Circuit tip RLC.

**Soluție.** Avem :

$$u_R = Ri, \quad u_L = L \frac{di}{dt}, \quad i = C \frac{du_C}{dt}, \quad (53)$$

$$u_1 = u_R + u_C + u_L. \quad (54)$$

a) Din relațiile (53), rezultă

$$u_R = RC \frac{du_C}{dt}, \quad u_L = LC \frac{d^2u_C}{dt^2}.$$

Înlocuind pe  $u_R$  și  $u_L$  în relația (54), obținem modelul intrare-ieșire

$$T_2^2 \frac{d^2u_C}{dt^2} + T_1 \frac{du_C}{dt} + u_C = u_1, \quad (55)$$

unde constantele de timp  $T_1$  și  $T_2$  au expresiile

$$T_1 = RC, \quad T_2 = \sqrt{LC}. \quad (56)$$

Sistemul este liniar, continuu, de ordinul doi, cu parametri constanți.

b) Din relațiile (53), rezultă

$$\dot{u}_R = \frac{R}{L} u_L, \quad \ddot{u}_R = \frac{R}{L} \dot{u}_L, \quad \ddot{u}_C = \frac{1}{LC} u_L.$$

Derivând de două ori relația (54) și înlocuind apoi pe  $\dot{u}_R$  și  $\ddot{u}_C$  în funcție de  $u_L$ , obținem modelul intrare-ieșire

$$\ddot{u}_L + \frac{R}{L} \dot{u}_L + \frac{1}{LC} u_L = \ddot{u}_1,$$

care poate fi scris sub forma

$$T_2^2 \ddot{u}_L + T_1 \dot{u}_L + u_L = T_2^2 \ddot{u}_1. \quad (57)$$

Mai putem obține ecuația (57) prin derivarea de două ori a ecuației (55) și utilizarea relației  $\ddot{u}_C = \frac{1}{LC} u_L$ .

c) Din relațiile

$$\dot{u}_C = \frac{1}{RC} u_R, \quad \dot{u}_R = \frac{R}{L} u_L = \frac{R}{L} (-u_C - u_R + u_1),$$

rezultă

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{RC} x_2, \quad \dot{x}_2 = \frac{R}{L} (-x_1 - x_2 + u_1).$$

Cu notațiile  $p = \frac{1}{TC}$  și  $q = \frac{R}{L}$ , modelul I-S-E devine astfel :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & p \\ -q & -q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ q \end{bmatrix} u_1, \quad u_C = x_1. \quad (58)$$

Rezultă

$$A = \begin{bmatrix} 0 & p \\ -q & -q \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ q \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0], \quad D = 0. \quad (59)$$

d) Ținând seama de (58) și de relația

$$u_L = -x_1 - x_2 + u_1,$$

modelul I-S-E cerut are forma

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & p \\ -q & -q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ q \end{bmatrix} u_1, \quad \begin{bmatrix} u_C \\ u_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_1, \quad (60)$$

deci

$$A = \begin{bmatrix} 0 & p \\ -q & -q \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ q \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (61)$$

e) Pentru  $x_1 = u_C$  și  $x_2 = u_L$ , din relațiile (53) și (54) rezultă

$$x_2 = L \frac{di}{dt}, \quad i = C \frac{dx_1}{dt}, \quad u_1 = Ri + x_1 + x_2.$$

Prin eliminarea variabilei  $i$ , obținem

$$T_1 T_2 \ddot{x}_1 = x_2, \quad u_1 = T_1 \dot{x}_1 + x_1 + x_2,$$

unde  $T_1 = RC$ ,  $T_2 = \sqrt{LC}$ . Din aceste relații obținem ecuațiile de stare

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{T_1}(-x_1 - x_2 + u_1), \quad \dot{x}_2 = \frac{1}{T_1}x_1 + \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)x_2 + \dot{u}_1 - \frac{1}{T_1}u_1.$$

A doua ecuație de stare nu se încadrează în forma generală admisă, datorită prezenței derivatei  $\dot{u}_1$  a mărimii de intrare.

f) Pentru  $x_1 = u_R$  și  $x_2 = u_L$ , din relațiile (53) și (54) rezultă

$$x_1 = Ri, \quad x_2 = L \frac{di}{dt}, \quad \frac{du_1}{dt} = \frac{dx_1}{dt} + \frac{i}{C} + \frac{dx_2}{dt}.$$

Prin eliminarea variabilei  $i$ , obținem ecuațiile de stare

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{T_1}x_2, \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{T_1}x_1 - \frac{1}{T_2}x_2 + \dot{u}_1.$$

Ca și în cazul anterior, cea de-a doua ecuație de stare nu se încadrează în forma generală admisă (datorită prezenței derivatei  $\dot{u}_1$  a mărimii de intrare).

♦ **Aplicația 2.2.** Fie circuitul electric din figura 2.12, având ca intrări tensiunile  $u_1$  și  $u_2$ , iar ca ieșire tensiunea  $v_1$ . Să se afle:

- modelul I-E;
- modelul I-S-E, cu variabila de stare  $v_1$ .

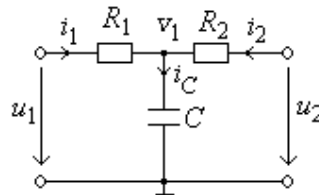


Fig. 2.12. Circuit tip RC.

**Soluție.** a) Din

$$i_1 + i_2 = i_C,$$

rezultă

$$\frac{u_1 - v_1}{R_1} + \frac{u_2 - v_1}{R_2} = C \frac{dv_1}{dt},$$

deci

$$C \frac{dv_1}{dt} + \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) v_1 = \frac{u_1}{R_1} + \frac{u_2}{R_2}. \quad (62)$$

Modelul I-E poate fi scris sub forma

$$T_1 \frac{dv_1}{dt} + v_1 = k_1 u_1 + k_2 u_2, \quad (63)$$

unde

$$T_1 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C,$$

$$k_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad k_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

Sistemul este liniar, continuu, de ordinul unu, cu parametri constanți.

b) Pentru  $x_1 = v_1$ , obținem modelul I-S-E

$$\begin{cases} T_1 \dot{x}_1 = -x_1 + k_1 u_1 + k_2 u_2 \\ v_1 = x_1 \end{cases}, \quad (64)$$

cu

$$A = \frac{-1}{T_1}, \quad B = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ T_1 & T_1 \end{bmatrix},$$

$$C = 1, \quad D = [0 \quad 0].$$

◆ **Aplicația 2.3.** Fie circuitul electric din figura 2.13, având ca intrări tensiunile  $u_1$  și  $u_2$ , iar ca ieșiri tensiunile  $v_1$  și  $v_2$ . Să se afle:

- modelul I-E;
- modelul I-S-E cu variabilele de stare  $v_1$  și  $v_2$ .

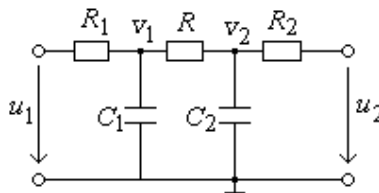


Fig. 2.13. Circuit multivariabil tip RC.

**Soluție.** a) Sistemul poate fi descompus în două subsisteme interconectate  $S_1$  și  $S_2$  (fig. 2.14), având fiecare aceeași structură ca sistemul din fig. 2.12.

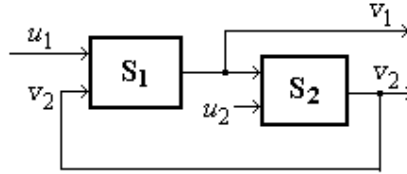


Fig. 2.14. Circuit multivariabil tip RC descompus.

În conformitate cu (62), avem

$$\begin{cases} C_1 \dot{v}_1 = -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R}\right)v_1 + \frac{u_1}{R_1} + \frac{v_2}{R} \\ C_2 \dot{v}_2 = -\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_2}\right)v_2 + \frac{v_1}{R} + \frac{u_2}{R_2} \end{cases} \quad (65)$$

Prin eliminarea variabilei  $v_2$  între cele două ecuații (se înlocuiește  $v_2$  din prima ecuație în a doua), obținem ecuația ieșirii  $v_1$ :

$$T_1 T_2 \ddot{v}_1 + (k_1 T_2 + k_2 T_1) \dot{v}_1 + (k_1 + k_2 - 1)v_1 = T_2 \dot{u}_1 + k_2 u_1 + (k_1 - 1)u_2, \quad (66)$$

în care

$$k_1 = 1 + \frac{R_1}{R}, \quad k_2 = 1 + \frac{R_2}{R}, \\ T_1 = R_1 C_1, \quad T_2 = R_2 C_2.$$

În mod similar, prin eliminarea variabilei  $v_1$  între cele două ecuații (65), obținem ecuația ieșirii  $v_2$ :

$$T_1 T_2 \ddot{v}_2 + (k_1 T_2 + k_2 T_1) \dot{v}_2 + (k_1 + k_2 - 1)v_2 = (k_2 - 1)u_1 + T_1 \dot{u}_2 + k_1 u_2. \quad (67)$$

Sistemul este continuu, liniar, multivariabil, de ordinul doi, cu parametri constanți.

b) Pentru  $x_1 = v_1$  și  $x_2 = v_2$ , din (65) rezultă modelul I-S-E sub următoarea formă:

$$\begin{bmatrix} T_1 \dot{x}_1 \\ T_2 \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 & k_1 - 1 \\ k_2 - 1 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (68)$$

♦ **Aplicația 2.4.** Să se determine modelul I-E al sistemului de suspensie din fig. 2.15, alcătuit din corpul metalic cu masa  $M$ , resortul cu constanta elastică  $k$  și amortizorul cu constanta de frecare vâscoasă  $\alpha$ . Sistemul are ca mărimi de intrare și de ieșire deplasarea  $u$  a cadrului inferior și respectiv deplasarea  $y$  a corpului metalic față de pozițiile inițiale de echilibru staționar.

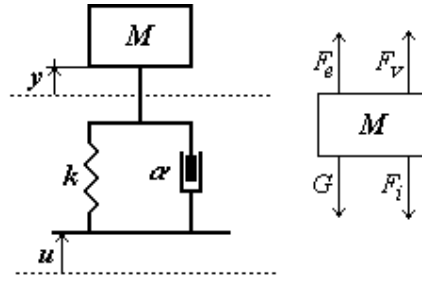


Fig. 2.15. Sistem mecanic de suspensie.

**Soluție.** În regim dinamic, corpul de masă  $M$  se află în echilibru sub acțiunea următoarelor forțe: forța elastică  $F_e$ , forța de amortizare vâscoasă  $F_v$ , greutatea proprie  $G$  și forța de inerție  $F_i$ . Prin raportare la starea inițială de echilibru staționar, relația de echilibru se scrie astfel

$$\Delta F_e + \Delta F_v = \Delta G + \Delta F_i ,$$

unde

$$\Delta F_e = k(u - y), \quad \Delta F_v = \alpha(\dot{u} - \dot{y}), \quad \Delta G = 0, \quad \Delta F_i = M \ddot{y}.$$

Prin urmare, sistemul mecanic de suspensie are modelul intrare-ieșire

$$M \ddot{y} + \alpha \dot{y} + ky = \alpha \dot{u} + ku . \quad (69)$$

Sistemul este liniar, continuu, de ordinul doi, cu parametri constanți

♦ **Aplicația 2.5.** Să se determine un model de tip I-S-E al sistemului continuu cu modelul I-E

$$8\ddot{y} + 5\dot{y} + y = 2\dot{u} + u .$$

**Soluție.** Se formează modelul secundar echivalent

$$\begin{cases} 8\dot{w} + 5w + w = u \\ y = 2\dot{w} + w \end{cases}$$

și se aleg variabilele de stare  $x_1 = z$ ,  $x_2 = \dot{z}$ . Rezultă modelul I-S-E

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{8}x_1 - \frac{5}{8}x_2 + \frac{1}{8}u \end{cases}, \quad y = x_1 + 2x_2 ,$$

cu forma matriceală

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{8} & -\frac{5}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \quad 2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$



◆ **Aplicația 2.6.** Pentru sistemul cu modelul I-E

$$8\ddot{y} + 5\dot{y} + y = 3\ddot{u} + 2\dot{u} + u,$$

să se determine un model echivalent de tip I-S-E.

**Soluție.** Se formează modelul secundar

$$\begin{cases} 8\ddot{w} + 5\dot{w} + w = u \\ y = 3\ddot{w} + 2\dot{w} + w \end{cases}$$

și se aleg variabilele de stare  $x_1 = w$ ,  $x_2 = \dot{w}$ . Obținem modelul I-S-E cu ecuația de stare

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{8}x_1 - \frac{5}{8}x_2 + \frac{1}{8}u \end{cases},$$

iar din

$$y = 3\dot{x}_2 + 2x_2 + x_1 = 3\left(-\frac{1}{8}x_1 - \frac{5}{8}x_2 + \frac{1}{8}u\right) + 2x_2 + x_1,$$

obținem ecuația de ieșire

$$y = \frac{5}{8}x_1 + \frac{1}{8}x_2 + \frac{3}{8}u.$$

◆ **Aplicația 2.7.** Pentru sistemul discret cu modelul I-E

$$y(t) - 0,5y(t-1) + 0,2y(t-2) = u(t-1) + 2u(t-2),$$

să se determine un model echivalent de tip I-S-E.

**Soluție.** Se formează modelul secundar echivalent

$$\begin{cases} w(t) - 0,5w(t-1) + 0,2w(t-2) = u(t) \\ y(t) = w(t-1) + 2w(t-2) \end{cases}$$

și se aleg variabilele de stare  $x_1(t) = w(t-1)$ ,  $x_2(t) = w(t-2)$ . Rezultă modelul I-S-E

$$\begin{cases} x_1(t+1) = 0,5x_1(t) - 0,2x_2(t) + u(t) \\ x_2(t+1) = x_1(t) \end{cases},$$

$$y(t) = x_1(t) + 2x_2(t).$$

◆ **Aplicația 2.8.** Pentru sistemul discret cu modelul I-E

$$y_k - 0,5y_{k-1} + 0,2y_{k-2} = u_k + 2u_{k-4},$$

să se determine un model echivalent de tip I-S-E.

**Soluție.** Se formează modelul secundar

$$\begin{cases} w(t) - 0,5w(t-1) + 0,2w(t-2) = u(t) \\ y(t) = w(t) + 2w(t-4) \end{cases},$$

și se aleg variabilele de stare

$$x_1(t) = w(t-1), \quad x_2(t) = w(t-2), \quad x_3(t) = w(t-3), \quad x_4(t) = w(t-4).$$

Rezultă modelul I-S-E

$$\begin{cases} x_1(t+1) = 0,5x_1(t) - 0,2x_2(t) + u(t) \\ x_2(t+1) = x_1(t) \\ x_3(t+1) = x_2(t) \\ x_4(t+1) = x_3(t) \end{cases},$$

$$y(t) = 0,5x_1(t) - 0,2x_2(t) + 2x_4(t) + u(t).$$

♦ **Aplicația 2.9.** Pentru sistemul continuu cu modelul I-S-E

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + mx_2 - u \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - x_2 + 2u \end{cases}, \quad y = x_1 - x_2,$$

să se determine modelul echivalent de tip I-E.

**Soluție.** Deoarece

$$Q_2 = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & m+1 \end{bmatrix}, \quad \det Q_2 = m+2,$$

modelul I-E va fi de ordinul doi pentru  $m \neq -2$  și de ordin mai mic pentru  $m = -2$ . Avem

$$y = x_1 - x_2,$$

$$\dot{y} = \dot{x}_1 - \dot{x}_2 = x_1 + (m+1)x_2 - 3u,$$

$$\ddot{y} = \dot{x}_1 + (m+1)\dot{x}_2 - 3\dot{u} = -(2m+3)x_1 - x_2 + (2m+1)u - 3\dot{u}.$$

Din primele două ecuații, rezultă

$$x_1 = \frac{\dot{y} + (m+1)y + 3u}{m+2},$$

$$x_2 = \frac{\dot{y} - y + 3u}{m+2}.$$

Inlocuind  $x_1$  și  $x_2$  în a treia ecuație, obținem

$$\ddot{y} = \frac{(m+2)[-2\dot{y} - (2m+1)y - 6u]}{m+2} + (2m+1)u - 3\dot{u}.$$

Așadar, pentru  $m \neq -2$ , modelul I-E are forma

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + (2m+1)y = -3\dot{u} + (2m-5)u.$$

Pentru  $m = -2$ , din  $y = x_1 - x_2$  și  $\dot{y} = x_1 - x_2 - 3u$ , rezultă următorul model I-E de ordinul unu:

$$-\dot{y} + y = 3u.$$

♦ **Aplicația 2.10.** Pentru sistemul discret cu modelul I-S-E

$$\begin{cases} x_1(t+1) = -x_1(t) + x_2(t) - u(t) \\ x_2(t+1) = mx_1(t) - x_2(t) \end{cases},$$

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t) + 2u(t),$$

să se determine modelul echivalent de tip I-E.

**Soluție.** Deoarece

$$Q_2 = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ m-1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \det Q_2 = -m+1,$$

modelul I-E va fi de ordinul doi pentru  $m \neq 1$  și de ordin mai mic pentru  $m = 1$ . Avem

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t) + 2u(t),$$

$$y(t+1) = x_1(t+1) + x_2(t+1) + 2u(t+1) = (m-1)x_1(t) + u(t+1),$$

$$y(t+2) = (m-1)x_1(t+1) + u(t+2) = (m-1)[-x_1(t) + x_2(t) - u(t)] + u(t+2),$$

Pentru  $m \neq 1$ , din primele două ecuații, rezultă

$$x_1(t) = \frac{y(t+1) - u(t+1)}{m-1},$$

$$x_2(t) = y(t) - 2u(t) + \frac{y(t+1) - u(t+1)}{m-1}.$$

Inlocuind  $x_1(t)$  și  $x_2(t)$  în a treia ecuație, obținem obținem modelul I-E

$$y(t+2) + (1-m)y(t) = u(t+2) + 3(1-m)u(t),$$

echivalent cu

$$y(t) + (1-m)y(t-2) = u(t) + 3(1-m)u(t-2), \quad m \neq 1.$$

Pentru  $m=1$ , ecuația

$$y(t+1) = (m-1)x_1(t) + u(t+1)$$

devine

$$y(t+1) = u(t+1),$$

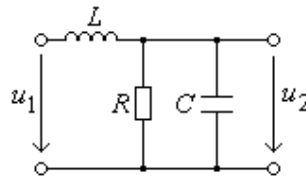
adică

$$y(t) = u(t).$$

Sistemul este liniar, de tip static.

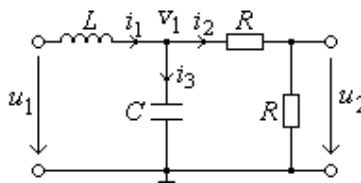
## 2.8. APLICAȚII DE AUTOCONTROL

◆ **C2.1.** Să se determine modelul I-E al circuitului electric alăturat, cu intrarea  $u_1$  și ieșirea  $u_2$ .

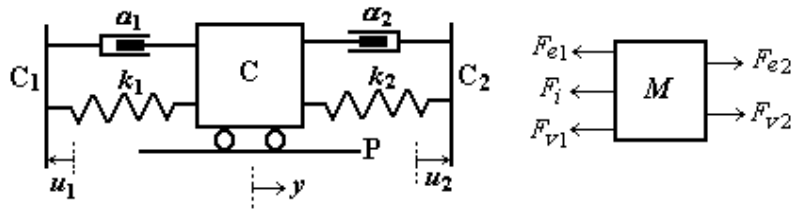


◆ **C2.2.** Circuitul electric alăturat are intrarea  $u_1$  și ieșirea  $u_2$ . Să se determine:

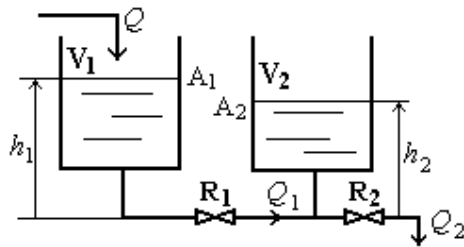
- modelul I-E;
- modelul I-S-E, considerând stările  $x_1 = i_1$  și  $x_2 = i_2$ .



◆ **C2.3.** Să se determine modelul I-E al sistemului mecanic de mai jos, alcătuit din căruciorul C cu masa  $M$ , arcurile cu constantele elastice  $k_1$  și  $k_2$ , amortizoarele cu constantele de frecare vâscoasă  $\alpha_1$  și  $\alpha_2$ , planul orizontal P și cadrele metalice  $C_1$  și  $C_2$ . Sistemul are ca mărimi de intrare deplasările orizontale  $u_1$  și  $u_2$  ale celor două cadre metalice laterale, iar ca mărime de ieșire deplasarea orizontală  $y$  a căruciorului. Se neglijează frecarea cu planul orizontal și cu aerul.



♦ **C2.4.** Sistemul hidraulic din figura alăturată este format din vasele cilindrice  $V_1$  și  $V_2$ , cu ariile secțiunilor orizontale  $A_1$  și  $A_2$ , și din robinetele  $R_1$  și  $R_2$ . Debitetele  $Q$ ,  $Q_1$  și  $Q_2$  sunt volumice, iar curgerea lichidului prin robinete are loc în regim laminar, după relațiile  $Q_1 = k_1 g (h_1 - h_2)$  și  $Q_2 = k_2 g h_2$ , unde  $k_1$  și  $k_2$  sunt coeficienții de rezistență hidraulică la curgere ai robinetelor. Sistemul are ca mărime de intrare debitul  $Q$ , iar ca mărimi de ieșire nivelul  $h_1$  și nivelul  $h_2$  în cele două vase. Să se determine modelul I-S-E, considerând că  $x_1 = h_1$  și  $x_2 = h_2$ .

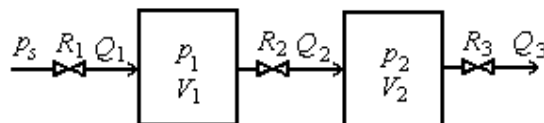


♦ **C2.5.** Sistemul pneumatic din figura alăturată este format din două vase cu volumele  $V_1$  și  $V_2$ , și trei rezistențe pneumatice  $R_1$ ,  $R_2$  și  $R_3$ . Primul vas este conectat la sursa de presiune variabilă  $p_s$ , iar al doilea vas la atmosferă. Curgerea aerului prin robinete are loc în regim laminar, după relația

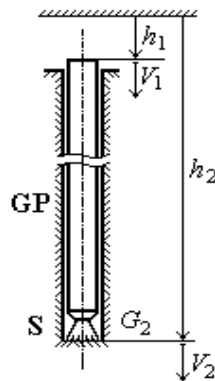
$$p_d = RQ,$$

unde  $p_d$  este căderea de presiune pe robinet,  $Q$  - debitul masic de aer, iar  $R$  - rezistența pneumatică. Aerul instrumental este considerat gaz perfect, cu temperatura constantă  $T$  și masa molară  $M$ . Sistemul are ca mărime de intrare presiunea  $p_s$  a sursei, iar ca mărimi de ieșire presiunile  $p_1$  și  $p_2$  din vase.

Să se determine modelul I-S-E, considerând că  $x_1 = p_1$  și  $x_2 = p_2$ .

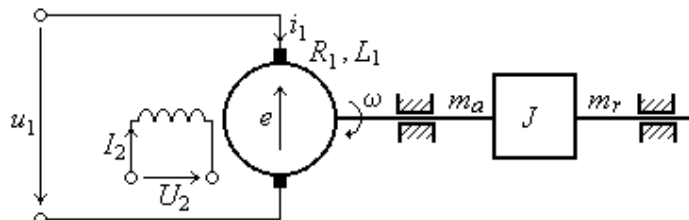


♦ **C2.6.** Sistemul de foraj din figura alăturată este format dintr-o garnitură de prăjini în mișcare de rotație GP, prevăzută cu o sapă S de dislocare a rocii. Garnitura este omogenă, are lungimea  $L$ , aria transversală  $A$  și modulul de elasticitate  $E$ . Presupunem că viteza de avans a sapei de foraj  $V_2$  variază liniar cu sarcina pe sapă  $G_2$ , adică  $V_2 = kG_2$ . Să se afle modelul dinamic al sistemului, considerând ca intrare viteza de coborâre a capătului superior al garniturii  $V_1$ , iar ca ieșire sarcina pe sapă  $G_2$ . Se neglijează forțele inerțiale ale garniturii de prăjini și forțele de frecare dintre garnitură și pereții sondei.



♦ **C2.7.** Să se afle modelul dinamic al motorului de curent continuu din figura alăturată, considerând ca intrări tensiunea rotorică  $u_1$  și momentul rezistent  $m_r$ , iar ca ieșire viteza de rotație  $\omega$ . Se neglijează fenomenele de saturație, histerezis și frecare.

Sistemul are următorii parametri: rezistența rotorică  $R_1$ , inductanța rotorică  $L_1$ , curentul inductor  $I_2$ , constanta  $k_e$  a tensiunii electromotoare  $e$ , constanta  $k_m$  a momentului activ  $m_a$  și momentul de inerție al sarcinii  $J$ .



♦ **C2.8.** Pentru sistemul continuu cu modelul I-E

$$5\ddot{y} + 8\dot{y} + 5y = 4\ddot{u} + u,$$

să se determine un model de tip I-S-E.

- ◆ C2.9. Pentru sistemul continuu cu modelul I-E

$$\ddot{y} + 5\dot{y} = 4\ddot{u} + u,$$

să se determine un model de tip I-S-E.

- ◆ C2.10. Pentru sistemul discret cu modelul I-E

$$y(t) - 2y(t-1) + 0,5y(t-3) = u(t) - 5u(t-3),$$

să se determine un model de tip I-S-E.

- ◆ C2.11. Pentru sistemul discret cu modelul I-E

$$y_k - y_{k-1} + 0,4y_{k-2} = u_{k-1} + 2u_{k-3},$$

să se determine un model de tip I-S-E.

- ◆ C2.12. Pentru sistemul discret cu modelul I-E

$$5y_k - y_{k-1} + 2y_{k-3} = 2u_{k-4},$$

să se determine un model de tip I-S-E.

- ◆ C2.13. Pentru sistemul continuu cu modelul I-S-E

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + mx_2 \\ \dot{x}_2 = -4x_1 + x_2 + 2u \end{cases},$$

$$y = x_1 - x_2 - u,$$

să se determine modelul de tip I-E.

- ◆ C2.14. Pentru sistemul discret cu modelul I-S-E

$$\begin{cases} x_1(t+1) = -x_1(t) + 2x_2(t) + u(t) \\ x_2(t+1) = x_1(t) - mx_2(t) \end{cases},$$

$$y(t) = x_1(t) - x_2(t),$$

să se determine modelul de tip I-E.

- ◆ C2.15. Pentru sistemul discret cu modelul I-S-E

$$x_1(t+1) = -x_1(t) + 7u(t),$$

$$y(t) = x_1(t) - u(t),$$

să se determine modelul de tip I-E.

# 3

---

## ELEMENTE DE ANALIZĂ ÎN DOMENIUL TIMPULUI A SISTEMELOR LINIARE DE TIP I-E

---

Analiza sistemelor liniare de tip intrare-ieșire se face în ipoteza că toate variabilele de intrare și de ieșire sunt de *tip original*, adică nule la momentele de timp negative. Această proprietate este rezultatul imediat al următoarelor două ipoteze:

a) sistemul se află în *regim staționar* pentru  $t < t_0 = 0$ ;

b) variabilele de intrare și de ieșire ale sistemelor fizice reprezintă *variațiile* mărimilor fizice respective față de valorile lor inițiale.

De exemplu, în cazul unui cuptor tubular în care un produs lichid este încălzit la temperatura  $T$  prin arderea unui combustibil cu debitul  $Q$ , variabila sistemică de intrare este variația debitului de combustibil,

$$u = \Delta Q = Q - Q_0,$$

iar variabila sistemică de ieșire este variația temperaturii produsului la ieșirea din cuptor,

$$y = \Delta T = T - T_0.$$

Valoarea nulă a variabilelor  $u$  și  $y$  pentru timp negativ exprimă faptul că debitul de combustibil și temperatura produsului la ieșirea din cuptor au valorile constante  $Q_0$ , respectiv  $T_0$ .

Analiza elementară de tip intrare-ieșire constă, în principal, în abordarea și rezolvarea următoarelor probleme:

- determinarea modelului sistemelor compuse când se cunosc modelele subsistemelor componente;

- calculul răspunsului sistemelor la anumite semnale de intrare standard, de tip original;



- reducerea ordinului sistemelor liniare pe baza criteriului de echivalență intrare-ieșire;
- discretizarea sistemelor continue.

Determinarea în domeniul timpului a modelului dinamic al unui sistem compus din modelele subsistemelor componente este o operație relativ complicată, care se face, în cazul sistemelor continue, prin eliminarea tuturor variabilelor intermediare și a derivatelor acestora. De asemenea, calculul răspunsului unui sistem compus cu structură închisă este o operație relativ greoaie, mai ales la sistemele de ordin superior. Ambele probleme pot fi rezolvate mult mai ușor în domeniul complex, prin utilizarea modelului de tip operațional (cu forma mult mai simplă, similară celei a modelului staționar). La sistemele cu structură deschisă, calculul răspunsului se poate face fie pe baza modelului întregului sistem, fie prin calculul succesiv al răspunsului fiecărui subsistem.

### 3.1. RĂSPUNSUL ÎN TIMP AL SISTEMELOR CONTINUE

La sistemele liniare continue și monovariabile, metodele de stabilire a modelului unui sistem compus din modelele cunoscute ale subsistemelor componente utilizează *forma primară* (standard) de reprezentare:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_r u^{(r)} + b_{r-1} u^{(r-1)} + \dots + b_1 \dot{u} + b_0 u. \quad (1)$$

În cele ce urmează, vom considera  $a_n \neq 0$ ,  $b_r \neq 0$  și  $r \leq n$ , caz în care sistemul are ordinul  $n$ , ordinul relativ  $n-r$  și este propriu.

Răspunsul  $h(t)$  al sistemului la intrare treaptă unitară,  $u=1(t)$ , se numește *funcție indicială* sau *răspuns indicial*, iar răspunsul  $g(t)$  al sistemului la intrare impuls Dirac,  $u=\delta_0(t)$ , se numește *funcție pondere* sau *răspuns pondere*. În conformitate cu principiul superpoziției, răspunsul pondere este derivata în sens generalizat a răspunsului indicial (v. cap. 2):

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt}, \quad (2)$$

în sensul că dacă funcția indicială  $h(t)$  este discontinuă în origine, atunci

$$g(t) = \dot{h}(t) + h(0+)\delta_0(t). \quad (3)$$

Pentru *calculul analitic* al răspunsului la o intrare dată de tip original, se utilizează *forma secundară* de reprezentare a sistemului, care nu conține derivate ale mărimii de intrare:

$$\begin{cases} a_n w^{(n)} + a_{n-1} w^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{w} + a_0 w = u \\ y = b_r w^{(r)} + b_{r-1} w^{(r-1)} + \dots + b_1 \dot{w} + b_0 w \end{cases} \quad (4)$$

Această formă de reprezentare permite calculul răspunsului sistemului la intrări de tip original  $u(t)$  nederivabile, chiar discontinue (cazul intrării tip treaptă).

În conformitate cu modelul secundar, răspunsul  $y(t)$  al sistemului la orice funcție de intrare de tip original  $u = f(t) \cdot 1(t)$  este dat de relația

$$y(t) = b_r w^{(r)} + b_{r-1} w^{(r-1)} + \dots + b_1 \dot{w} + b_0 w, \quad (5)$$

unde  $w(t)$  este soluția ecuației diferențiale

$$a_n w^{(n)} + a_{n-1} w^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{w} + a_0 w = f(t) \quad (6)$$

pentru *condițiile inițiale nule*

$$w(0_+) = \dot{w}(0_+) = \dots = w^{(n-1)}(0_+) = 0. \quad (7)$$

Cele  $n$  condiții inițiale nule rezultă din forma ecuației (6), valabilă pentru orice  $t$  real, care implică necesitatea continuității funcțiilor  $w(t)$ ,  $\dot{w}(t)$ , ...,  $w^{(n-1)}(t)$  la momentul  $t = 0$ . Astfel, dacă funcția  $w^{(i)}(t)$ ,  $0 \leq i \leq n-1$ , ar fi discontinuă în origine, adică ar avea o variație bruscă la momentul  $t = 0$ , atunci derivata acesteia  $w^{(i+1)}(t)$  ar avea o variație infinită în origine, rezultat în contradicție cu condiția ca ecuația (6) să fie verificată la momentul  $t = 0$ .

Din condițiile inițiale (7) și din condiția ca ecuația (6) să fie verificată la momentul  $t = 0_+$ , rezultă

$$w^{(n)}(0_+) = \frac{f(0_+)}{a_n}, \quad (8)$$

iar din ecuația (5) și condițiile inițiale (7) și (8) rezultă că răspunsul  $y(t)$  al sistemului satisface următoarele condiții inițiale:

$$y(0_+) = \dot{y}(0_+) = \dots = y^{(n-r+1)}(0_+) = 0, \quad y^{(n-r)}(0_+) = \frac{b_r f(0_+)}{a_n}. \quad (9)$$

Rezultatul obținut poate fi formulat prin

**Teorema condițiilor inițiale nule.** *Răspunsul unui sistem liniar continuu și cu ordinul relativ  $n-r$  la orice funcție de intrare de tip original mărginită în origine are cel puțin  $n-r$  condiții inițiale nule.*

Pentru funcții de intrare de tip original discontinue în origine, adică de forma

$$u = f(t) \cdot 1(t), \quad f(0_+) \neq 0,$$

răspunsul sistemului are exact  $n-r$  condiții inițiale nule. Pentru semnale de intrare tip original continue în origine, răspunsul sistemului se caracterizează prin cel puțin  $n-r+1$  condiții inițiale nule, iar pentru semnale de intrare tip original continue și derivabile în origine (având graficul tangent în origine la axa timpului) - prin cel puțin  $n-r+2$  condiții inițiale nule.

**Observații. 1<sup>0</sup>.** Pentru  $n-r=0$  (cazul sistemelor simplu proprii, cu grad de inerție zero), din (9) sau prin integrarea de  $n$  ori a ecuației diferențiale (1), rezultă că răspunsul indicial este discontinuu în origine:

$$h(0_+) = b_n / a_n \neq 0.$$

Pentru  $n-r=1$  (cazul sistemelor strict proprii, cu grad de inerție unu), din (9) sau prin integrarea de  $n-1$  ori a ecuației diferențiale (1), rezultă că răspunsul indicial este continuu, dar nederivabil în origine:

$$h(0_+) = 0, \quad \dot{h}(0_+) = b_{n-1} / a_n \neq 0.$$

Pentru  $n-r=2$  (cazul sistemelor strict proprii, cu grad de inerție doi), din (9) sau prin integrarea de  $n-2$  ori a ecuației diferențiale (1), rezultă că răspunsul indicial este continuu și derivabil în origine (cu graficul tangent în origine la axa timpului):

$$h(0_+) = \dot{h}(0_+) = 0, \quad \ddot{h}(0_+) = b_{n-2} / a_n \neq 0.$$

**2<sup>0</sup>.** Soluția  $w(t)$  a ecuației diferențiale (6) are forma

$$w(t) = w_p(t) + w_{omg}(t), \quad (10)$$

unde  $w_p(t)$  este o soluție particulară a ecuației (6), iar  $w_{omg}(t)$  soluția generală a ecuației diferențiale omogene (cu membrul drept nul).

In cazul  $a_0 \neq 0$ , soluția  $w(t)$  a ecuației diferențiale (6) pentru intrarea treaptă unitară  $u = 1(t)$  are forma

$$w(t) = \frac{1}{a_0} + C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} + \dots + C_n e^{s_n t}, \quad t \geq 0, \quad (11)$$

unde  $s_1, s_2, \dots, s_n$  sunt rădăcinile (distincte) ale *ecuației caracteristice*

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0, \quad (12)$$

iar  $C_1, C_2, \dots, C_n$  sunt constante reale sau complexe (constanta  $C_i$  fiind reală/complexă după cum rădăcina  $s_i$  este reală/complexă), cu valorile determinate din condițiile inițiale nule (7). Polinomul monic

$$\mathcal{P}(s) = s^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} s^{n-1} + \dots + \frac{a_1}{a_n} s + \frac{a_0}{a_n} = (s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n), \quad (13)$$

reprezintă *polinomul caracteristic* al sistemului.

Dacă  $s_1 = s_2$ , suma  $C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$  din expresia răspunsului  $w(t)$  trebuie înlocuită cu

$$(C_1 t + C_2) e^{s_1 t}. \quad (14)$$

Dacă rădăcinile  $s_1$  și  $s_2$  sunt complex-conjugate, adică  $s_{1,2} = a \pm jb$ , se recomandă înlocuirea sumei

$$C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t},$$

cu constantele  $C_1$  și  $C_2$  complex-conjugate, cu suma

$$e^{at} (C_1 \sin bt + C_2 \cos bt), \quad (15)$$

în care cu constantele  $C_1$  și  $C_2$  reale.

**3<sup>0</sup>.** Ținând seama de ecuația ieșirii din modelul secundar (4) și de expresia (10) a răspunsului  $w(t)$ , răspunsul indicial  $h(t)$  al sistemului cu  $a_0 \neq 0$  și rădăcinile ecuației caracteristice distincte are forma

$$h(t) = \frac{b_0}{a_0} + D_1 e^{s_1 t} + D_2 e^{s_2 t} + \dots + D_n e^{s_n t}, \quad t \geq 0, \quad (16)$$

unde  $D_1, D_2, \dots, D_n$  sunt constante reale sau complexe ( $D_i$  fiind real numai dacă  $s_i$  este real). Dacă rădăcinile  $s_1$  și  $s_2$  sunt complex-conjugate, adică  $s_{1,2} = a \pm jb$ , atunci suma  $D_1 e^{s_1 t} + D_2 e^{s_2 t}$  este de forma

$$e^{at}(E_1 \sin bt + E_2 \cos bt), \quad (17)$$

unde  $E_1$  și  $E_2$  sunt constante reale. Din expresia (16) a răspunsului indicial  $h(t)$ , rezultă că acesta este *mărginit* dacă toate rădăcinile  $s_1, s_2, \dots, s_n$  ale ecuației caracteristice au *partea reală negativă*. Acest rezultat este valabil inclusiv în cazul în care ecuația caracteristică are rădăcini multiple (*teorema de mărginire a răspunsului indicial* al unui sistem liniar continuu). În plus, răspunsul indicial  $h(t)$  este aperiodic (fără oscilații) atunci când toate rădăcinile ecuației caracteristice sunt reale. Dacă două rădăcini ale ecuației caracteristice sunt complex-conjugate,  $s_{1,2} = a \pm jb$ , atunci răspunsul indicial are și o componentă de tip oscilant sinusoidal, cu amplitudinea descrescătoare (pentru  $a < 0$ ), constantă (pentru  $a = 0$ ) sau crescătoare (pentru  $a > 0$ ).

În cazul sistemelor de tip integral (cu  $a_0 = 0$ ), soluția  $w(t)$  a ecuației diferențiale (6) pentru intrarea treaptă unitară  $u = 1(t)$  are forma

$$w(t) = \frac{t}{a_1} + C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} + \dots + C_n e^{s_n t}, \quad t \geq 0, \quad (18)$$

unde  $s_1, s_2, \dots, s_n$  sunt rădăcinile (distincte) ale *ecuației caracteristice*

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s = 0. \quad (19)$$

**4<sup>0</sup>.** Toate rădăcinile reale ale ecuației caracteristice au dimensiunea inversă a timpului. Dacă toate rădăcinile  $s_1, s_2, \dots, s_n$  sunt reale și distincte, prin introducerea constantelor de timp

$$T_i = \frac{-1}{s_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

răspunsul indicial al sistemului capătă expresia

$$h(t) = \frac{b_0}{a_0} + D_1 e^{-t/T_1} + D_2 e^{-t/T_2} + \dots + D_n e^{-t/T_n}, \quad t \geq 0. \quad (20)$$

Atunci când toate constantele de timp  $T_i$  sunt reale și pozitive, răspunsul indicial  $h(t)$  este aperiodic și mărginit. În plus, răspunsul indicial are valoarea inițială

$$h(0_+) = \frac{b_n}{a_n}, \quad (21)$$

valoarea finală

$$h(\infty) = \frac{b_0}{a_0} \quad (22)$$

(egală cu factorul static de proporționalitate) și timpul aproximativ de stabilizare

$$T_{tr95} \approx 3(T_1 + T_2 + \dots + T_n).$$

**5<sup>0</sup>.** La sistemele compuse de tip serie (fig. 3.1), paralel (fig. 3.2) sau cu reacție (fig. 3.3), calculul răspunsului la o intrare dată se face, de regulă, pe baza modelului sistemului compus, obținut din modelele subsistemelor componente prin eliminarea tuturor variabilelor intermediare (a variabilei  $v$  la conexiunea serie, a variabilelor  $v_1$  și  $v_2$  la conexiunea paralel, a variabilelor  $e$  și  $v$  la conexiunea cu reacție), inclusiv a derivatelor acestora. La conexiunile deschise (tip serie sau paralel), calculul răspunsului se poate face și pas cu pas, prin calculul succesiv al răspunsului fiecărui subsistem, în ordinea dată de sensul de transmisie a informației.

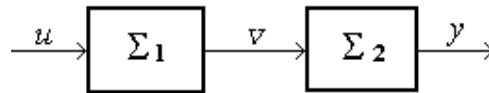


Fig. 3.1. Conexiune serie.

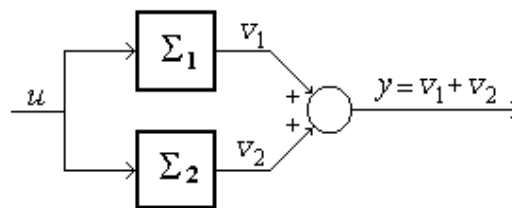


Fig. 3.2. Conexiune paralel.

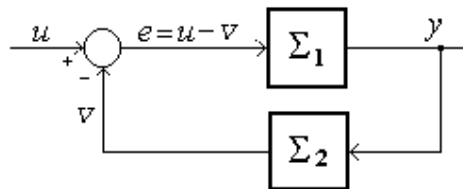


Fig. 3.3. Conexiune cu reacție.

■ In cadrul pachetului de programe *Control System Toolbox* din mediul *MATLAB*, modelul de tip transfer intrare-ieșire ("input-output transfer") al unui sistem continuu liniar se construiește cu ajutorul funcției *tf* astfel:

- $\text{sis} = \text{tf}(b,a)$ ,

unde argumentele de intrare  $b$  și  $a$  (introduse anterior în program) sunt vectori linie formați respectiv cu coeficienții derivatelor intrării și ieșirii din modelul primar (1):

$$b = [b_n \ b_{n-1} \ \dots \ b_1 \ b_0]; \quad a = [a_n \ a_{n-1} \ \dots \ a_1 \ a_0];$$

In cazul  $r < n$ , argumentul de intrare  $b$  poate fi scris și sub forma  $b = [b_r \ b_{r-1} \ \dots \ b_1 \ b_0]$ .

Invers, din sistemul *sis* se pot extrage vectorii  $b$  și  $a$ , fie cu ajutorul funcției *tfdata*

- $[\text{num}, \text{den}] = \text{tfdata}(\text{sis}); \text{b} = \text{num}\{1\}; \text{a} = \text{den}\{1\};$

fie prin referire directă la proprietățile obiectului *sis*

- $\text{b} = \text{sis.num}\{1\}; \text{a} = \text{sis.den}\{1\}.$

Ultima cale permite și modificarea parametrilor sistemului *sis*, în varianta

- $\text{sis.num}\{1\} = \text{b}; \text{sis.den}\{1\} = \text{a};$

sau în varianta

- $\text{sis.num}\{1\}(i) = \text{b}_{n-i+1}; \text{sis.den}\{1\}(i) = \text{a}_{n-i+1};$

Pachetul de programe conține funcțiile *step*, *impulse* și *lsim* (fișiere cu extensia *m*) pentru calculul și reprezentarea grafică a răspunsului indicial, răspunsului pondere și răspunsului la orice intrare original de tip scară  $U$ :

- $[Y,t] = \text{step}(\text{sis},t);$
- $[Y,t] = \text{impulse}(\text{sis},t);$
- $[Y,t] = \text{lsim}(\text{sis},U,t);$

Argumentul de intrare  $t$ , reprezentând vectorul *timp*, poate fi introdus printr-o comandă de forma

- $t = t_0:T:t_1,$

unde  $t_0$  este valoarea inițială (de regulă egală cu 0),  $T$  este pasul de calcul, iar  $t_1$  - valoarea finală. Argumentul de intrare  $t$  poate fi omis la funcțiile *step* și *impulse*, caz în care acesta este generat de funcția respectivă. Argumentele de intrare  $U$  și  $t$  ale funcției *lsim* sunt vectori cu aceeași dimensiune. Componentele vectorilor  $U$  și  $Y$  reprezintă respectiv valorile mărimilor de intrare și de ieșire la momentele de timp specificate de vectorul  $t$ .

Dacă funcțiile sunt apelate cu un argument de ieșire ( $Y$ ) sau cu ambele, se efectuează numai evaluarea acestor argumente, fără reprezentarea grafică a răspunsului. In cazul contrar (fără argumente de ieșire), se efectuează reprezentarea grafică a răspunsului.

Pentru construirea unei sistem compus, format din două subsisteme *sis1* și *sis2* conectate în *serie*, *paralel* sau cu *reacție negativă*, se procedează respectiv astfel:

- $s1 = sis1 * sis2$ ;
- $s2 = sis1 + sis2$ ;
- $s3 = sis1 / (1 + sis1 * sis2)$ ;

### 3.2. RĂSPUNSUL IN TIMP AL SISTEMELOR DISCRETE

In etapa de stabilire a modelului unui sistem compus din modelele cunoscute ale subsistemelor componente se utilizează forma *primară* (standard) de reprezentare a sistemelor:

$$y(t) + a_1 y(t-1) + \dots + a_n y(t-n) = b_0 u(t) + b_1 u(t-1) + \dots + b_r u(t-r). \quad (23)$$

Pentru calculul răspunsului la o intrare dată de tip original este însă preferată forma *secundară* echivalentă

$$\begin{cases} w(t) + a_1 w(t-1) + \dots + a_n w(t-n) = u(t) \\ y(t) = b_0 w(t) + b_1 w(t-1) + \dots + b_r w(t-r) \end{cases}. \quad (24)$$

Ca și la sistemele continue, variabilele  $u$ ,  $y$  și  $w$  sunt de tip *original*, adică nule pentru orice valoare negativă a argumentului timp  $t$ .

*Calculul numeric* al răspunsului  $w(t)$  pentru  $t \geq 0$  la o intrare dată de tip original  $u$  se efectuează cu relațiile:

$$\begin{aligned} w_0 &= u_0, \\ w_1 &= u_1 - a_1 w_0, \\ w_2 &= u_2 - a_1 w_1 - a_2 w_0, \\ &\vdots \\ w_n &= u_n - a_1 w_{n-1} - \dots - a_n w_0, \\ w_i &= u_i - a_1 w_{i-1} - \dots - a_n w_{i-n}, \quad i = n+1, n+2, \dots \end{aligned} \quad (25)$$

unde  $w_i = w(i)$ ,  $u_i = u(i)$ . Mai departe, valorile numerice ale răspunsului  $y$  sunt date de relațiile:

$$\begin{aligned} y_0 &= b_0 w_0, \\ y_1 &= b_0 w_1 + b_1 w_0, \\ &\vdots \\ y_r &= b_0 w_r + b_1 w_{r-1} + \dots + b_r w_0, \\ y_i &= b_0 w_i + b_1 w_{i-1} + \dots + b_r w_{i-r}, \quad i = r+1, r+2, \dots \end{aligned} \quad (26)$$



*Calculul analitic* al răspunsului  $y(t)$  al sistemului la o intrare analitică de tip original dată,  $u = f(t) \cdot 1^0(t)$ , se poate face pe baza modelului primar (23) sau, mai bine, a modelului secundar (24). Funcția treaptă unitară de timp discret  $1^0(t)$  are expresia

$$1^0(t) = \begin{cases} 0, & t = \dots, -2, -1 \\ 1, & t = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (27)$$

și este reprezentată grafic în fig. 2.9.

Ca și la sistemele continue, în cazul utilizării modelului secundar (24), răspunsul  $w(t)$  la o funcție de intrare analitică dată  $u = f(t) \cdot 1^0(t)$  poate fi scris sub forma

$$w(t) = w_p(t) + w_{omg}(t), \quad (28)$$

unde  $w_p(t)$  este o soluție particulară a ecuației cu diferențe

$$w(t) + a_1 w(t-1) + \dots + a_n w(t-n) = f(t), \quad (29)$$

iar  $w_{omg}(t)$  este soluția generală a ecuației omogene cu diferențe

$$w(t) + a_1 w(t-1) + \dots + a_n w(t-n) = 0. \quad (30)$$

Soluția particulară  $w_p(t)$  este valabilă pentru  $t \geq n$ . Ea are, de regulă, o formă similară cu cea a funcției de intrare  $f(t)$ . Astfel, pentru intrarea treaptă unitară  $u = 1^0(t)$ , când ecuația (29) devine

$$w(t) + a_1 w(t-1) + \dots + a_n w(t-n) = 1, \quad t \in \mathbb{N}, \quad (31)$$

soluția particulară este

$$w_p(t) = \begin{cases} \frac{1}{1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n}, & 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n \neq 0 \\ \frac{-t}{a_1 + 2a_2 + \dots + na_n}, & 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0 \end{cases}. \quad (32)$$

Soluția ecuației omogene are forma

$$w_{omg}(t) = C_1 z_1^t + C_2 z_2^t + \dots + C_n z_n^t, \quad (33)$$

unde  $z_1, z_2, \dots, z_n$  sunt rădăcinile (distincte) ale *ecuației caracteristice*

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0, \quad (34)$$



Răspunsul sistemului la intrarea treaptă unitară  $u=1^0(t)$  reprezintă *funcția indicială* și se notează cu  $h(t)$  iar răspunsul la intrarea impuls unitar  $u=\delta^0(t)$  (fig. 2.10) reprezintă *funcția pondere* a sistemului și se notează cu  $g(t)$ . În conformitate cu principiul superpoziției, din relațiile

$$\delta^0(t)=1^0(t)-1^0(t-1), \quad 1^0(t)=\delta^0(t)+\delta^0(t-1)+\dots+\delta^0(t-t),$$

reiese că între funcția pondere  $g(t)$  și funcția indicială  $h(t)$  există corelațiile

$$g(t)=h(t)-h(t-1), \quad (41)$$

$$h(t)=g(t)+g(t-1)+\dots+g(0). \quad (42)$$

**Observații. 1<sup>0</sup>.** În cazul în care sistemul este de tip proporțional ( $1+a_1+a_2+\dots+a_n \neq 0$ ) și ecuația caracteristică are rădăcinile  $z_1, z_2, \dots, z_n$  distincte, soluția  $w(t)$  a ecuației cu diferențe (31) are forma

$$w(t)=\frac{1}{1+a_1+a_2+\dots+a_n}+C_1z_1^t+C_2z_2^t+\dots+C_nz_n^t, \quad t \in \mathbb{N}, \quad (43)$$

unde  $C_1, C_2, \dots, C_n$  sunt constante reale sau complexe ( $C_i$  fiind real numai dacă  $z_i$  este real). Ținând seama de ecuația ieșirii

$$y(t)=b_0w(t)+b_1w(t-1)+\dots+b_rw(t-r),$$

răspunsul indicial  $h(t)$  are forma

$$h(t)=\frac{b_0+b_1+\dots+b_r}{1+a_1+a_2+\dots+a_n}+D_1z_1^t+D_2z_2^t+\dots+D_nz_n^t, \quad t \geq r, \quad (44)$$

unde  $D_1, D_2, \dots, D_n$  sunt constante reale sau complexe ( $D_i$  fiind real numai dacă  $z_i$  este real). Dacă rădăcinile  $z_1$  și  $z_2$  sunt complex-conjugate, adică  $z_{1,2}=\rho(\cos\alpha \pm j\sin\alpha)$ , suma  $D_1z_1^t+D_2z_2^t$  este de forma

$$\rho^t(E_1\cos\alpha t+E_2\sin\alpha t), \quad (45)$$

unde  $E_1$  și  $E_2$  sunt constante reale. Din expresia răspunsului indicial  $h(t)$  rezultă că acesta este *mărginit* atunci când toate rădăcinile  $z_1, z_2, \dots, z_n$  ale ecuației caracteristice a sistemului au *modulul subunitar*. Acest rezultat este valabil și în cazul în care ecuația caracteristică are rădăcini multiple (*teorema de mărginire a răspunsului indicial* al unui sistem liniar discret). În plus, dacă două rădăcini ale ecuației caracteristice sunt complex-

conjugate (cu modulul  $\rho$ ), atunci răspunsul indicial are o componentă de tip oscilant sinusoidal (cu amplitudinea descrescătoare, constantă sau crescătoare după cum  $\rho < 1$ ,  $\rho = 1$  sau  $\rho > 1$ , respectiv). De asemenea, răspunsul indicial are o componentă de tip oscilant (care schimbă de semn la fiecare moment de timp  $t \in Z^+$ ) atunci când ecuația caracteristică are o rădăcină reală negativă. Dacă toate rădăcinile ecuației caracteristice sunt reale și pozitive, atunci răspunsul indicial este aperiodic (fără oscilații).

**2<sup>0</sup>.** Din forma primară (23) a modelului sistemului rezultă imediat că dacă

$$b_0 = b_1 = \dots = b_{i-1} = 0,$$

atunci răspunsul indicial  $h(t)$  și răspunsul pondere  $g(t)$  satisfac  $i$  condiții inițiale nule, adică

$$h(0) = h(1) = \dots = h(i-1) = 0, \quad g(0) = g(1) = \dots = g(i-1) = 0. \quad (46)$$

Dacă toate rădăcinile  $z_1, z_2, \dots, z_n$  ale ecuației caracteristice a sistemului au modulul subunitar și nenul, din formula (44) rezultă că răspunsului indicial  $h(t)$  se stabilizează la valoarea

$$h(\infty) = \frac{b_0 + b_1 + \dots + b_r}{1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n}, \quad (47)$$

egală cu factorul static de proporționalitate al sistemului.

**3<sup>0</sup>.** Metoda de calcul al răspunsului sistemului la o funcție de intrare analitică arbitrară  $u = f(t) \cdot 1^0(t)$  este similară metodei de calcul al răspunsului indicial. Formula de calcul al soluției particulare a ecuației cu diferențe (29) depinde de forma particulară a funcției  $f(t)$ . Astfel,

- pentru intrare impuls unitar, adică  $u(t) = \delta^0(t)$ , avem

$$w_p(t) = 0; \quad (48)$$

- pentru intrare rampă unitară, adică  $u(t) = t \cdot 1^0(t)$ , avem

$$w_p(t) = \frac{a_1 + 2a_2 + \dots + na_n}{(1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2} + \frac{t - n}{1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n}; \quad (49)$$

- pentru intrare exponențială, adică  $u(t) = a^t \cdot 1^0(t)$ , avem

$$w_p(t) = \frac{a^{t-n}}{1 + a_1 a^{-1} + a_2 a^{-2} + \dots + a_n a^{-n}}. \quad (50)$$

4<sup>0</sup>. Calcul analitic al răspunsului este uneori mai simplu în cazul utilizării modelului secundar sub forma

$$\begin{cases} w(t) + a_1 w(t-1) + \dots + a_n w(t-n) = u(t-1) \\ y(t) = b_0 w(t+1) + b_1 w(t) + \dots + b_r w(t+1-r) \end{cases} \quad (51)$$

sau

$$\begin{cases} w(t) + a_1 w(t-1) + \dots + a_n w(t-n) = u(t-n) \\ y(t) = b_0 w(t+n) + b_1 w(t+n-1) + \dots + b_r w(t+n-r) \end{cases} \quad (52)$$

În cazul modelului (52), toate condițiile inițiale  $w(0), w(1), \dots, w(n-1)$  sunt nule. Astfel, pentru intrare treaptă unitară, răspunsul  $w(t)$  se obține prin rezolvarea ecuației cu diferențe

$$w(t) + a_1 w(t-1) + \dots + a_n w(t-n) = 1$$

pentru

$$w(0) = w(1) = \dots = w(n-1) = 0. \quad (53)$$

■ În **MATLAB**, modelul de tip transfer intrare-ieșire ("input-output transfer") al unui sistem discret liniar monovariabil se construiește tot cu ajutorul funcției *tf*, astfel:

$$\bullet \text{ sisd} = \text{tf}(b,a,T);$$

unde  $b$  și  $a$  sunt vectori linie, formați cu coeficienții termenilor intrării, respectiv cu coeficienții termenilor ieșirii din ecuația primară (23), iar  $T$  este perioada de discretizare a timpului. Vectorii  $a$  și  $b$  trebuie să aibă aceeași dimensiune, anume  $\max(n+1, r+1)$ :

$$b = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_n], \quad a = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_n] \text{ – în cazul } r \leq n;$$

$$b = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_r], \quad a = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_r] \text{ – în cazul } r > n.$$

Prin urmare, în cazul  $n \neq r$ , ultimele elemente (din dreapta) ale unuia din cei doi vectori se aleg 0. Dacă însă  $b_0 = b_1 = \dots = b_j = 0$ , atunci argumentul de intrare  $b$  poate fi introdus și sub forma  $b = [b_{j+1} \ b_{j+2} \ \dots \ b_n]$  sau  $b = [b_{j+1} \ b_{j+2} \ \dots \ b_r]$ , după cum  $r \leq n$ , respectiv  $r > n$ .

Invers, din sistemul *sisd* se pot extrage matricele  $b$  și  $a$  la fel ca la sistemele continue, cu ajutorul funcției *tfdata* sau prin referire directă la proprietățile obiectului model.

Pentru calculul și reprezentarea grafică a răspunsului se utilizează aceleași funcții ca la sistemele continue de tip I-E (*step*, *impulse*, *lsim*). Dacă se utilizează argumentul de intrare  $t$ , introdus anterior cu comanda  $t=t_0:T:t_1$ , pasul  $T$  trebuie să fie egal cu perioada de discretizare a timpului modelului discret.

De asemenea, implementarea sistemelor compuse (tip serie, paralel, cu reacție) se face la fel ca la sistemele continue.

### 3.3. SISTEME ECHIVALENTE INTRARE-IEȘIRE

Prin definiție, două sisteme sunt *echivalente intrare-ieșire* dacă pentru orice funcție de intrare comună, de tip original, răspunsurile celor două sisteme sunt identice.

Sistemele liniare continue invariante cu modelul primar de forma

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_n u^{(n)} + b_{r-1} u^{(r-1)} + \dots + b_1 \dot{u} + b_0 u, \quad (54)$$

cu  $a_n \neq 0$ , sunt complet definite de coeficienții  $a_i$  ai derivatelor mărimii de ieșire și coeficienții  $b_i$  ai derivatelor mărimii de intrare, cu care se poate construi următoarea funcție rațională:

$$G(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}, \quad (55)$$

unde  $s$  este o variabilă reală sau complexă. Funcția  $G(s)$ , numită *funcție de transfer*, permite caracterizarea completă a sistemului sub aspectul corelației dinamice intrare-ieșire. Funcția de transfer se obține direct din ecuația diferențială a sistemului, și invers, ecuația diferențială a sistemului se poate scrie imediat din funcția de transfer, dacă aceasta este scrisă sub forma raportului a două polinoame ordonate după puterile descrescătoare ale variabilei  $s$ .

Două funcții de transfer  $G_1(s) = A(s)/B(s)$  și  $G_2(s) = C(s)/D(s)$ , cu  $A(s)$ ,  $B(s)$ ,  $C(s)$  și  $D(s)$  funcții polinomiale, sunt considerate *egale* atunci când pentru orice  $s \in \mathbb{C}$  are loc identitatea

$$A(s)D(s) = B(s)C(s),$$

adică atunci când funcțiile iau aceleași valori pentru toate valorile admisibile comune ale variabilei  $s$ . Două funcții de transfer egale au, evident, aceiași poli și aceleași zerouri.

In mod similar, sistemului liniar discret invariant cu modelul primar de forma

$$y(t) + a_1 y(t-1) + \dots + a_n y(t-n) = b_0 u(t) + b_1 u(t-1) + \dots + b_r u(t-r), \quad (56)$$

i se poate asocia funcția de transfer rațională

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_r z^{-r}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}, \quad (57)$$

unde  $z$  este o variabilă reală sau complexă.

Două sisteme continue sau discrete care au aceiași coeficienți  $a_i$  și  $b_i$ , deci aceeași funcție de transfer, sunt în mod evident echivalente intrare-ieșire (cazul trivial). Există însă și sisteme echivalente intrare-ieșire de ordin diferit.

**Teorema de echivalență intrare-ieșire.** *Două sisteme liniare invariante și monovariabile sunt echivalente intrare-ieșire dacă și numai dacă au funcții de transfer egale.*

În cazul sistemelor *continue*, demonstrarea teoremei se reduce la a arăta că oricare ar fi numărul real sau complex  $s_1$ , sistemul  $\mathbf{S}_1$  cu funcția de transfer

$$G_1(s) = \frac{(b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0)(s - s_1)}{(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0)(s - s_1)}$$

este echivalent intrare-ieșire cu sistemul  $\mathbf{S}$  cu modelul primar (54) și funcția de transfer (55). Fie  $u(t)$  o funcție de intrare comună, de tip original, a sistemelor  $\mathbf{S}$  și  $\mathbf{S}_1$ . Trebuie să arătăm că răspunsurile  $y(t)$  și  $y_1(t)$  ale sistemelor  $\mathbf{S}$  și  $\mathbf{S}_1$  sunt egale. Răspunsul  $y_1(t)$  al sistemului  $\mathbf{S}_1$  este dat de soluția ecuației diferențiale

$$a_n [y_1^{(n+1)} - s_1 y_1^{(n)}] + \dots + a_0 (\dot{y}_1 - s_1 y_1) = b_n [u^{(n+1)} - s_1 u^{(n)}] + \dots + b_0 (\dot{u} - s_1 u). \quad (58)$$

Prin efectuarea substituțiilor

$$w = \dot{y}_1 - s_1 y_1, \quad v = \dot{u} - s_1 u,$$

rezultă

$$a_n w^{(n)} + a_{n-1} w^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{w} + a_0 w = b_n v^{(n)} + b_{n-1} v^{(n-1)} + \dots + b_1 \dot{v} + b_0 v. \quad (59)$$

Deoarece ecuația (59) are forma identică cu cea a ecuației (54) a sistemului  $\mathbf{S}$ , rezultă că  $w(t)$  coincide cu răspunsul sistemului  $\mathbf{S}$  la intrarea  $v(t)$ , unde  $v = \dot{u} - s_1 u$ . În conformitate cu principiul superpoziției aplicat sistemului  $\mathbf{S}$ , relația  $v = \dot{u} - s_1 u$  implică  $w(t) = \dot{y} - s_1 y$ , deci  $\dot{y}_1 - s_1 y_1 = \dot{y} - s_1 y$ . Cu substituția

$$z = y_1 - y,$$

obținem ecuația diferențială  $\dot{z}=s_1z$ , cu soluția

$$z(t)=z(0_+)\cdot e^{s_1t}, \quad t \geq 0.$$

Pe de altă parte, din ecuațiile (54) și (58) rezultă

$$y(0_+) = y_1(0_+) = \frac{b_n}{a_n} u(0_+),$$

deci  $z(0_+)=0$  și, prin urmare,  $z(t)=0$  pentru orice  $t \geq 0$ , adică  $y_1(t)=y(t)$  pentru orice  $t \geq 0$ . Demonstrația este similară în cazul sistemelor *discrete*.

**Observații. 1°.** Conceptul de echivalență intrare-ieșire este aplicabil și la sistemele de tip I-S-E. Din teorema de echivalență intrare-ieșire rezultă că un sistem liniar monovariabil  $S_1$  de tip I-S-E este echivalent intrare-ieșire cu un sistem liniar monovariabil  $S$  de tip I-E dacă și numai dacă sistemul  $S_1$  poate fi transformat într-un sistem de tip I-E care să aibă funcția de transfer egală cu funcția de transfer a sistemului  $S$ . De asemenea, două sisteme liniare monovariabile de tip I-S-E sunt echivalente intrare-ieșire dacă cele două sisteme pot fi transformate în sisteme de tip I-E care să aibă funcțiile de transfer egale.

**2°.** Un sistem de ordinul  $n$  (continuu sau discret) se numește *minimal* dacă nu există un sistem echivalent intrare-ieșire cu ordinul mai mic decât  $n$ . Din teorema de echivalență intrare-ieșire rezultă

***Teorema de minimalitate.*** *Un sistem liniar monovariabil este minimal dacă și numai dacă polinoamele de la numărătorul și numitorul funcției de transfer sunt coprime (nu au rădăcini comune).*

Din teorema de minimalitate reiese că un sistem monovariabil este minimal dacă și numai dacă toate rădăcinile polinomului caracteristic sunt poli ai funcției de transfer, adică dacă și numai dacă *polinomul caracteristic* coincide cu *polinomul polilor*.

Prin simplificarea funcției de transfer, un sistem monovariabil neminimal poate fi transformat într-un sistem minimal echivalent intrare-ieșire.

### 3.4. DISCRETIZAREA SISTEMELOR CONTINUE DE TIP I-E

Sistemele discrete sunt sisteme artificiale, concepute și realizate de om. O categorie importantă de sisteme discrete este aceea rezultată prin discretizarea sistemelor continue, în vederea simulării lor numerice.



Două funcții de timp de tip original, una  $u(t)$  de timp continuu ( $t \in \mathbf{R}$ ) și cealaltă  $u^0(t)$  de timp discret ( $t = kT$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ), se numesc *T-echivalente* dacă au aceleași valori la toate momentele de timp  $t_k = kT$ . Echivalența este de *ordinul zero* dacă funcția de timp continuu  $u(t)$  este de tip *T-scară*, adică este constantă pe fiecare interval de timp  $[t_k, t_{k+1})$ :

$$u(t) = u(t_k), \quad t \in [t_k, t_{k+1}). \quad (60)$$

Dacă  $u(t)$  este de tip *T-rampă*, adică liniară și cu o anumită pantă pe fiecare interval  $[t_k, t_{k+1})$ , de exemplu  $[u(t_k) - u(t_{k-1})]/T$ , atunci echivalența celor două funcții de timp este de *ordinul unu*.

Prin definiție, un sistem liniar discret  $\Sigma^0$  reprezintă *discretizatul intrare-ieșire* (sau *echivalentul discret intrare-ieșire*) cu perioada  $T$  al unui sistem liniar continuu  $\Sigma$  atunci când ieșirile celor două sisteme sunt *T-echivalente* pentru orice intrări *T-echivalente* de ordinul zero.

Deoarece funcțiile treaptă unitară  $1(t)$  și  $1^0(t)$  sunt *T-echivalente* de ordinul zero, răspunsul indicial  $h(t)$  al unui sistem continuu și răspunsul indicial  $h^0(t)$  al discretizatului acestuia sunt *T-echivalente*.

Discretizatului cu perioada  $T$  al sistemului continuu pur integral cu modelul

$$T \dot{y} = u$$

are ecuația

$$y_k - y_{k-1} = u_{k-1}.$$

Răspunsurile idiciale ale celor două sisteme sunt *T-echivalente*, deoarece

$$h(t) = \frac{t}{T}, \quad t \geq 0,$$

$$h^0(t) = \frac{t}{T}, \quad t = kT, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

În general, pentru obținerea discretizatului intrare-ieșire al sistemului continuu propriu cu modelul matematic

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_r u^{(r)} + b_{r-1} u^{(r-1)} + \dots + b_1 \dot{u} + b_0 u, \quad (61)$$

se utilizează următoarea *metodologie*:

a) se determină *funcția de transfer* a sistemului continuu,

$$G(s) = \frac{b_r s^r + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}; \quad (62)$$

b) se calculează funcția de transfer a discretizatăului, cu relația<sup>1</sup>

$$G^0(z) = (1 - z^{-1}) \sum_{s_i} \operatorname{rez}_{s_i} \frac{G(s)}{s(1 - e^{Ts} z^{-1})}, \quad (63)$$

unde  $s_i$  sunt polii funcției  $G(s)/s$ , iar  $T$  perioada de discretizare (eșantionare);

c) se aduce  $G^0(z)$  la forma

$$G^0(z) = \frac{\bar{b}_0 + \bar{b}_1 z^{-1} + \dots + \bar{b}_r z^{-r}}{1 + \bar{a}_1 z^{-1} + \dots + \bar{a}_n z^{-n}} \quad (64)$$

și se scrie apoi ecuația discretizatăului I-E, sub forma ecuației cu diferențe

$$y_k + \bar{a}_1 y_{k-1} + \dots + \bar{a}_n y_{k-n} = \bar{b}_0 u_k + \bar{b}_1 u_{k-1} + \dots + \bar{b}_r u_{k-r}. \quad (65)$$

**Observații. 1<sup>o</sup>.** Din relația (63) reiese că dacă  $s_i$  este un pol al funcției de transfer  $G(s)$ , atunci  $z_i = e^{Ts_i}$  este pol al funcției de transfer  $G^0(z)$ . Echivalent, dacă  $G(s)$  are la numitor factorul  $T_1 s + 1$ , atunci  $G^0(z)$  va avea la numitor factorul

$$1 - pz^{-1}, \quad p = e^{-T/T_1}. \quad (66)$$

Pe de altă parte, ținând seama de (21) și (22), avem

$$h(0_+) = G(\infty), \quad h(\infty) = G(0), \quad (67)$$

iar din (46) și (47) rezultă

$$h^0(0_+) = G^0(\infty), \quad h^0(\infty) = G^0(1). \quad (68)$$

<sup>1</sup> Reziduul funcției  $F(s)$  relativ la polul simplu  $p$  este dat de relația

$$\operatorname{rez}_{s=p} F(s) = \left[ (s-p)F(s) \right]_{s=p}.$$

Dacă polul  $p$  are ordinul de multiplicitate  $m$ , atunci

$$\operatorname{rez}_{s=p} F(s) = \frac{1}{(m-1)!} \left[ (s-p)^m F(s) \right]^{(m-1)}_{s=p}.$$

Deoarece răspunsul indicial  $h(t)$  al sistemului continuu și răspunsul indicial  $h^0(t)$  al discretizatului acestuia sunt  $T$ -echivalente, avem  $h^0(0_+) = h(0_+)$  și  $h^0(\infty) = h(\infty)$ , deci

$$G^0(\infty) = G(\infty), \quad G^0(1) = G(0). \quad (69)$$

Pe baza proprietăților exprimate prin relațiile (66) și (69), se poate scrie ușor modelul discretizatului unui sistem continuu de ordinul unu de tip proporțional sau derivativ. Astfel, sistemul continuu de întârziere de ordinul unu cu ecuația diferențială

$$T_1 \dot{y} + y = Ku, \quad (70)$$

deci cu funcția de transfer

$$G(s) = \frac{K}{T_1 s + 1},$$

are discretizatului cu funcția de transfer

$$G^0(z) = \frac{K(1-p)z^{-1}}{1-pz^{-1}}, \quad p = e^{-T/T_1},$$

și ecuația cu diferențe

$$y_k - py_{k-1} = K(1-p)u_{k-1}. \quad (71)$$

Similar, sistemul continuu de tip derivativ cu ecuația

$$T_1 \dot{y} + y = T_d \dot{u}, \quad (72)$$

deci cu funcția de transfer

$$G(s) = \frac{T_d s}{T_1 s + 1},$$

are discretizatului cu funcția de transfer

$$G^0(z) = \frac{T_d}{T_1} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1-pz^{-1}}, \quad p = e^{-T/T_1},$$

și ecuația cu diferențe

$$y_k - py_{k-1} = \frac{T_d}{T_1} (u_k - u_{k-1}). \quad (73)$$

2°. Pentru  $K=T_1/T$ , din (70) și (71) rezultă că sistemul continuu cu ecuația diferențială

$$T_1 \dot{y} + y = \frac{T_1}{T} u,$$

are discretizatul cu ecuația cu diferențe

$$y_k - p y_{k-1} = \frac{T_1}{T} (1-p) u_{k-1}.$$

Efectuând  $T_1 \rightarrow \infty$ , obținem că sistemul continuu pur integral cu ecuația diferențială

$$T \dot{y} = u, \quad (74)$$

are discretizatul cu ecuația cu diferențe

$$y_k - y_{k-1} = T u_{k-1}. \quad (75)$$

Același rezultat se obține aplicând direct metodologia (62)-(65).

3°. Calculul discretizatului sistemelor continue de ordin superior este mult mai complicat. De aceea, în multe aplicații, se poate utiliza următoarea *metodă de discretizare aproximativă*: se reprezintă sistemul continuu sub forma unei conexiuni de subsisteme elementare de ordinul unu, apoi se efectuează discretizarea fiecărui subsistem elementar.

4°. O *altă metodă de discretizare aproximativă* a sistemului continuu cu modelul primar (61) constă în înlocuirea funcției de ieșire  $y(t)$  cu  $y_{k-1}$ , a funcției de intrare  $u(t)$  cu  $u_{k-1}$ , a derivatei  $\dot{y}(t)$  cu  $(y_k - y_{k-1})/T$ , a derivatei  $\dot{u}(t)$  cu  $(u_k - u_{k-1})/T$ , a derivatei  $\ddot{y}(t)$  cu  $(y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2})/T^2$ , formulă rezultată din

$$\frac{\dot{y}_k - \dot{y}_{k-1}}{T} = \frac{\frac{y_k - y_{k-1}}{T} - \frac{y_{k-1} - y_{k-2}}{T}}{T} = \frac{y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2}}{T^2},$$

și așa mai departe. În general, derivata  $y^{(i)}(t)$  se înlocuiește cu raportul

$$\frac{y_k - C_i^1 y_{k-1} + C_i^2 y_{k-2} + \dots + (-1)^i C_i^i y_{k-i}}{T^i}. \quad (76)$$

Metodele aproximative de discretizare sunt eficiente atunci când se utilizează o perioadă  $T$  de discretizare a timpului cu valoarea relativ mică.

Utilizând metoda de discretizare aproximativă, pentru discretizatul sistemului continuu de tip derivativ (72) obținem ecuația cu diferențe

$$\frac{T_1(y_k - y_{k-1})}{T} + y_{k-1} = \frac{T_d(u_k - u_{k-1})}{T},$$

echivalentă cu

$$y_k - \left(1 - \frac{T}{T_1}\right)y_{k-1} = \frac{T_d}{T_1}(u_k - u_{k-1}).$$

Se observă că acest model poate fi dedus din modelul discretizatului propriu-zis (73) prin aproximarea cunoscută

$$e^{-T/T_1} \approx 1 - T/T_1,$$

care este cu atât mai bună cu cât raportul  $T/T_1$  este mai mic.

**5°.** Datorită formei recursive a modelului intrare-ieșire, discretizatul propriu-zis și discretizații aproximativi ai unui sistem continuu pot fi utilizați în calculul numeric al răspunsului sistemului continuu la orice intrare de timp continuu  $u(t)$ . În acest scop, perioada de discretizare  $T$  se alege suficient de mică (dar nu exagerat de mică, pentru evitarea volumului mare de calcul și a acumulării erorilor de rotunjire și trunchiere). Dacă intrarea  $u(t)$  a sistemului continuu este de tip  $T$ -scară, atunci răspunsul sistemului continuu și răspunsul discretizatului propriu-zis sunt  $T$ -echivalente.

■ În Matlab, discretizatul intrare-ieșire *sisd* al sistemului continuu de tip intrare-ieșire *sis* se obține cu funcția

- `sisd = c2d(sis,T);`

unde  $T$  reprezintă perioada de discretizare.

### 3.5. SISTEME MONOTONICE

Un sistem continuu sau discret se numește *crescător monotonic* (*C-monotonic*) dacă are răspunsul  $y(t)$  crescător pentru orice intrare  $u(t)$  de tip original crescătoare. Dacă răspunsul este descrescător pentru orice intrare de tip original crescătoare, atunci sistemul este *descrescător monotonic* (*D-monotonic*). Un sistem de tip C-monotonic sau D-monotonic este un *sistem monotonic*.

**Teorema fundamentală a sistemelor monotone.** *Un sistem liniar, invariant și monovariabil este C-monotonic dacă și numai dacă are funcția pondere nenegativă sau, echivalent, dacă și numai dacă are funcția indicială crescătoare.*

*Demonstrație.* La sistemele liniare *continue*, din relațiile

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt}, \quad h(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau,$$

rezultă că funcția indicială  $h(t)$  a sistemului este crescătoare dacă și numai dacă funcția pondere  $g(t)$  este nenegativă, adică  $g(t) \geq 0$  pentru orice  $t$  real. Prin urmare, este suficient să demonstrăm numai prima parte a teoremei.

*Necesitatea.* Presupunem că sistemul este C-monotonic și arătăm că  $g(t) \geq 0$  pentru orice  $t$  real. Deoarece funcția treaptă unitară  $u = 1(t)$  este crescătoare, răspunsul indicial  $h(t)$  al unui sistem C-monotonic este crescător, deci

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} \geq 0.$$

*Suficiența.* Presupunem  $g(t) \geq 0$  pentru orice  $t$  real și arătăm că răspunsul  $y(t)$  al sistemului la orice funcție de intrare crescătoare de tip original  $u(t)$  este, de asemenea, o funcție crescătoare, adică  $y(t_1) \leq y(t_2)$  pentru orice  $t_1$  și  $t_2$ ,  $t_1 < t_2$ . Ținând seama de formula de convoluție, avem:

$$\begin{aligned} y(t_2) - y(t_1) &= \int_0^{t_2} g(\tau) u(t_2 - \tau) d\tau - \int_0^{t_1} g(\tau) u(t_1 - \tau) d\tau \\ &= \int_0^{t_1} g(\tau) [u(t_2 - \tau) - u(t_1 - \tau)] d\tau + \int_{t_1}^{t_2} g(\tau) u(t_2 - \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Deoarece  $g(\tau) \geq 0$  și  $u(t_2 - \tau) - u(t_1 - \tau) \geq 0$  pentru  $\tau \in \mathbf{R}$ , iar  $u(t_2 - \tau) \geq u(0-) = 0$  pentru  $\tau \leq t_2$ , rezultă  $y(t_2) - y(t_1) \geq 0$ .

La sistemele *discrete*, demonstrația este asemănătoare. În conformitate cu relația

$$g(t) = h(t) - h(t-1)$$

(valabilă pentru  $T = 1$ ), funcția indicială  $h(t)$  este crescătoare dacă și numai dacă funcția pondere  $g(t)$  este nenegativă, adică  $g(t) \geq 0$  pentru  $t \in \mathbf{Z}$ .

Suficiența rezultă din

$$\begin{aligned}
 y(t+1) - y(t) &= \sum_{i=0}^{t+1} g(t+1-i)u(i) - \sum_{i=0}^t g(t-i)u(i) \\
 &= \sum_{i=0}^{t+1} g(t+1-i)[u(i) - u(i-1)] \geq 0
 \end{aligned}$$

**Observații. 1<sup>0</sup>.** Având în vedere că funcția indicială a unui sistem liniar continuu și funcția indicială a discretizatăului propriu-zis sunt T-echivalente, adică au aceleași valori la momentele de timp  $t_k = kT$ , rezultă că discretizatul propriu-zis al unui sistem continuu C-monotonic este, de asemenea, un sistem C-monotonic.

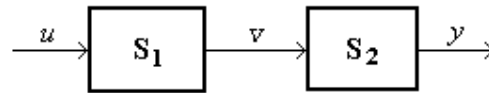
**2<sup>0</sup>.** O conexiune serie de sisteme C-monotonice este, de asemenea, un sistem C-monotonic. Intr-adevăr, pentru orice intrare  $u(t)$  de tip original crescătoare, răspunsul primului subsistem C-monotonic este crescător. Deoarece acest răspuns este aplicat la intrarea celui de-al doilea subsistem C-monotonic, răspunsul acestuia este crescător ș.a.m.d.

### 3.6. APLICAȚII REZOLVATE

♦ **Aplicația 3.1.** Fie conexiunea serie alăturată, formată din subsistemele:

$$(S_1) \quad 2\dot{v} + v = \dot{u} + u,$$

$$(S_2) \quad 4\dot{y} + y = 2v.$$



Să se afle răspunsul indicial, răspunsul pondere și răspunsul la intrare rampă unitară ale subsistemului  $S_1$  și ale conexiunii serie.

**Soluție.** Calculul *răspunsului indicial*  $h_1(t)$  al subsistemului  $S_1$  se face pe baza modelului secundar al acestuia, cu ecuațiile

$$2\dot{w} + w = 1, \quad w(0) = 0,$$

$$h_1 = \dot{w} + w.$$

Prin rezolvarea ecuației diferențiale în  $w$ , obținem:

$$w(t) = 1 - e^{-t/2},$$

apoi

$$h_1(t) = 1 - 0,5e^{-t/2}, \quad t \geq 0.$$

Subsistemul  $S_1$  are *răspunsul pondere*

$$g_1(t) = \frac{dh_1(t)}{dt} = \dot{h}_1(t) + h_1(0+)\delta_0(t) = 0,5\delta_0(t) + 0,25e^{-t/2}.$$

Deoarece funcția rampă unitară  $t \cdot 1(t)$  se obține prin integrarea funcției treaptă unitară  $1(t)$ , răspunsul  $s_1(t)$  la intrare rampă unitară poate fi obținut prin integrarea răspunsului  $h_1(t)$  la intrare treaptă unitară. Așadar,

$$s_1(t) = \int_0^t h_1(\tau) d\tau = t - 1 + e^{-t/2}.$$

Pentru calculul răspunsului indicial  $h(t)$  al conexiunii serie, pe baza modelului subsistemului  $S_2$  și a intrării  $v(t)$  determinate, egală cu  $h_1(t)$ , formăm ecuația diferențială

$$4\dot{y} + y = 2 - e^{-t/2}, \quad y(0) = 0.$$

Condiția inițială  $y(0)$  este nulă din teorema condițiilor inițiale nule, deoarece  $n-r=1$  pentru subsistemul  $S_2$ . Prin rezolvare, obținem

$$h(t) = y_p(t) + y_{omg}(t) = 2 + e^{-t/2} - 3e^{-t/4}.$$

Pentru calculul răspunsului indicial  $h(t)$  pe baza modelului sistemului compus, prin eliminarea variabilei  $v$  între ecuațiile celor două subsisteme, obținem modelul primar al conexiunii serie:

$$8\ddot{y} + 6\dot{y} + y = 2\dot{u} + 2u.$$

Pe baza modelului secundar, formăm ecuațiile:

$$8\ddot{w} + 6\dot{w} + w = 1, \quad w(0) = \dot{w}(0) = 0,$$

$$h = 2\dot{w} + 2w.$$

Prin rezolvare, obținem:

$$w(t) = 1 + e^{-t/2} - 2e^{-t/4}, \quad h(t) = 2 + e^{-t/2} - 3e^{-t/4}.$$

Conexiunea serie are răspunsul pondere

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \dot{h}(t) + h(0+)\delta_0(t) = -0,5e^{-t/2} + 0,75e^{-t/4}$$

și răspunsul la intrare rampă unitară

$$s(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau = 2t - 10 - 2e^{-t/2} + 12e^{-t/4}.$$

Răspunsul  $s(t)$  la intrare rampă unitară poate fi obținut și direct din modelul secundar, cu ecuațiile:

$$8\ddot{w} + 6\dot{w} + w = t, \quad w(0) = \dot{w}(0) = 0,$$

$$s = 2\dot{w} + 2w.$$

Rezultă:

$$w(t) = t - 6 - 2e^{-t/2} + 8e^{-t/4}, \quad s(t) = 2t - 10 - 2e^{-t/2} + 12e^{-t/4}.$$



Graficele din fig. 3.4 ale celor trei răspunsuri ale conexiunii serie au fost obținute în Matlab, cu programul:

```
sis1=tf([1 1],[2 1]); sis2=tf(2,[4 1]);
sis=sis1*sis2;
t=0:0.1:16;
h=step(sis,t); g=impulse(sis,t);
u=t; s=lsim(sis,u,t);
plot(t,h,t,g,t,s/10); grid on;
```

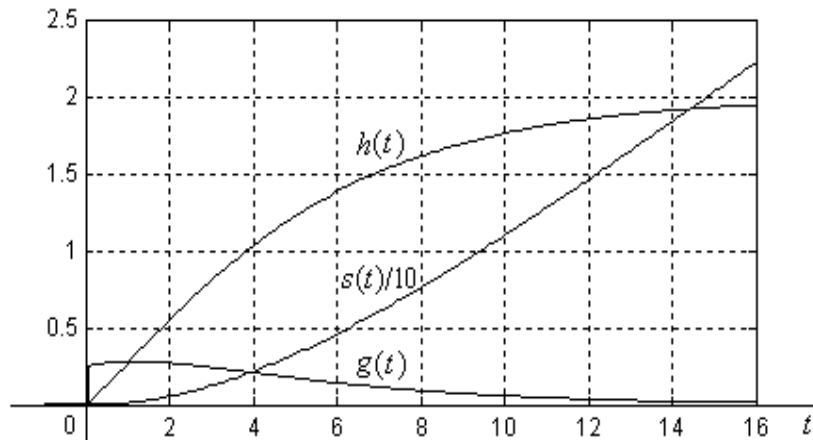


Fig. 3.4. Răspunsul indicial  $h(t)$ , răspunsul pondere  $g(t)$  și răspunsul  $s(t)$  la intrare rampă unitară.

◆ **Aplicația 3.2.** Să se arate că sistemul de ordinul doi cu ecuația

$$\ddot{y} + 2\xi\omega_n\dot{y} + \omega_n^2 y = \omega_n^2 u, \quad 0 < \xi < 1, \quad \omega_n > 0,$$

are răspunsul indicial

$$h(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \sin(\omega_1 t + \alpha),$$

unde

$$\cos \alpha = \xi, \quad \omega_1 = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}.$$

**Soluție.** Din modelul staționar

$$y = u,$$

rezultă că răspunsul indicial  $h(t)$  are valoarea finală egală cu valoarea finală a intrării treaptă unitară, adică 1. Răspunsul indicial este soluția ecuației diferențiale

$$\ddot{y} + 2\xi\omega_n\dot{y} + \omega_n^2 y = \omega_n^2, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0.$$

Ecuția caracteristică are rădăcinile

$$r_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_1.$$

Prin urmare, funcția indicială are forma

$$h(t) = 1 + C_1 e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_1 t + C_2).$$

Deoarece sistemul are ordinul relativ doi, funcția indicială satisface două condiții inițiale nule. Din condiția inițială  $\dot{h}(0) = 0$ , obținem

$$\operatorname{tg} C_2 = \frac{\omega_1}{\xi\omega_n} = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} = \operatorname{tg} \alpha,$$

deci  $C_2 = \alpha$ , iar din condiția inițială

$$h(0) = 0,$$

obținem

$$C_1 = \frac{-1}{\sin C_2} = \frac{-1}{\sin \alpha} = \frac{-1}{\sqrt{1-\xi^2}}.$$

Graficele răspunsurilor indiciale din fig. 3.5 au fost obținute în Matlab, cu programul:

```
cs=[0.2 0.5 0.7 1 2];
m=2; t=0:0.01:8;
for i=1:5
    sis=tf(m*m,[1 2*cs(i)*m m*m]);
    Y(:,i)=step(sis,t);
end
plot(t,Y); grid on;
```

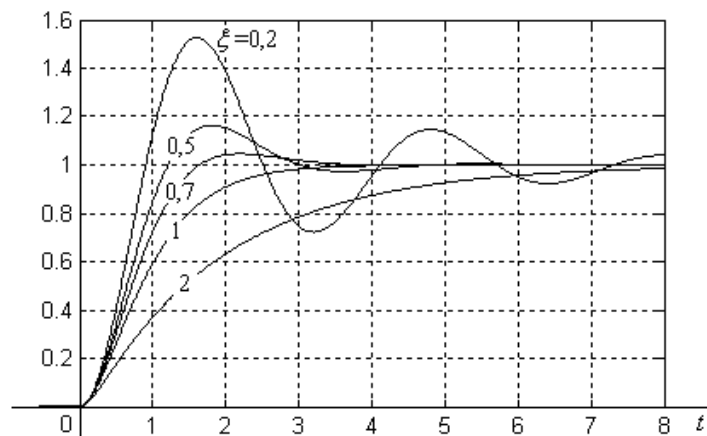


Fig. 3.5. Răspunsul indicial al sistemului de întârziere de ordinul doi, pentru diferite valori ale factorului de amortizare  $\xi$ .

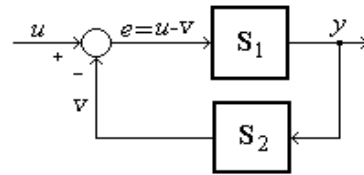
◆ **Aplicația 3.3.** Considerăm conexiunea cu reacție alăturată, în care:

$$(S_1) \quad 5\dot{y} + y = ke, \quad k > 0;$$

$$(S_2) \quad \dot{v} + v = y.$$

Pentru  $u=1(t)$ , să se afle  $y(t)$  și  $e(t)$  în cazurile:

- a)  $k=0,6$ ; b)  $k=0,8$ ; c)  $k=4$ .



**Soluție.** Prin eliminarea variabilelor  $e$  și  $v$ , obținem ecuația conexiunii cu intrarea  $u$  și ieșirea  $y$ :

$$5\ddot{y} + 6\dot{y} + (k+1)y = k(\dot{u} + u).$$

Similar, prin eliminarea variabilelor  $y$  și  $v$ , obținem ecuația conexiunii cu intrarea  $u$  și ieșirea  $e$ :

$$5\ddot{e} + 6\dot{e} + (k+1)e = 5\ddot{u} + 6\dot{u} + u.$$

Pentru  $u=1(t)$ , funcțiile  $y(t)$  și  $e(t)$  sunt date de ecuațiile

$$\begin{cases} 5\ddot{w} + 6\dot{w} + (k+1)w = 1, & w(0) = \dot{w}(0) = 0 \\ y = k(\dot{w} + w) \end{cases},$$

respectiv,

$$\begin{cases} 5\ddot{w} + 6\dot{w} + (k+1)w = 1, & w(0) = \dot{w}(0) = 0 \\ e = 5\ddot{w} + 6\dot{w} + w \end{cases}.$$

Prin rezolvare se obțin următoarele rezultate:

a) pentru  $k=0,6$ :

$$w(t) = 0,625 - 1,250e^{-0,4t} + 0,625e^{-0,8t},$$

$$y(t) = 0,375 - 0,450e^{-0,4t} + 0,075e^{-0,8t},$$

$$e(t) = 0,625 + 0,750e^{-0,4t} - 0,375e^{-0,8t}.$$

b) pentru  $k=0,8$ :

$$9w(t) = 5 - (3t + 5)e^{-0,6t},$$

$$9y(t) = 4 - (0,96t + 4)e^{-0,6t},$$

$$9e(t) = 5 + (2,4t + 4)e^{-0,6t}.$$

c) pentru  $k=4$ :

$$w(t) = 0,2 - e^{-0,6t}(0,2\cos 0,8t + 0,15\sin 0,8t),$$

$$y(t) = 0,8 + e^{-0,6t}(-0,8\cos 0,8t + 0,4\sin 0,8t),$$

$$e(t) = 0,2 + e^{-0,6t}(0,8\cos 0,8t + 0,9\sin 0,8t).$$

Graficele din fig. 3.6 cu cele trei răspunsuri  $y(t)$  ale conexiunii cu reacție au fost obținute în Matlab, cu programul:

```
k=[0.6 0.8 4]; t=0:0.1:10;
sis2=tf(1,[1 1]);
for i=1:3
    sis1=tf(k(i),[5 1]);
    sis= sis1/(1+sis1*sis2);
    Y(:,i)=step(sis,t);
end
plot(t,Y); grid on;
```

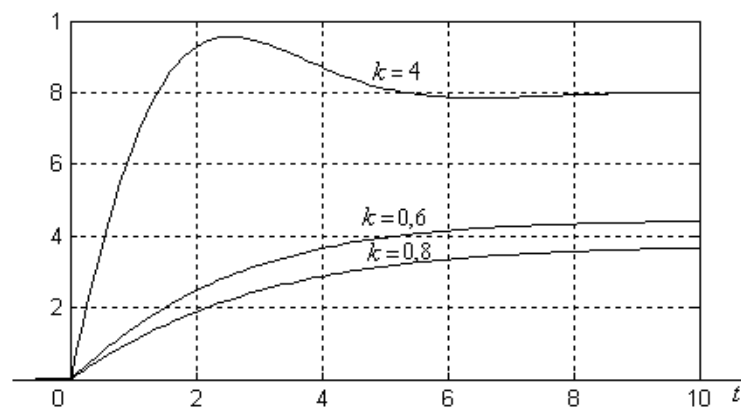


Fig. 3.6. Răspunsul indicial  $y(t)$  al conexiunii cu reacție pentru diferite valori ale parametrului  $k$ .

**Observație.** Conexiunea cu reacție, cu intrarea  $u$  și ieșirea  $e$ , are modelul staționar

$$(k+1)e=u.$$

Rezultă că pentru  $u=1(t)$ , eroarea  $e$  se va stabili la valoarea staționară

$$e_{st} = \frac{1}{k+1}.$$

Prin urmare, eroarea staționară este nenulă, dar cu atât mai mică cu cât factorul de proporționalitate  $k$  al subsistemului de pe calea directă este mai mare.

◆ **Aplicația 3.4.** Subsistemele conexiunii cu reacție din problema precedentă au ecuațiile:

$$\begin{aligned} (S_1) \quad & \dot{y} = e, \\ (S_2) \quad & 5\dot{v} + 6v = y. \end{aligned}$$

Să se afle: a)  $e(t)$  pentru  $u=1(t)$ ; b)  $y(t)$  pentru  $u=\sin t \cdot 1(t)$ .

**Soluție.** a) Sistemul cu intrarea  $u$  și ieșirea  $e$  are ecuația

$$5\ddot{e} + 6\dot{e} + e = 5\ddot{u} + 6\dot{u}.$$

Pentru  $u = 1(t)$ , răspunsul  $e(t)$  este dat de ecuațiile modelului secundar

$$\begin{cases} 5\ddot{w} + 6\dot{w} + w = 1, & w(0) = \dot{w}(0) = 0 \\ e = 5\ddot{w} + 6\dot{w} \end{cases}.$$

Prin rezolvare se obține:

$$e(t) = 1,25e^{-t/5} - 0,25e^{-t}.$$

Deoarece  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ , sistemul reușește în final să elimine eroarea produsă prin modificarea treaptă a intrării  $u$ . Acest rezultat se datorează acțiunii persistente, de tip integral, a subsistemului  $S_1$ . În realitate, sistemul elimină eroarea staționară (finală) pentru orice funcție de intrare care se stabilizează la o valoare finită. Într-adevăr, din ecuația dinamică a sistemului,  $5\ddot{e} + 6\dot{e} + e = 5\ddot{u} + 6\dot{u}$ , rezultă că în regimul staționar final, caracterizat prin  $\ddot{u} = \dot{u} = 0$  și  $\ddot{e} = \dot{e} = 0$ , avem  $e_{st} = 0$ .

b) Sistemul cu intrarea  $u$  și ieșirea  $y$  are ecuația

$$5\ddot{y} + 6\dot{y} + y = 5\ddot{u} + 6\dot{u}.$$

Răspunsul sistemului la intrarea  $u = \sin t \cdot 1(t)$  se obține prin rezolvarea ecuației diferențiale

$$5\ddot{y} + 6\dot{y} + y = 5\cos t + 6\sin t, \quad t \geq 0,$$

în condițiile inițiale  $y(t) = \dot{y}(0) = 0$ . Ambele condiții inițiale sunt nule deoarece funcția de intrare  $u(t) = \sin t \cdot 1(t)$  este continuă în origine, iar numărul condițiilor inițiale nule este cel puțin egal cu  $n - r + 1$ , adică cu 2. Rezultă

$$y(t) = \frac{125}{104}e^{-t/5} - \frac{1}{8}e^{-t} + \frac{3}{26}\sin t - \frac{14}{13}\cos t.$$

Componenta sinusoidală a răspunsului are amplitudinea

$$A = \sqrt{\left(\frac{3}{26}\right)^2 + \left(\frac{14}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{61}{52}}.$$

Graficele din fig. 3.7 cu cele două răspunsuri ale conexiunii cu reacție au fost obținute în Matlab, cu programul:

```
t=0:0.1:50;
sis1=tf(1,[1 0]); sis2=tf(1,[5 6]);
sis3=1/(1+sis1*sis2); e=step(sis3,t);
sis4= sis1/(1+sis1*sis2);
u=sin(t);
y=lsim(sis4,u,t);
plot(t,e,t,y); grid on;
```

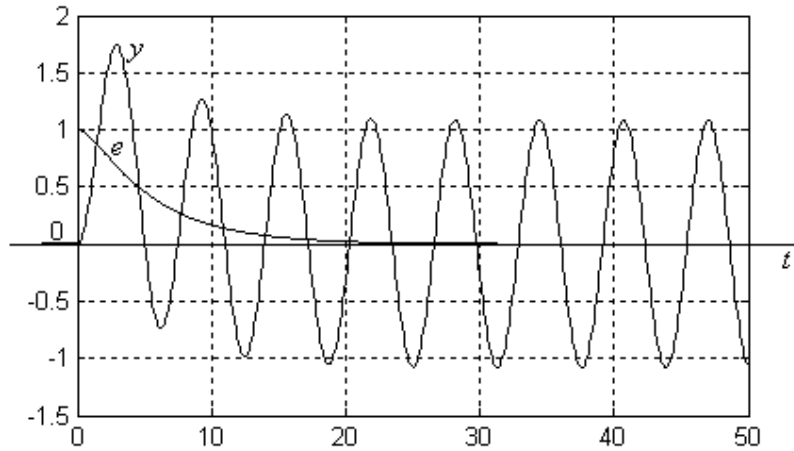


Fig. 3.7. Răspunsul  $e(t)$  la intrarea  $u=1(t)$  și răspunsul  $y(t)$  la intrarea  $u = \sin t \cdot 1(t)$ .

♦ **Aplicația 3.5.** Stiind că răspunsul indicial al unui sistem liniar este

$$h(t) = 2 - e^{-t},$$

să se afle răspunsul sistemului pentru:

$$\text{a) } u(t) = e^{-2t} \cdot 1(t); \quad \text{b) } u(t) = \begin{cases} t, & t \in [0, 1) \\ 1, & t \in [1, \infty) \end{cases}; \quad \text{c) } u(t) = \begin{cases} 1, & \tau \in [0, 1) \\ 0, & \tau \in [1, \infty) \end{cases}.$$

**Soluție.** a) Calculăm răspunsul pondere

$$g(t) = \dot{h}(t) + h(0_+) \delta_0(t) = e^{-t} + \delta_0(t),$$

apoi răspunsul la intrarea dată

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau = \int_0^t [e^{\tau-t} + \delta_0(t-\tau)]e^{-2\tau}d\tau = \int_0^t e^{-\tau-t}d\tau + e^{-2t} = e^{-t}.$$

b) Se observă că  $u(t) = u_1(t) - u_1(t-1)$ , unde  $u_1(t) = t \cdot 1(t)$  este funcția rampă unitară. Răspunsul  $s(t)$  la intrare rampă unitară este

$$s(t) = \int_0^t h(\tau)d\tau = 2t - 1 + e^{-t}.$$

Din principiul superpoziției rezultă:

$$y(t) = s(t) - s(t-1) = \begin{cases} s(t) & , t \in [0, 1) \\ s(t) - s(t-1) & , t \in [1, \infty) \end{cases} = \begin{cases} 2t - 1 + e^{-t} & , t \in [0, 1) \\ 2 - (e-1)e^{-t} & , t \in [1, \infty) \end{cases}.$$

c) Deoarece  $u(t) = 1(t) - 1(t-1)$ , din principiul superpoziției rezultă

$$y(t) = h(t) - h(t-1) = \begin{cases} h(t) & , t \in [0, 1) \\ h(t) - h(t-1) & , t \in [1, \infty) \end{cases} = \begin{cases} 2 - e^{-t} & , t \in [0, 1) \\ (e-1)e^{-t} & , t \in [1, \infty) \end{cases}.$$

◆ **Aplicația 3.6.** Se consideră sistemul discret cu modelul

$$y(t) - ay(t-1) = 2u(t), \quad t \in \mathbf{Z}.$$

Să se calculeze:

- funcția indicială;
- funcția pondere;
- răspunsul la intrarea  $u(t) = \sin \frac{\pi t}{6} \cdot 1^0(t)$ .

**Soluție.** a) *Metoda modelului secundar clasic.* Scriem modelul sub forma secundară echivalentă

$$\begin{cases} w(t) - aw(t-1) = u(t) \\ y(t) = 2w(t) \end{cases}.$$

Pentru  $u(t) = 1^0(t)$ , răspunsul  $w(t)$  pentru  $t \geq 0$  este soluția ecuației cu diferențe

$$w(t) - aw(t-1) = 1,$$

corespunzătoare condiției inițiale  $w(0) = 1$ .

În cazul  $a \neq 1$ , soluția particulară are forma

$$w_p(t) = \frac{1}{1-a}, \quad t \geq 1,$$

iar soluția ecuației omogene

$$w(t) - aw(t-1) = 0$$

are forma  $w_{omg}(t) = C_1 a^t$ . Rezultă

$$w(t) = \frac{1}{1-a} + C_1 a^t, \quad t \geq 1,$$

iar din condiția inițială  $w(0) = 1$ , obținem  $C_1 = \frac{-a}{1-a}$ ; prin urmare,

$$w(t) = \frac{1-a^{t+1}}{1-a}, \quad t \geq 0,$$

$$y(t) = 2w(t) = \frac{2(1-a^{t+1})}{1-a}, \quad t \geq 0.$$

În cazul  $a = 1$ , avem  $w_p(t) = t$  și  $w_{omg}(t) = C_1$ , deci  $w(t) = t + C_1$ ,  $t \geq 1$ . Din  $w(0) = 1$ , obținem:

$$w(t) = t + 1, \quad t \geq 0,$$

deci

$$y(t) = 2w(t) = 2(t+1), \quad t \geq 0.$$

La același rezultat se ajunge scriind soluția în cazul  $a \neq 1$  sub forma

$$y(t) = 2(1 + a + a^2 + \dots + a^t)$$

și înlocuind apoi pe  $a$  cu 1.

*Metoda modelului secundar* (51). Scriem modelul sub forma secundară echivalentă

$$\begin{cases} w(t) - aw(t-1) = u(t-1) \\ y(t) = 2w(t+1) \end{cases}.$$

Pentru  $u(t) = 1^0(t)$ , răspunsul  $w(t)$  pentru  $t \geq 0$  este soluția ecuației cu diferențe

$$w(t) - aw(t-1) = 1,$$

corespunzătoare condiției inițiale  $w(0) = 0$ .

In cazul  $a \neq 1$ , avem  $w_p(t) = \frac{1}{1-a}$  și  $w_{om} = C_1 a^t$ . Rezultă

$$w(t) = \frac{1}{1-a} + C_1 a^t, \quad t \geq 1,$$

iar din condiția inițială  $w(0) = 0$ , obținem:

$$w(t) = \frac{1-a^t}{1-a}, \quad t \geq 0;$$

prin urmare,

$$y(t) = 2w(t+1) = \frac{2(1-a^{t+1})}{1-a}, \quad t \geq 0.$$

In cazul  $a = 1$ , avem  $w_p(t) = t$  și  $w_{omg}(t) = C_1$ , deci  $w(t) = t + C_1$ ,  $t \geq 1$ . Din  $w(0) = 0$ , obținem:

$$w(t) = t, \quad t \geq 0,$$

deci

$$y(t) = 2w(t+1) = 2(t+1), \quad t \geq 0.$$

*Metoda inducției.* In ecuația sistemului se înlocuiește  $t$  succesiv cu valorile 0, 1, 2 etc. Avem:

$$y(0) = ay(-1) + 2 = 2,$$

$$y(1) = ay(0) + 2 = 2(a+1),$$

$$y(2) = ay(1) + 2 = 2(a^2 + a + 1),$$

care sugerează faptul că  $y(t) = 2(a^t + a^{t-1} + \dots + a + 1)$  pentru orice  $t$  natural. In conformitate cu principiul inducției, considerăm relația adevărată pentru  $t$  și arătăm că rămâne adevărată și pentru  $t+1$ , adică  $y(t+1) = 2(a^{t+1} + a^t + \dots + a + 1)$ . Intra-adevăr,



$$y(t+1) = ay(t) + 2 = 2a(a^t + a^{t-1} + \dots + a + 1) + 2 = 2(a^{t+1} + a^t + \dots + a + 1).$$

b) *Metoda directă.* Pentru  $u = \delta^0(t)$ , avem  $y(0) = 2$ . Pentru  $t \geq 1$ , ecuația sistemului are forma omogenă  $y(t) - ay(t-1) = 0$  și soluția  $y(t) = C_1 a^t$ . Din condiția inițială  $y(0) = 2$  se obține  $C_1 = 2$ . Prin urmare, funcția pondere a sistemului are expresia

$$y(t) = 2a^t, \quad t \geq 0.$$

*Metoda inducției.* Avem:

$$y(0) = ay(-1) + 2u(0) = 2, \quad y(1) = ay(0) + 2u(1) = 2a,$$

$$y(2) = ay(1) + 2u(2) = 2a^2, \quad y(3) = ay(2) + 2u(3) = 2a^3,$$

deci  $y(t) = 2a^t, \quad t \geq 0$ .

*Metoda indirectă.* Cu relația  $g(t) = h(t) - h(t-1)$ , obținem

$$g(t) = \frac{2(1-a^{t+1})}{1-a} - \frac{2(1-a^t)}{1-a} = 2a^t, \quad t \geq 0.$$

c) Pentru  $u(t) = \sin \frac{\pi t}{6} \cdot 1^0(t)$ , ecuația sistemului devine

$$y(t) - ay(t-1) = 2 \sin \frac{\pi t}{6}, \quad t \geq 0.$$

Soluția particulară a ecuației este de forma

$$y_p(t) = A \sin \frac{\pi t}{6} + B \cos \frac{\pi t}{6}, \quad t \geq 1.$$

Ea verifică ecuația dată pentru

$$A = \frac{8 - 4\sqrt{3}a}{(2 - \sqrt{3}a)^2 + a^2}, \quad B = \frac{-4a}{(2 - \sqrt{3}a)^2 + a^2}.$$

Soluția generală este de forma

$$y(t) = C_1 a^t + A \sin \frac{\pi t}{6} + B \cos \frac{\pi t}{6}, \quad t \geq 1,$$

iar din condiția inițială  $y(0) = 0$  rezultă:

$$y(t) = A \sin \frac{\pi t}{6} - B(a^t - \cos \frac{\pi t}{6}), \quad t \geq 0.$$

Componenta sinusoidală a răspunsului sistemului are amplitudinea

$$A_1 = \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{4}{\sqrt{(2 - \sqrt{3}a)^2 + a^2}}.$$

Graficele din fig. 3.8, reprezentând răspunsurile sistemului pentru  $a = 0,8$ , au fost obținute în Matlab, cu programul:

```

t=0:1:18;
sisd=tf([2 0],[1 -0.8],1);
h=step(sisd,t);
g=impz(sisd,t);
y1=lsim(sisd,sin(pi*t/6),t); hold on;
plot(t,h,'-'); plot(t,g,'-'); plot(t,y1,'-');
grid on;

```

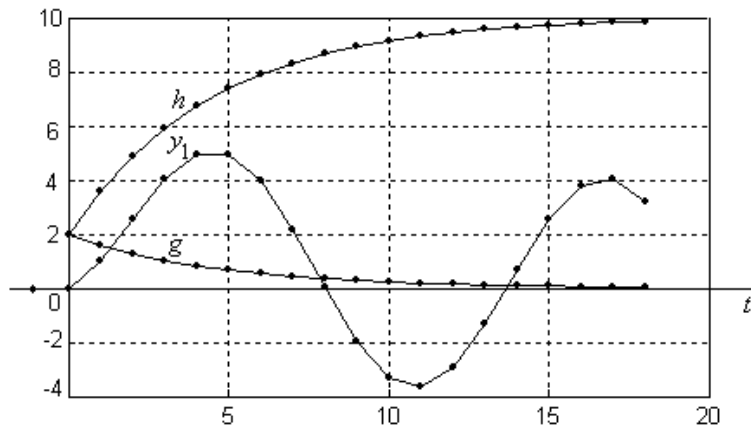


Fig. 3.8. Răspunsul indicial  $h(t)$ , răspunsul pondere  $g(t)$  și răspunsul  $y_1(t)$  la intrarea  $u(t) = \sin \frac{\pi t}{6} \cdot 1^0(t)$  pentru sistemul cu ecuația  $y(t) - 0,8y(t-1) = u(t)$ .

◆ **Aplicația 3.7.** Pentru sistemul discret cu modelul

$$y(t) - ay(t-1) = b_1u(t-1) + b_2u(t-2), \quad t \in \mathbf{Z},$$

să se calculeze: a) funcția indicială; b) funcția pondere.

**Soluție.** (a) Scriem modelul sub forma secundară (51):

$$\begin{cases} w(t) - aw(t-1) = u(t-1) \\ y(t) = b_1w(t) + b_2w(t-1) \end{cases}$$

Pentru  $u(t) = 1^0(t)$ , răspunsul  $w(t)$  satisface ecuația cu diferențe

$$w(t) - aw(t-1) = 1$$

pentru  $t \geq 1$  și  $w(0) = 0$ .

In cazul  $a \neq 1$ , avem  $w(t) = \frac{1}{1-a} + C_1 a^t$ ,  $t \geq 1$ . Din condiția inițială  $w(0) = 0$ , rezultă

$$w(t) = \frac{1-a^t}{1-a}, \quad t \geq 0.$$

Prin urmare

$$y(t) = b_1 \frac{1-a^t}{1-a} \cdot 1^0(t) + b_2 \frac{1-a^{t-1}}{1-a} \cdot 1^0(t-1),$$

și de aici

$$y(0) = 0,$$

$$y(t) = b_1 \frac{1-a^t}{1-a} + b_2 \frac{1-a^{t-1}}{1-a}, \quad t \geq 1.$$

În cazul  $a=1$ , avem  $w(t)=t+C_1$ ,  $t \geq 1$ , iar din condiția inițială  $w(0)=0$  obținem  $w(t)=t$ ,  $t \geq 0$ . Rezultă  $y(t)=b_1 t \cdot 1^0(t) + b_2(t-1) \cdot 1^0(t-1)$ , deci

$$y(0)=0, \quad y(t)=(b_1+b_2)t-b_2, \quad t \geq 1.$$

b) Pentru  $u=\delta^0(t)$ , din ecuația sistemului rezultă  $y(0)=0$  și  $y(1)=b_1$ . Pentru  $t \geq 2$ , utilizând relația  $g(t)=h(t)-h(t-1)$ , obținem

$$g(t) = b_1 \frac{1-a^t}{1-a} + b_2 \frac{1-a^{t-1}}{1-a} - b_1 \frac{1-a^{t-1}}{1-a} - b_2 \frac{1-a^{t-2}}{1-a} = (b_1 a + b_2) a^{t-2}.$$

◆ **Aplicația 3.8.** Fie sistemul discret

$$10y(t) - ay(t-1) + y(t-2) = 4u(t-1), \quad t \in \mathbf{Z}.$$

Să se calculeze răspunsul indicial și răspunsul pondere în cazurile: a)  $a=7$ ; b)  $a=2$ .

**Soluție.** a) *Metoda modelului secundar* (51). Modelul secundar are chiar forma modelului primar, adică

$$10y(t) - 7y(t-1) + y(t-2) = 4u(t-1).$$

Pentru  $u=1^0(t)$ , rezultă imediat  $y(0)=0$  și  $y(1)=2/5$ . În plus, pentru  $t \geq 1$ , avem

$$10y(t) - 7y(t-1) + y(t-2) = 4.$$

Această ecuație cu diferențe are soluția generală

$$y(t) = 1 + C_1 \cdot 0,5^t + C_2 \cdot 0,2^t, \quad t \geq 2.$$

Din condițiile inițiale  $y(0)=0$  și  $y(1)=2/5$ , rezultă răspunsul indicial

$$h(t) = 1 - \frac{4}{3} \cdot 0,5^t + \frac{1}{3} \cdot 0,2^t, \quad t \geq 0.$$

Răspunsul pondere este

$$g(t) = h(t) - h(t-1) = \frac{4}{3}(0,5^t - 0,2^t), \quad t \geq 0.$$

Metoda modelului secundar (52). Scriem modelul sub forma secundară echivalentă

$$\begin{cases} 10w(t) - 7w(t-1) + w(t-2) = u(t-2) \\ y(t) = 4w(t+1) \end{cases}$$

Pentru  $u = 1^0(t)$ , rezultă imediat  $w(0) = w(1) = 0$ . În plus, pentru  $t \geq 2$ , avem

$$10w(t) - 7w(t-1) + w(t-2) = 1.$$

Rezultă

$$w(t) = \frac{1}{4} + C_1 \cdot 0,5^t + C_2 \cdot 0,2^t, \quad t \geq 2,$$

apoi

$$w(t) = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} \cdot 0,5^t + \frac{5}{12} \cdot 0,2^t, \quad t \geq 0.$$

Răspunsul indicial are expresia

$$h(t) = 4w(t+1) = 1 - \frac{4}{3} \cdot 0,5^t + \frac{1}{3} \cdot 0,2^t, \quad t \geq 0.$$

b) Utilizăm modelul primar

$$10y(t) - 2y(t-1) + y(t-2) = 4u(t-1).$$

Pentru  $u = 1^0(t)$ , rezultă imediat  $y(0) = 0$  și  $y(1) = 2/5$ . În plus, pentru  $t \geq 1$ , avem

$$10y(t) - 2y(t-1) + y(t-2) = 4.$$

Ecuția caracteristică  $10z^2 - 2z + 1 = 0$  are rădăcinile

$$z_{1,2} = \frac{1 \pm 3j}{10} = \rho(\cos \alpha \pm j \sin \alpha),$$

unde  $\rho = 1/\sqrt{10}$ ,  $\cos \alpha = 1/\sqrt{10}$ ,  $\sin \alpha = 3/\sqrt{10}$ . Prin urmare, ecuația cu diferențe are soluția generală

$$y(t) = \frac{4}{9} + 10^{-t/2}(C_1 \cos \alpha t + C_2 \sin \alpha t), \quad t \geq 2.$$

Din condițiile inițiale  $y(0) = 0$  și  $y(1) = 2/5$ , rezultă răspunsul indicial

$$h(t) = \frac{4}{9}(1 - 10^{-t/2} \cos \alpha t), \quad t \geq 0.$$

Răspunsul pondere se obține astfel

$$g(t) = h(t) - h(t-1) = \frac{4}{3} \cdot 10^{-t/2} \sin \alpha t, \quad t \geq 0.$$

Graficele din fig. 3.9, reprezentând răspunsurile sistemului pentru cazurile  $a = 7$  și  $a = 2$  au fost obținute în Matlab, cu programul:

```

t=0:1:8;
a=7; sisd=tf([0 4 0],[10 -a 1],1);
h1=step(sisd,t); g1=impulse(sisd,t);
a=2; sisd=tf([0 4 0],[10 -a 1],1);
h2=step(sisd,t); g2=impulse(sisd,t); hold on;
plot(t,h1,'-'); plot(t,g1,'-');
plot(t,h2,'-'); plot(t,g2,'-'); grid on;

```

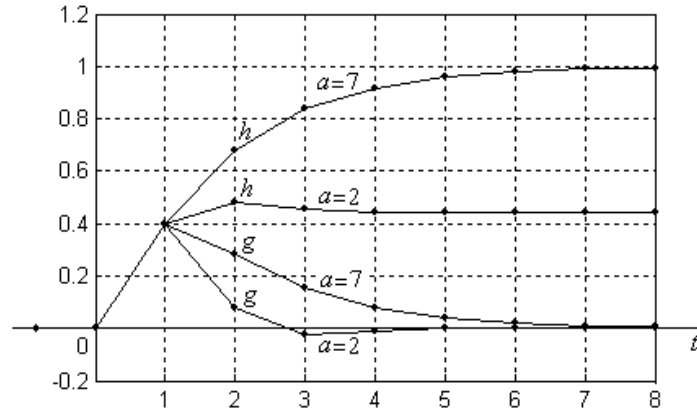


Fig. 3.9. Funcția indicială  $h$  și funcția pondere  $g$  ale sistemului cu ecuația

$$10y(t) - ay(t-1) + y(t-2) = 4u(t-1).$$

◆ **Aplicația 3.9.** Să se determine răspunsul indicial al sistemului discret

$$y_k - (a+b)y_{k-1} + aby_{k-2} = (1-a)(1-b)u_{k-2}, \quad k \in \mathbf{Z},$$

pentru  $a \neq 1$ ,  $b \neq 1$ .

**Soluție.** Scriem modelul sub forma secundară echivalentă (52):

$$\begin{cases} w_k - (a+b)w_{k-1} + abw_{k-2} = (1-a)(1-b)u_{k-2} \\ y_k = w_{k-2} \end{cases}.$$

Pentru  $u_k = 1^0(k)$ , rezultă imediat  $w_0 = 0$  și  $w_1 = 0$ . În plus, pentru  $k \geq 2$ , avem

$$w_k - (a+b)w_{k-1} + abw_{k-2} = (1-a)(1-b).$$

*Cazul  $a \neq b$ .* Ecuația cu diferențe are soluția generală

$$w_k = 1 + C_1 a^k + C_2 b^k, \quad k \geq 2,$$

iar din condițiile inițiale  $w_0 = 0$  și  $w_1 = 0$ , obținem

$$w_k = 1 - \frac{1-b}{a-b} a^k - \frac{1-a}{b-a} b^k, \quad k \geq 0.$$

Din  $y_k = w_{k-2}$ , rezultă

$$y_0 = y_1 = 0,$$

$$y_k = 1 - \frac{1-b}{a-b} a^{k-2} - \frac{1-a}{b-a} b^{k-2}, \quad k \geq 2.$$

Cazul  $a = b$ . Ecuația cu diferențe

$$w_k - 2aw_{k-1} + a^2w_{k-2} = (1-a)^2, \quad a \neq 1,$$

are soluția generală

$$w_k = 1 + (C_1k + C_2)a^k, \quad k \geq 2.$$

iar din condițiile inițiale  $w_0 = 0$  și  $w_1 = 0$ , obținem

$$w_k = 1 + [(a-1)k - a]a^{k-1}, \quad k \geq 0.$$

Din  $y_k = w_{k-2}$ , rezultă

$$y_0 = y_1 = 0,$$

$$y_k = 1 - [(1-a)k + 3a - 2]a^{k-3}, \quad k \geq 2.$$

♦ **Aplicația 3.10.** Fie conexiunea serie atașată, formată din subsistemele discrete:

(S<sub>1</sub>)  $v_k - 0,2v_{k-1} = 0,1u_k + 0,7u_{k-1}$ ,       $u \rightarrow \boxed{S_1} \xrightarrow{v} \boxed{S_2} \xrightarrow{y}$

(S<sub>2</sub>)  $y_k + 0,5y_{k-1} = 2,1v_{k-2}$ .

Să se afle răspunsul indicial și răspunsul pondere ale conexiunii serie.

**Soluție.** *Metoda 1.* Scriem modelul subsistemului S<sub>1</sub> sub forma

$$\begin{cases} w_k - 0,2w_{k-1} = u_{k-1} \\ v_k = 0,1w_{k+1} + 0,7w_k \end{cases}.$$

Pentru  $u_k = 1^0(k)$ , avem  $w_0 = 0$  și

$$w_k - 0,2w_{k-1} = 1, \quad k \geq 1.$$

Rezultă

$$w_k = \frac{5}{4} + C_1 \cdot 0,2^k, \quad k \geq 1,$$

$$w_k = \frac{5}{4}(1 - 0,2^k), \quad k \geq 0,$$

apoi

$$v_k = 1 - 0,9 \cdot 0,2^k, \quad k \geq 0.$$

Pentru calculul răspunsului indicial  $y_k$ , scriem modelul subsistemului  $S_2$  sub forma

$$\begin{cases} w_k + 0,5w_{k-1} = v_{k-1} \\ y_k = 2,1w_{k-1} \end{cases}.$$

Pentru  $v_k = 1 - 0,9 \cdot 0,2^k$ ,  $k \geq 0$ , răspunsul  $w_k$  satisface  $w_0 = 0$  și

$$w_k + 0,5w_{k-1} = 1 - 0,9 \cdot 0,2^{k-1}, \quad k \geq 1.$$

Rezultă

$$w_k = \frac{2}{3} - \frac{9}{7} \cdot 0,2^k + C_1 \cdot (-0,5)^k, \quad k \geq 1,$$

$$w_k = \frac{2}{3} - \frac{9}{7} \cdot 0,2^k + \frac{13}{21} \cdot (-0,5)^k, \quad k \geq 0,$$

iar din  $y_k = 2,1w_{k-1}$ , obținem răspunsul indicial al conexiunii

$$h_0 = 0,$$

$$h_k = 1,4 - 2,7 \cdot 0,2^{k-1} + 1,3 \cdot (-0,5)^{k-1}, \quad k \geq 1.$$

Din relația  $g_k = h_k - h_{k-1}$ , obținem răspunsul pondere al conexiunii

$$g_0 = g_1 = 0,$$

$$g_k = 10,8 \cdot 0,2^{k-1} + 3,9(-0,5)^{k-1}, \quad k \geq 2.$$

*Metoda 2.* Prin eliminarea variabilelor  $v_k$ ,  $v_{k-1}$  și  $v_{k-2}$  între ecuațiile celor două subsisteme (care se poate realiza înlocuind pe  $v_k$  și  $v_{k-1}$  în prima ecuație cu expresiile corespunzătoare obținute din a doua ecuație), obținem ecuația conexiunii serie sub forma primară

$$y_k + 0,3y_{k-1} - 0,1y_{k-2} = 0,21u_{k-2} + 1,47u_{k-3}.$$

Formăm modelul secundar sub forma (52):

$$\begin{cases} w_k + 0,3w_{k-1} - 0,1w_{k-2} = 0,21u_{k-2} \\ y_k = w_k + 7w_{k-1} \end{cases}.$$

Pentru  $u_k = 1^0(k)$ , răspunsul  $w_k$  satisface  $w_0 = 0$ ,  $w_1 = 0$  și

$$w_k + 0,3w_{k-1} - 0,1w_{k-2} = 0,21, \quad k \geq 2.$$

Rezultă

$$w_k = \frac{7}{40} + C_1 \cdot 0,2^k + C_2 \cdot (-0,5)^k, \quad k \geq 2,$$

$$w_k = \frac{7}{40} - \frac{3}{8} \cdot 0,2^k + \frac{1}{5} \cdot (-0,5)^k, \quad k \geq 0,$$

iar din  $y_k = w_k + 7w_{k-1}$ , obținem

$$y_0 = 0,$$

$$y_k = 1,4 - 2,7 \cdot 0,2^{k-1} + 1,3 \cdot (-0,5)^{k-1}, \quad k \geq 1.$$

În fig. 3.10 sunt reprezentate grafic răspunsul indicial  $h(t)$  și răspunsul pondere  $g(t)$  ale sistemului.

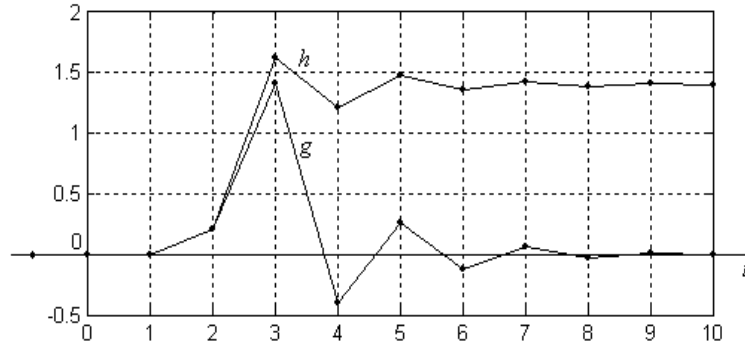


Fig. 3.10. Funcția indicială  $h$  și funcția pondere  $g$  ale conexiunii serie.

Graficele au fost obținute în Matlab, cu programul

```
t=0:1:10;
sis1=tf([0.1 0.7],[1 -0.2],1);
sis2=tf([0 0 2.1],[1 0.5 0],1);
sis=sis1*sis2;
h=step(sis,t); g=impz(sis,t);
plot(t,h,'-o',t,g,'-o'); grid on;
```

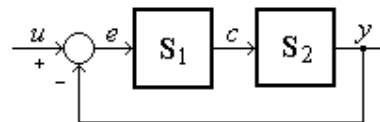
sau cu programul

```
t=0:1:10;
h=1.4-2.7*(0.2)^(t-1)+1.3*(-0.5)^(t-1); h(1)=0;
g=10.8*(0.2)^(t-1)+3.9*(-0.5)^(t-1); g(1)=0; g(2)=0;
plot(t,h,'-o',t,g,'-o');
grid on;
```

◆ **Aplicația 3.11.** Considerăm conexiunea cu reacție alăturată, în care:

$$(S_1) \quad c_k - c_{k-1} = K e_k,$$

$$(S_2) \quad y_k - 0,8y_{k-1} = c_{k-1}.$$



Să se afle răspunsul indicial al sistemului pentru  $K=0,01$ .



**Soluție.** Prin eliminarea variabilei  $c$  între ecuațiile

$$c_k - c_{k-1} = K(u_k - y_k), \quad y_k - 0,8y_{k-1} = c_{k-1},$$

obținem modelul conexiunii:

$$y_k - (1,8 - K)y_{k-1} + 0,8y_{k-2} = Ku_{k-1}.$$

In cazul  $K=0,01$ , scriem modelul sub forma secundară (52):

$$\begin{cases} w_k - 1,79w_{k-1} + 0,8w_{k-2} = 0,01u_{k-2} \\ y_k = w_{k+1} \end{cases}.$$

Pentru  $u_k = 1^0(k)$ , răspunsul  $w_k$  satisface  $w_0 = 0$ ,  $w_1 = 0$  și

$$w_k - 1,79w_{k-1} + 0,8w_{k-2} = 0,01, \quad k \geq 2$$

Rezultă

$$w_k = 1 + C_1 \cdot a^k + C_2 \cdot b^k, \quad k \geq 2,$$

unde  $a \approx 0,927$  și  $b \approx 0,863$  sunt rădăcinile ecuației caracteristice

$$z^2 - 1,79z + 0,8 = 0.$$

Din condițiile inițiale obținem

$$C_1 = \frac{b-1}{a-b} \approx -2,14, \quad C_2 = \frac{a-1}{b-a} \approx 1,14,$$

deci

$$w_k \approx 1 - 2,14a^k + 1,14b^k, \quad k \geq 0.$$

Așadar,

$$y_k = w_{k+1} \approx 1 - 1,98a^k + 0,98b^k, \quad k \geq 0.$$

Graficele din fig. 3.11, cu răspunsurile indiciale ale sistemului pentru trei valori diferite ale parametrului  $K$ , au fost obținute în Matlab cu programul:

```
t=0:1:60;
K=[0.01 0.03 0.1];
sisd2=tf([0 1],[1 -0.8],1);
for i=1:3;
    sisd1=tf([K(i) 0],[1 -1],1);
    sisd3=sisd1*sisd2;
    sisd=feedback(sisd3,1,-1);
    Y(:,i)=step(sisd,t);
end
plot(t,Y, '-');
grid on;
```

sau cu programul

```
t=0:1:60;
K=[0.01 0.03 0.1];
for i=1:3;
    sisd=tf([0 K(i) 0],[1 K(i)-1.8 0.8],1);
    Y(:,i)=step(sisd,t);
end
plot(t,Y, '-');
grid on;
```

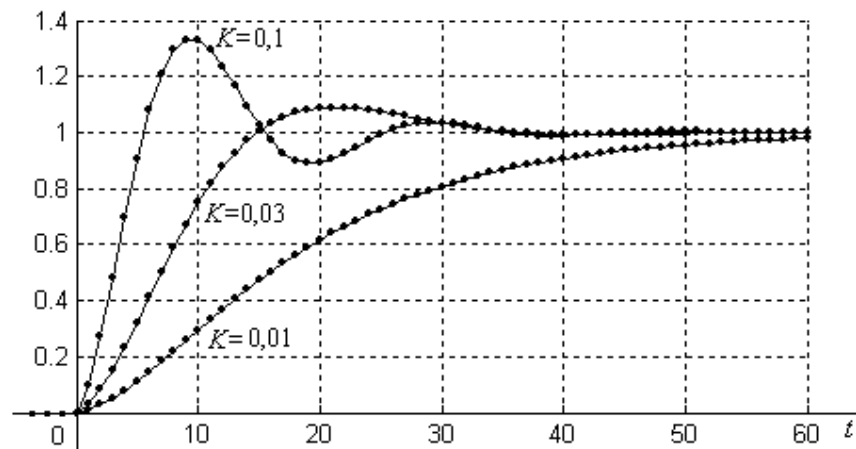


Fig. 3.11. Funcțiile indiciale ale sistemului închis pentru  $K=0,01$ ;  $K=0,03$ ;  $K=0,1$ .

◆ **Aplicația 3.12.** Să se afle parametrul real  $m$  astfel încât sistemul

$$6\ddot{y} + m\dot{y} + 2y = 2\dot{u} + u$$

să fie echivalent intrare-ieșire cu un sistem de ordinul unu.

**Soluție.** Sistemul are funcția de transfer

$$G(s) = \frac{2s+1}{6s^2 + ms + 2}.$$

Aceasta se simplifică atunci când rădăcina  $s_1 = \frac{-1}{2}$  a polinomului de la numărător este și rădăcină a polinomului de la numitor. Punând această condiție, rezultă  $m = 7$  și

$$G(s) = \frac{2s+1}{(2s+1)(3s+2)} = \frac{1}{3s+2}.$$

În consecință, sistemul dat este minimal pentru  $m \neq 7$ . Dacă  $m = 7$ , atunci sistemul este echivalent intrare-ieșire cu sistemul minimal de ordinul unu  $3\dot{y} + 2y = u$ .

◆ **Aplicația 3.13.** Să se arate că sistemele

$$S_1: 6\ddot{y} + 5\dot{y} + y = 2\dot{u} + u$$

$$S_2: 3\ddot{y} + 4\dot{y} + y = \dot{u} + u$$

sunt echivalente intrare-ieșire și neminimale.

**Soluție.** Sistemele au funcțiile de transfer

$$G_1(s) = \frac{2s+1}{6s^2+5s+1},$$

respectiv

$$G_2(s) = \frac{s+1}{3s^2+4s+1}.$$

Cele două sisteme sunt echivalente intrare-ieșire deoarece

$$(2s+1)(3s^2+4s+1) = (s+1)(6s^2+5s+1)$$

sentru orice  $s$  complex. De asemenea, avem

$$G_1(s) = \frac{2s+1}{(2s+1)(3s+1)} = \frac{1}{3s+1},$$

$$G_2(s) = \frac{s+1}{(s+1)(3s+1)} = \frac{1}{3s+1}.$$

Ambele sisteme sunt echivalente intrare-ieșire cu sistemul minimal de ordinul unu  $3\dot{y} + y = u$ .

◆ **Aplicația 3.14.** Să se arate că pentru  $m = -2$  și  $m = -0,5$ , sistemul liniar continuu de ordinul doi de tip I-S-E

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + mx_2 - u \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - x_2 + 2u \\ y = x_1 - x_2 \end{cases},$$

este echivalent intrare-ieșire cu un sistem de ordinul unu.

**Soluție.** Pentru  $m = -2$ , din  $y = x_1 - x_2$  și  $\dot{y} = \dot{x}_1 - \dot{x}_2 = x_1 - x_2 - 3u$ , rezultă  $-\dot{y} + y = 3u$ .

Prin urmare, sistemul dat este echivalent intrare-ieșire cu sistemul de tip I-E

$$-\dot{y} + y = 3u,$$

respectiv cu sistemul de tip I-S-E

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 3u \\ y = x_1 \end{cases}.$$

Pentru  $m = -0,5$ , avem

$$y = x_1 - x_2$$

$$\dot{y} = \dot{x}_1 - \dot{x}_2 = x_1 + 0,5x_2 - 3u,$$

$$\ddot{y} = \dot{x}_1 + 0,5\dot{x}_2 - 3\dot{u} = -2x_1 - x_2 - 3\dot{u},$$

de unde rezultă

$$\ddot{y} + 2\dot{y} = -3\dot{u} - 6u.$$

Sistemul obținut are funcția de transfer

$$G(s) = \frac{-3s - 6}{s^2 + 2s} = \frac{-3}{s}.$$

Prin urmare, sistemul dat este echivalent intrare-ieșire cu sistemul pur integral de tip I-E

$$\dot{y} = -3u,$$

respectiv cu sistemul de tip I-S-E

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u \\ y = -3x_1 \end{cases}.$$

◆ **Aplicația 3.15.** Să se afle parametrul  $m$  astfel încât sistemul discret

$$y(t) + (m+1)y(t-1) + y(t-2) = u(t) + u(t-1)$$

să fie echivalent intrare-ieșire cu un sistem de ordinul unu.

**Soluție.** Sistemul are funcția de transfer

$$G(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 + (m+1)z^{-1} + z^{-2}} = \frac{z(z+1)}{z^2 + (m+1)z + 1}.$$

Rădăcina  $z = -1$  a numărătorului este și rădăcină a numitorului pentru  $m = 1$ . In acest caz

$$G(z) = \frac{z}{z+1} = \frac{1}{1+z^{-1}},$$

iar sistemul dat este echivalent I-E cu sistemul de ordinul unu

$$y(t) + y(t-1) = u(t).$$

◆ **Aplicația 3.16.** Pentru ce valori ale parametrului real  $m$ , sistemul discret

$$4y(t) + y(t-1) + my(t-2) = 2u(t) + u(t-1)$$

nu este minimal ?

**Soluție.** Sistemul are funcția de transfer

$$G(z) = \frac{2 + z^{-1}}{4 + z^{-1} + mz^{-2}} = \frac{z(2z+1)}{4z^2 + z + m}.$$

Aceasta se simplifică atunci când una dintre rădăcinile  $z_1=0$  și  $z_2=-1/2$  ale polinomului de la numărător este și rădăcină a polinomului de la numitor. Rezultă imediat că sistemul nu este minimal pentru  $m=0$  și  $m=-1/2$ .

Pentru  $m=0$ , avem

$$G(z) = \frac{2z+1}{4z+1} = \frac{2+z^{-1}}{4+z^{-1}},$$

iar pentru  $m=-1/2$ , avem

$$G(z) = \frac{2z(2z+1)}{8z^2 + 2z - 1} = \frac{2z}{4z-1} = \frac{2}{4-z^{-1}}.$$

În primul caz, sistemul dat este echivalent I-E cu sistemul de ordinul unu

$$4y(t) + y(t-1) = 2u(t) + u(t-1),$$

iar în al doilea caz, cu sistemul de ordinul unu

$$4y(t) - y(t-1) = 2u(t).$$

♦ **Aplicația 3.17.** Să se afle discretizatul cu perioada  $T$  a sistemului continuu de avans-întârziere

$$T_1 \dot{y} + y = K(\tau_1 \dot{u} + u),$$

unde  $K$  este factorul de proporționalitate,  $T_1$  - constanta de timp de întârziere, iar  $\tau_1$  - constanta de timp de avans.

**Soluție.** *Metoda 1.* Sistemul continuu are funcția de transfer

$$G(s) = \frac{K(\tau_1 s + 1)}{T_1 s + 1}.$$

Deoarece funcția  $G(s)/s$  are polii  $s_1=0$  și  $s_2=-1/T_1$ , calculăm funcția de transfer a sistemului discret, astfel:

$$\begin{aligned} G^0(z) &= (1 - z^{-1}) \left[ \operatorname{rez}_{s=0} \frac{G(s)}{s(1 - e^{Ts} z^{-1})} + \operatorname{rez}_{s=-1/T_1} \frac{G(s)}{s(1 - e^{Ts} z^{-1})} \right] \\ &= K(1 - z^{-1}) \left[ \frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{\tau_1/T_1 - 1}{1 - e^{-T/T_1} z^{-1}} \right], \end{aligned}$$

adică

$$G^0(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}},$$

unde

$$a_1 = -e^{-T/T_1}, \quad b_0 = K \frac{\tau_1}{T_1}, \quad b_1 = K \left(1 - \frac{\tau_1}{T_1} - e^{-T/T_1}\right).$$

In consecință, discretizatul are modelul intrare-ieșire

$$y_k + a_1 y_{k-1} = b_0 u_k + b_1 u_{k-1}.$$

*Metoda 2.* Pe baza proprietăților exprimate prin relațiile (66) și (69), discretizatul are funcția de transfer de forma

$$G^0(s) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}, \quad a_1 = -e^{-T/T_1},$$

unde  $b_0$  și  $b_1$  sunt constante reale ce pot fi determinate cu relațiile

$$G^0(\infty) = G(\infty), \quad G^0(1) = G(0),$$

echivalente respectiv cu

$$b_0 = K \frac{\tau_1}{T_1}, \quad \frac{b_0 + b_1}{1 + a_1} = K.$$

Rezultă

$$b_0 = K \frac{\tau_1}{T_1}, \quad b_1 = K \left(1 - \frac{\tau_1}{T_1} - e^{-T/T_1}\right).$$

Prin urmare, discretizatul are modelul intrare-ieșire

$$y_k + a_1 y_{k-1} = b_0 u_k + b_1 u_{k-1}.$$

*Observație.* Prin înlocuirea mărimilor  $\dot{y}$ ,  $y$ ,  $\dot{u}$  și  $u$  din ecuația sistemului continuu respectiv cu

$$(y_k - y_{k-1})/T, \quad y_{k-1}, \quad (u_k - u_{k-1})/T, \quad u_{k-1},$$

obținem discretizatul aproximativ, tot sub forma  $y_k + a_1 y_{k-1} = b_0 u_k + b_1 u_{k-1}$ , unde

$$a_1 = \frac{T}{T_1} - 1, \quad b_0 = K \frac{\tau_1}{T_1}, \quad b_1 = K \frac{T - \tau_1}{T_1}.$$

◆ **Aplicația 3.18.** Să se discretizeze sistemul de ordinul unu cu timp mort

$$T_1 \dot{y}(t) + y(t) = Ku(t - \tau),$$

pentru  $\tau = mT$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , unde  $T$  este perioada de discretizare.

**Soluție.** Pentru  $\tau = 0$ , în conformitate cu aplicația precedentă (cazul  $\tau_1 = 0$ ), discretizatul are ecuația

$$y_k + a_1 y_{k-1} = K(1 + a_1)u_{k-1}, \quad a_1 = -e^{-T/T_1}.$$

In cazul  $\tau = mT$ ,  $m \in \mathbf{N}$ , discretizatul are ecuația

$$y_k + a_1 y_{k-1} = K(1 + a_1)u_{k-m-1}.$$

♦ **Aplicația 3.19.** Considerăm un sistem liniar continuu C-monotonic cu funcția indicială  $h(t)$ . Să se arate că

- $y(t) \geq 0$  pentru orice intrare de tip original  $u(t) \geq 0$ ;
- $y(t) \leq h(t)u(t)$  pentru orice intrare crescătoare de tip original  $u(t)$ .

**Soluție.** a) Sistemul C-monotonic are funcția pondere  $g(t) \geq 0$  pentru orice  $t \geq 0$ . In conformitate cu relația de convoluție

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau, \quad t \geq 0,$$

deoarece  $g(t-\tau) \geq 0$  și  $u(\tau) \geq 0$ , rezultă  $y(t) \geq 0$ .

b) Pentru  $t \geq 0$ , avem

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau \leq \int_0^t g(t-\tau)u(t)d\tau = u(t) \int_0^t g(t-\tau)d\tau \\ &= u(t) \int_0^t g(\tau)d\tau = u(t)h(t). \end{aligned}$$

♦ **Aplicația 3.20.** Să se arate că sistemul continuu cu ecuația

$$T_1 \dot{y} + y = \tau_1 \dot{u} + u, \quad T_1 > 0,$$

este C-monotonic dacă și numai dacă  $0 \leq \tau_1 \leq T_1$ .

**Soluție.** Se calculează funcția pondere  $g(t)$  cu ajutorul ecuațiilor

$$\begin{cases} T_1 \dot{w} + w = 1, & w(0) = 0 \\ h = \tau_1 \dot{w} + w \\ g = h(0+) \delta_0(t) + \dot{h}(t) \end{cases}.$$

Rezultă:

$$w(t) = 1 - e^{-t/T_1},$$

$$h(t) = 1 + \left(\frac{\tau_1}{T_1} - 1\right) e^{-t/T_1},$$

$$g(t) = \frac{\tau_1}{T_1} \delta_0(t) + \frac{1}{T_1} \left(1 - \frac{\tau_1}{T_1}\right) e^{-t/T_1}.$$

In mod clar, funcția pondere  $g(t)$  este nenegativă (sistemul este C-monotonic) dacă și numai dacă  $\tau_1 \geq 0$  și  $T_1 \geq \tau_1$ .

In fig. 3.12 sunt reprezentate grafic funcțiile indiciale ale sistemului cu constanta de timp de întârziere  $T_1=10$ , pentru diferite valori ale constantei de timp de avans  $\tau_1$ . Sistemul are funcția indicială crescătoare (sistemul este C-monotonic) pentru  $0 \leq \tau_1 \leq 10$ . Graficele au fost obținute în MATLAB cu programul

```
tau=[-5 0 5 10 15];
t=0:0.1:45;
for i=1:5
    sis=tf([tau(i) 1],[10 1]);
    step(sis,t), hold on; grid on;
end
```

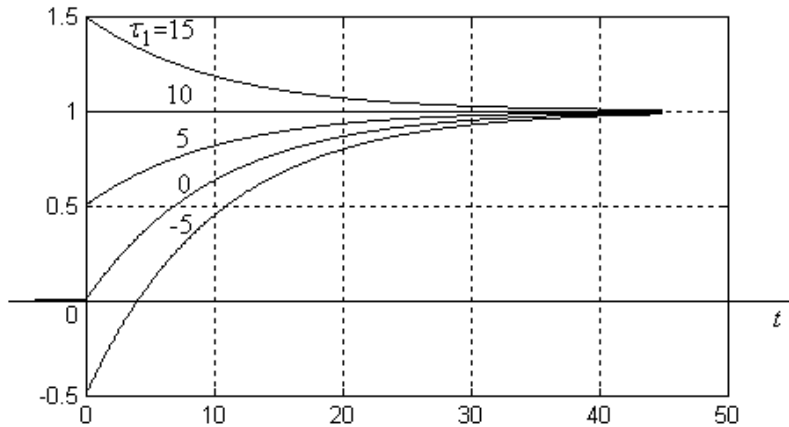


Fig. 3.12. Funcțiile indiciale ale sistemului cu ecuația  $10\dot{y} + y = \tau_1\dot{u} + u$ .

◆ **Aplicația 3.21.** Considerăm un sistem linear discret C-monotonic cu funcția indicială  $h(t)$ . Să se arate că

- a)  $y(t) \geq 0$  pentru orice intrare de tip original  $u(t) \geq 0$ ;
- b)  $y(t) \leq h(t)u(t)$  pentru orice intrare crescătoare de tip original  $u(t)$ .

**Soluție.** a) Sistemul C-monotonic are funcția pondere  $g(t) \geq 0$  pentru orice  $t \geq 0$ .  
Rezultă

$$y(t) = \sum_{i=0}^t g(t-i)u(i) \geq 0$$

b) Pentru  $t \geq 0$ , avem

$$y(t) = \sum_{i=0}^t g(t-i)u(i) \leq \sum_{i=0}^t g(t-i)u(t) = u(t) \sum_{i=0}^t g(t-i) = u(t)h(t).$$



◆ **Aplicația 3.22.** Să se arate că sistemul discret cu ecuația

$$y_k - a_1 y_{k-1} = u_k - b_1 u_{k-1}$$

este C-monotonic dacă și numai dacă  $a_1 \geq \max\{0, b_1\}$ .

**Soluție.** Pentru intrare impuls unitar,  $u_k = \delta_k^0$ , avem  $g_0 = 1$ ,  $g_1 = a_1 - b_1$  și  $g_k - a_1 g_{k-1} = 0$  pentru  $k \geq 2$ , deci

$$\begin{aligned} g_0 &= 1, \\ g_1 &= a_1 - b_1, \\ g_k &= (a_1 - b_1) a_1^{k-1}, \quad k \geq 2. \end{aligned}$$

Sistemul este C-monotonic dacă  $g_k \geq 0$  pentru orice  $k$  întreg, adică  $a_1 \geq b_1$  și  $a_1 \geq 0$ .

În fig. 3.13 sunt reprezentate grafic funcțiile indiciale ale sistemului pentru  $a_1 = 0,8$  și diferite valori ale parametrului  $b_1$ . Pentru  $b_1 \leq 0,8$ , funcțiile indiciale sunt crescătoare, deci sistemul este C-monotonic.

Graficele au fost realizate în Matlab, cu programul:

```
t=0:1:14;
b1=[-0.2 0 0.4 0.8 1 1.2];
for i=1:6
    sis=tf([1 -b1(i)],[1 -0.8],1);
    h(:,i)=step(sis,t);
end
plot(t,h,'-');
grid on;
```

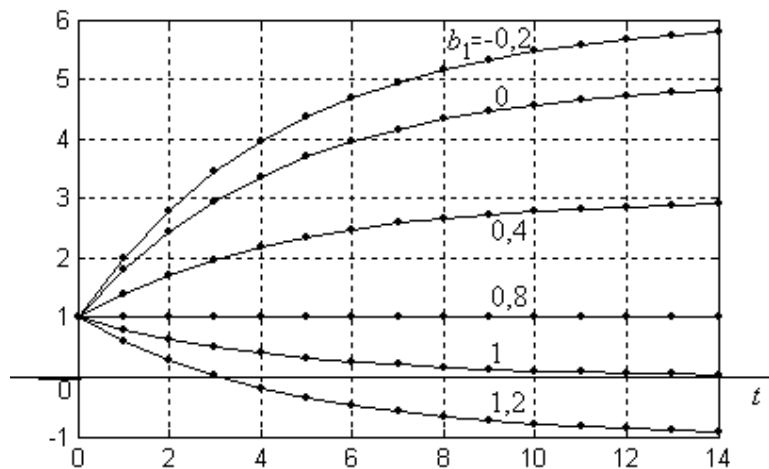


Fig. 3.13. Funcțiile indiciale ale sistemului cu ecuația  $y_k - 0,8y_{k-1} = u_k - b_1 u_{k-1}$ .

### 3.7. APLICAȚII DE AUTOCONTROL

- ◆ C3.1. Să se calculeze răspunsul indicial al sistemului

$$5\dot{y} + y = 2\dot{u} .$$

- ◆ C3.2. Să se calculeze răspunsul indicial și răspunsul pondere ale sistemului

$$5\dot{y} + y = -2\dot{u} + u .$$

- ◆ C3.3. Să se calculeze răspunsul indicial al sistemului

$$6\ddot{y} + 5\dot{y} + y = 2u .$$

- ◆ C3.4. Să se calculeze răspunsul indicial al sistemului

$$6\ddot{y} + 5\dot{y} + y = 5\dot{u} + u .$$

- ◆ C3.5. Să se calculeze răspunsul indicial al sistemului

$$6\ddot{y} + 5\dot{y} + y = 5\dot{u} .$$

- ◆ C3.6. Să se calculeze răspunsul indicial al sistemului

$$6\ddot{y} + \dot{y} = u .$$

- ◆ C3.7. Pentru ce valori ale parametrului real  $m$ , sistemul

$$5\ddot{y} + 6\dot{y} + my = 2u$$

are răspunsul indicial mărginit? Pentru  $m=2$ , să se determine răspunsul indicial.

- ◆ C3.8. Să se calculeze răspunsul indicial al sistemului

$$5\ddot{y} + 6\dot{y} + 2y = 4\dot{u} + 2u .$$

- ◆ C3.9. Să se calculeze răspunsul sistemului

$$12\dot{y} + 2y = u$$

la intrarea

$$u = e^{-t} \cdot 1(t) .$$

- ◆ C3.10. Să se calculeze răspunsul sistemului

$$3\dot{y} + y = 10u$$

la intrarea

$$u = \sin t \cdot 1(t) .$$

- ◆ **C3.11.** Să se calculeze răspunsul sistemului

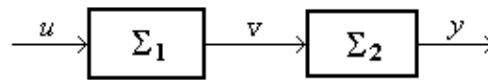
$$12\dot{y} + y = 2u$$

la intrarea

$$u = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ 3, & t = 0 \end{cases}.$$

- ◆ **C3.12.** Fie conexiunea serie de mai jos, formată din subsistemele:

$$\Sigma_1: 4\dot{v} + v = 3u, \quad \Sigma_2: 5\dot{y} + y = 2v.$$

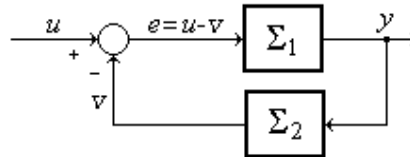


- a) Pentru  $u = 1(t)$ , să se afle  $v(t)$  ;  
 b) Pentru  $u = 1(t)$ , să se afle  $y(t)$  .

- ◆ **C3.13.** Fie conexiunea cu reacție de mai jos, formată din subsistemele:

$$(S_1) \quad 5\dot{y} + y = e,$$

$$(S_2) \quad \dot{v} + v = y.$$



- a) Să se determine ecuația sistemului cu intrarea  $u$  și ieșirea  $y$  ;  
 b) Pentru  $u = 1(t)$ , să se afle  $y(t)$  ;  
 c) Să se determine ecuația sistemului cu intrarea  $u$  și ieșirea  $e$  ;  
 d) Pentru  $u = 1(t)$ , să se afle  $e(t)$  ;

◆ **C3.14.** Știind că răspunsul indicial al unui sistem liniar este  $h(t) = e^{-t/3}$ , să se afle răspunsul sistemului pentru:

- a)  $u(t) = \delta_0(t)$  ;  
 b)  $u(t) = t \cdot 1(t)$  ;  
 c)  $u(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 3) \\ 0, & t \in [3, \infty) \end{cases}$  .

◆ **C3.15.** Pentru ce valori ale parametrului real  $m$ , răspunsul indicial al sistemului discret

$$2my(t) - (m+2)y(t-1) + y(t-2) = 8u(t-1).$$

este mărginit? Pentru  $m = 5$ , să se calculeze răspunsul indicial și răspunsul pondere.

- ◆ **C3.16.** Fie sistemul discret

$$4y(t) + y(t-2) = 8u(t-2).$$

Să se calculeze răspunsul indicial și răspunsul pondere.

- ◆ **C3.17.** Fie sistemul discret

$$y(t) + y(t-3) = 6u(t-1).$$

Să se calculeze răspunsul indicial și răspunsul pondere.

- ◆ **C3.18.** Fie sistemul discret

$$2y(t) - y(t-1) = 2u(t-5).$$

Să se calculeze răspunsul indicial și răspunsul pondere.

- ◆ **C3.19.** Să se arate că sistemele de mai jos sunt echivalente intrare-ieșire:

$$\begin{aligned} 10\ddot{y} + 7\dot{y} + y &= 2\dot{u} + u, \\ 5\dot{y} + y &= u, \end{aligned}$$

- ◆ **C3.20.** Pentru ce valori ale parametrului real  $m$ , sistemele

$$\mathbf{S}_1: \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - mx_2 + u \end{cases}, \quad y = x_1 + x_2; \quad \mathbf{S}_2: \dot{y} + 2y = u$$

sunt echivalente intrare-ieșire ?

- ◆ **C3.21.** Să se arate că sistemele

$$\mathbf{S}_1: \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -6x_1 - 11x_2 - 6x_3 + u \end{cases}, \quad y = 4x_1 + 2x_2$$

$$\mathbf{S}_2: \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -3x_1 - 4x_2 + 2u \end{cases}, \quad y = x_1$$

sunt echivalente intrare-ieșire.

- ◆ **C3.22.** Să se arate că sistemele discrete

$$\mathbf{S}_1: y(t) - y(t-1) + 0,25y(t-2) = 2u(t-1) - u(t-2),$$

$$\mathbf{S}_2: y(t) + 1,5y(t-1) - y(t-2) = 2u(t-1) + 4u(t-2),$$

sunt echivalente intrare-ieșire.

- ◆ **C 3.23.** Pentru ce valori ale parametrului real  $m$ , sistemul continuu

$$2\ddot{y} + m\dot{y} + 6y = 4\dot{u} + 2u .$$

nu este minimal?

- ◆ **C 3.24.** Pentru ce valori ale parametrului real  $m$ , sistemul discret

$$6y(t) + my(t-1) + y(t-2) = u(t) + u(t-1)$$

este minimal?

- ◆ **C3.25.** Să se afle discretizatul sistemului continuu de tip integral

$$T_1\ddot{y} + \dot{y} = Ku .$$

- ◆ **C3.26.** Să se afle discretizatul sistemului continuu de ordinul doi

$$T_1T_2\ddot{y} + (T_1 + T_2)\dot{y} + y = u .$$

- ◆ **C3.27.** Să se arate că sistemul cu ecuația

$$T_1\ddot{y} + \dot{y} = \tau_1\dot{u} + u , \quad T_1 > 0$$

este C-monotonic dacă și numai dacă  $\tau_1 \geq 0$ .

- ◆ **C3.28.** Să se arate că sistemul cu ecuația

$$y(t) - ay(t-1) = u(t-1) - 2u(t-2)$$

este C-monotonic dacă și numai dacă  $a \geq 2$ .

# 4

---

## ELEMENTE DE ANALIZĂ ÎN DOMENIUL TIMPULUI A SISTEMELOR LINIARE DE TIP I-S-E

---

În acest capitol sunt prezentate principalele aspecte elementare privind analiza de tip intrare-stare-ieșire în domeniul timpului a sistemelor liniare continue și discrete. Analiza constă, în principal, în abordarea și rezolvarea următoarelor probleme:

- determinarea modelului de tip I-S-E al unui sistem compus din modelele de tip I-E și I-S-E ale subsistemelor componente;
- determinarea evoluției în timp a stării și ieșirii sistemului când se cunosc starea inițială (la momentul  $t=0$ ) și intrarea pentru  $t \geq 0$ ;
- aducerea sistemului de tip I-S-E la o formă canonică echivalentă I-S-E convenabilă;
- discretizarea sistemelor continue de tip I-S-E;
- reducerea sistemelor continue de tip I-S-E.

În cazul mărimilor de intrare mărginite și de tip original (nule pentru  $t < 0$ ), starea inițială este și ea nulă.

### 4.1. RĂSPUNSUL ÎN TIMP AL SISTEMELOR CONTINUE

Sistemul continuu liniar invariant

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \\ Y(t) = CX(t) + DU(t) \end{cases}, \quad (1)$$

are funcția de tranziție a stării

$$X(t) = \phi(t, t_0, X_0, U_{[t_0, t]}) = e^{A(t-t_0)} X_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} BU(\tau) d\tau, \quad (2)$$

care exprimă evoluția în timp a stării  $X(t)$  din starea inițială  $X_0$  (la momentul  $t_0$ ) și sub acțiunea intrării  $U(t)$ ,  $t \geq t_0$ . Exponențiala matriceală

$$\Phi(t) = e^{At}, \quad (3)$$

definită prin relația

$$e^{At} = I + \frac{At}{1!} + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots, \quad (4)$$

este o funcție matriceală pătrată de tip  $n \times n$ , numită *matricea fundamentală* a sistemului sau *matricea de tranziție* a stării sistemului.

În continuare, vom considera momentul inițial  $t_0 = 0$ , caz în care funcția de tranziție a stării are expresia:

$$X(t) = \phi(t; X_0, U(\cdot)) = e^{At} X_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B U(\tau) d\tau. \quad (5)$$

*Componenta liberă a stării*

$$X_l(t) = e^{At} X_0, \quad (6)$$

reprezintă răspunsul (evoluția) stării din starea inițială  $X_0 \neq 0$ , sub acțiunea intrării nule  $U(\tau) = 0$ ,  $\tau \in [0, t)$ . *Componenta forțată a stării*

$$X_f(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B U(\tau) d\tau. \quad (7)$$

reprezintă răspunsul stării din starea inițială  $X_0 = 0$ , sub acțiunea intrării nenule  $U(\tau)$ .

Funcția de ieșire  $Y(t)$  are *componenta liberă*

$$Y_l(t) = C X_l(t) = C e^{At} X_0 \quad (8)$$

și *componenta forțată*

$$Y_f(t) = C X_f(t) + D U(t) = C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B U(\tau) d\tau + D U(t). \quad (9)$$

În conformitate cu (5), pentru *intrarea constantă*  $U(t) = U_0$ ,  $t \geq 0$  și *starea inițială*  $X_0$ , starea și ieșirea sistemului evoluează în timp în conformitate cu expresiile

$$X(t) = \Phi(t) X_0 + \Psi(t) U_0, \quad (10)$$

$$Y(t) = C X(t) + D U_0, \quad (11)$$

unde

$$\Psi(t) = \int_0^t e^{A\tau} B d\tau = B \frac{t}{1!} + AB \frac{t^2}{2!} + A^2 B \frac{t^3}{3!} + \dots \quad (12)$$

Funcția matriceală  $\Psi(t)$  este de tipul  $n \times m$ . În cazul în care matricea  $A$  este *nesingulară*, adică are determinantul nenul, funcția  $\Psi(t)$  este dată de relația :

$$\Psi(t) = (e^{At} - I)A^{-1}B = [\Phi(t) - I]A^{-1}B. \quad (13)$$

Pentru orice funcție de intrare  $U(t)$  de *tip original* și finită la momentul  $t = 0_+$ , starea inițială este nulă, adică  $X_0 = 0$ . Astfel, pentru *intrarea tip treaptă*

$$U(t) = U_0 \cdot 1(t),$$

starea și ieșirea sistemului pentru  $t \geq 0$  sunt date de relațiile

$$X(t) = \Psi(t)U_0, \quad Y(t) = CX(t) + DU_0. \quad (14)$$

**Observații. 1°.** În cazul sistemelor liniare continue de tip I-S-E, calculul răspunsului stării  $X(t)$  și al răspunsului ieșirii  $Y(t)$  necesită determinarea matricei fundamentale  $\Phi(t) = e^{At}$ . În paragraful următor sunt prezentate două metode de calcul analitic al acesteia.

**2°.** În cazul în care matricea  $A$  este *nesingulară* și răspunsul  $X(t)$  al stării la intrarea treaptă  $U(t) = U_0 \cdot 1(t)$  este convergent mărginit, din ecuațiile (1) rezultă valorile finale de stabilizare

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = -A^{-1}BU_0, \quad (15)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) = (-CA^{-1}B + D)U_0, \quad (16)$$

precum și valorile inițiale

$$X(0_+) = 0, \quad Y(0_+) = DU_0. \quad (17)$$

În cazul  $D=0$ , avem

$$Y(0_+) = 0, \quad Y'(0_+) = CBU_0. \quad (18)$$



### 3°. In raport cu funcția matriceală

$$G(t) = Ce^{At}B + D\delta_0(t), \quad (19)$$

unde  $\delta_0(t)$  este funcția impuls Dirac, răspunsul forțat (9) al sistemului poate fi exprimat prin *relația de convoluție*

$$Y_f(t) = \int_0^t G(t-\tau)U(\tau)d\tau. \quad (20)$$

Funcția matriceală  $G(t)$ , cu dimensiunea  $p \times m$  ( $p$  - numărul variabilelor de ieșire,  $m$  - numărul variabilelor de intrare) se numește *funcție pondere*. Toate cele  $mp$  elemente ale funcției matriceale  $G(t)$  sunt funcțiile pondere scalare ale canalelor monovariabile intrare-ieșire. In cazul unui sistem monovariabil (SISO), formula de convoluție (11) capătă forma cunoscută

$$y_f(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau, \quad (21)$$

în care funcția pondere  $g(t)$  este răspunsul sistemului la intrarea impuls Dirac  $u = \delta_0(t)$ .

■ In Matlab, sistemul de tip intrare-stare-ieșire ("state space") se construiește cu ajutorul funcției *ss*, având ca argumente de intrare matricelor  $A, B, C, D$ :

- $s2 = \mathbf{ss}(A,B,C,D)$  .

Dacă  $D$  este matricea zero, argumentul  $D$  poate fi înlocuit cu scalarul 0. Sistemul  $s3$  construit cu  $s3=\mathbf{ss}(D)$  este de ordinul zero (fără dinamică), cu modelul dinamic  $Y=DU$ .

Un sistem  $s1$  de tipul I-E poate fi transformat într-un sistem  $s2$  de tipul I-S-E cu ajutorul funcției *ss*:

- $s2=\mathbf{ss}(s1)$ ;

Invers, un sistem  $s2$  de tipul I-S-E poate fi transformat într-un sistem  $s1$  de tipul I-E cu ajutorul funcției *tf*:

- $s1=\mathbf{tf}(s2)$ ;

Din sistemul  $s2$  se pot extrage parametrii matriceali  $A, B, C, D$ , cu ajutorul funcției *ssdata*

- $[A,B,C,D]=\mathbf{ssdata}(s2)$  ;

sau prin referire directă la proprietățile obiectului sistem:

- $A=s2.a$ ;  $B =s2.b$ ;  $C=s2.c$ ;  $D=s2.d$ ;

Ultima cale permite modificarea proprietăților modelului  $s2$ , în varianta

- $s2.a=A$ ;  $s2.b=B$ ;  $s2.c=C$ ;  $s2.d=D$ ;

sau în varianta

- $s2.a(i,j)=a1$ ;  $s2.b(i,j)=b1$ ;  $s2.c(i,j)=c1$ ;  $s2.d(i,j)=d1$ ;

Pentru calculul și reprezentarea grafică respectiv a răspunsului liber (dintr-o stare inițială dată), a răspunsului indicial, a răspunsului pondere și a răspunsului mixt (la intrare tip scară și dintr-o stare inițială dată), se utilizează funcțiile:

- $[Y,t,X] = \mathbf{initial}(s2,X0,t)$  ;
- $[Y,t,X] = \mathbf{step}(s2,t)$  ;
- $[Y,t,X] = \mathbf{impulse}(s2,t)$  ;
- $[Y,t,X] = \mathbf{lsim}(s2,U,t,X0)$  .

Dacă funcțiile sunt apelate cu argumente de ieșire, atunci se efectuează numai evaluarea acestor argumente, fără reprezentarea grafică a răspunsului. În cazul contrar, se efectuează numai reprezentarea grafică a răspunsului  $Y(t)$ .

La primele trei funcții se poate omite argumentul de intrare  $t$ , caz în care vectorul  $t$  este generat de funcția MATLAB respectivă. De asemenea, la funcția *lsim* se poate omite argumentul de intrare  $X0$ , caz în care starea inițială este considerată zero.

La sistemele cu o singură intrare, argumentul de intrare  $U$  al funcției *lsim* trebuie dat sub forma unui vector cu același număr de elemente ca vectorul  $t$ , iar argumentele de ieșire  $Y$  și  $X$  au un număr de rânduri egal cu numărul elementelor vectorului  $t$  și un număr de coloane egal cu numărul variabilelor de ieșire, respectiv de stare.

## 4.2. CALCULUL MATRICEI FUNDAMENTALE

Calculul analitic al matricii fundamentale  $e^{At}$  se poate efectua în domeniul timpului prin metoda Sylvester sau prin metoda diagonalizării.

**Metoda Sylvester.** Matricea fundamentală poate fi exprimată în raport cu primele  $n-1$  puteri ale matricii  $A$ , după relația

$$e^{At} = \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A + \dots + \alpha_{n-1}(t)A^{n-1}, \quad (22)$$

unde  $\alpha_i(t)$  sunt funcții analitice scalare. Această proprietate rezultă imediat din relația de definiție (4) a matricii fundamentale, ținând seama de faptul că puterile superioare  $A^n$ ,  $A^{n+1}$ ,  $A^{n+2}$ , ... pot fi exprimate în raport cu puterile anterioare. Această ultimă proprietate este o consecință imediată a *teoremei Cayley-Hamilton*, conform căreia are loc egalitatea

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0I = 0, \quad (23)$$

unde  $a_i$  sunt coeficienții polinomului caracteristic al matricei  $A$ :

$$\mathcal{P}(s) = \det(sI - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0. \quad (24)$$

Metoda Sylvester de calcul al funcțiilor scalare  $\alpha_i(t)$  se bazează pe faptul că relația (22) rămâne adevărată prin înlocuirea matricei pătrate unitare  $I$  cu  $1$  și a matricei  $A$  cu oricare dintre valorile proprii  $s_i$  ale matricei  $A$  (egale cu rădăcinile polinomului caracteristic al matricei  $A$ ), adică

$$f(s_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (25)$$

unde, pentru orice  $t$  fixat,

$$f(s) = e^{st} - \alpha_0(t) - \alpha_1(t)s - \dots - \alpha_{n-1}(t)s^{n-1}. \quad (26)$$

Relațiile Sylvester (25) au forma explicită

$$\alpha_0 + \alpha_1 s_i + \dots + \alpha_{n-1} s_i^{n-1} = e^{s_i t}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

În cazul sistemelor cu *valori proprii distincte*, aceste relații formează un sistem de  $n$  ecuații liniare independente, având ca soluție funcțiile  $\alpha_i(t)$  din expresia (22) a matricei fundamentale  $e^{At}$ . De remarcat faptul că funcțiile  $\alpha_i(t)$ , deci și matricea fundamentală  $e^{At}$ , depind de  $t$  numai prin intermediul funcțiilor exponențiale  $e^{s_i t}$ ; mai exact,

$$e^{At} = E_1 e^{s_1 t} + E_2 e^{s_2 t} + \dots + E_n e^{s_n t}, \quad (27)$$

unde  $E_i$  sunt matrice pătrate constante.

Dacă valoarea proprie  $s_1$  are ordinul de multiplicitate  $k$ , adică  $s_1 = s_2 = \dots = s_k$ , atunci primele  $k$  relații Sylvester sunt identice (de forma  $f(s_i) = 0$ ) și trebuie înlocuite cu relațiile

$$f^{(j)}(s_1) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, k-1. \quad (28)$$

În acest caz, în locul funcțiilor exponențiale  $e^{s_1 t}$ ,  $e^{s_2 t}$ , ...,  $e^{s_k t}$  din expresia analitică (27) a matricei fundamentale vor apărea respectiv funcțiile  $e^{s_1 t}$ ,  $t e^{s_1 t}$ , ...,  $t^{k-1} e^{s_1 t}$ .

**Metoda diagonalizării.** În cazul în care matricea  $A$  are valorile proprii  $s_1, s_2, \dots, s_n$  distincte, ea poate fi *diagonalizată* astfel:

$$A = V \bar{A} V^{-1}, \quad (29)$$

unde  $V = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$  este matricea pătrată a vectorilor proprii (definiți prin relația  $Av_i = s_i v_i$ ), iar

$$\bar{A} = \text{diag}(s_1, s_2, \dots, s_n) \quad (30)$$

este matricea diagonală a valorilor proprii (matricea *modală*). Din (29), prin inducție, rezultă ușor că

$$A^k = V \bar{A}^k V^{-1}, \quad k \in \mathbf{N}, \quad (31)$$

cu

$$\bar{A}^k = \text{diag}(s_1^k, s_2^k, \dots, s_n^k), \quad (32)$$

iar din (4) obținem următoarea formulă de calcul al matricei fundamentale:

$$e^{At} = V e^{\bar{A}t} V^{-1}, \quad (33)$$

unde

$$e^{\bar{A}t} = \text{diag}(e^{s_1 t}, e^{s_2 t}, \dots, e^{s_n t}). \quad (34)$$

Dacă  $s_1 = s_2$ , atunci vectorii proprii  $v_1$  și  $v_2$  se obțin cu relațiile

$$(s_1 I - A)v_1 = 0, \quad (s_1 I - A)v_2 + v_1 = 0, \quad (35)$$

iar matricele  $\bar{A}$ ,  $\bar{A}^k$  și  $e^{\bar{A}t}$  se obțin respectiv din (30), (32) și (34) înlocuind celulele pătrate corespunzătoare valorilor proprii  $s_1$  și  $s_2$  astfel:

$$\begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} s_1 & 1 \\ 0 & s_1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} s_1^k & 0 \\ 0 & s_2^k \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} s_1^k & k s_1^{k-1} \\ 0 & s_1^k \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} e^{s_1 t} & 0 \\ 0 & e^{s_2 t} \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} e^{s_1 t}.$$

**Observații. 1<sup>o</sup>.** Dacă valorile proprii  $s_1, s_2, \dots, s_n$  ale matricei  $A$  sunt distincte și au partea reală negativă, atunci toate exponențialele scalare  $e^{s_i t}$  sunt mărginite pentru  $t \geq 0$ , iar din (27) sau din (33) - (34) rezultă că matricea fundamentală  $\Phi(t) = e^{At}$  este mărginită. Această proprietate se

menține și în cazul valorilor proprii multiple. În consecință, din (10), (11) și (13) rezultă că dacă toate rădăcinile  $s_1, s_2, \dots, s_n$  ale ecuației caracteristice

$$\det(sI - A) = 0$$

au partea reală negativă, atunci funcțiile de stare  $X(t)$  și de ieșire  $Y(t)$  sunt mărginite oricare ar fi starea inițială  $X_0$  și intrarea constantă  $U(t) = U_0$  (teorema de mărginire a funcțiilor de stare și de ieșire ale unui sistem liniar continuu).

2°. Pentru calculul numeric al exponențialei matriceale  $e^{At}$  se utilizează frecvent *aproximația Padé* de ordinul  $2n$

$$e^{At} \approx D^{-1}(At) \cdot N(At), \quad (36)$$

unde

$$N(At) = I + a_1 \frac{At}{1!} + a_2 \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots + a_n \frac{A^n t^n}{n!}, \quad (37)$$

$$D(At) = I - a_1 \frac{At}{1!} + a_2 \frac{A^2 t^2}{2!} - \dots + (-1)^n a_n \frac{A^n t^n}{n!}, \quad (38)$$

cu

$$a_k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{2n(2n-1)\dots(2n-k+1)}, \quad a_{k+1} = \frac{n-k}{2n-k} a_k. \quad (39)$$

Coefficienții  $a_k$  au fost determinați astfel încât dezvoltările în jurul originii ale funcțiilor  $N(x)$  și  $D(x) \cdot e^x$  să coincidă până la ordinul maxim posibil ( $2n$  inclusiv), unde

$$N(x) = 1 + a_1 \frac{x}{1!} + \dots + a_n \frac{x^n}{n!},$$

$$D(x) = 1 + b_1 \frac{x}{1!} + \dots + b_n \frac{x^n}{n!}.$$

### 4.3. RĂSPUNSUL ÎN TIMP AL SISTEMELOR DISCRETE

Sistemul discret, liniar și invariant

$$\begin{cases} X(t+1) = AX(t) + BU(t) \\ Y(t) = CX(t) + DU(t) \end{cases} \quad (40)$$

are matricea fundamentală (de tranziție a stării)

$$\Phi(t) = A^t \quad (41)$$

și funcția de tranziție a stării

$$X(t) = \phi(t, X_0, U(\cdot)) = A^t X_0 + (A^{t-1} B U_0 + A^{t-2} B U_1 + \dots + B U_{t-1}) \quad (42)$$

unde  $U_i = U(i)$  și  $t \in \mathbf{N}$ .

Funcția de tranziție a stării are *componenta liberă*

$$X_l(t) = A^t X_0 \quad (43)$$

și *componenta forțată*

$$X_f(t) = A^{t-1} B U_0 + A^{t-2} B U_1 + \dots + B U_{t-1}, \quad (44)$$

iar funcția de ieșire are *componenta liberă*

$$Y_l(t) = C A^t X_0 \quad (45)$$

și *componenta forțată*

$$\begin{aligned} Y_f(t) &= C X_f(t) + D U(t) \\ &= C(A^{t-1} B U_0 + A^{t-2} B U_1 + \dots + B U_{t-1}) + D U_t. \end{aligned} \quad (46)$$

Pentru *intrarea constantă*  $U(t) = U_0$ ,  $t \geq 0$  și *starea inițială*  $X_0$ , starea și ieșirea sistemului evoluează în timp în conformitate cu expresiile

$$X(t) = \Phi(t) X_0 + \Psi(t) U_0, \quad (47)$$

$$Y(t) = C X(t) + D U_0, \quad (48)$$

unde

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= (A^{t-1} + A^{t-2} + \dots + A + I) B \\ &= (I - A^t)(I - A)^{-1} B. \end{aligned} \quad (49)$$

Pentru *intrarea tip treaptă*

$$U(t) = U_0 \cdot 1^0(t),$$

starea și ieșirea sistemului pentru  $t \geq 0$  sunt date de relațiile

$$X(t) = \Psi(t) U_0, \quad Y(t) = C X(t) + D U_0. \quad (50)$$

**Observații. 1<sup>o</sup>.** In cazul în care matricea  $A$  este nesingulară și răspunsul  $X(t)$  al stării la intrarea treaptă  $U(t) = U_0 \cdot 1^0(t)$  este convergent

mărginit, din ecuațiile (40) rezultă că starea  $X$  și ieșirea  $Y$  se stabilizează la valorile

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = (I - A)^{-1} B U_0, \quad (51)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) = [C(I - A)^{-1} B + D] U_0, \quad (52)$$

și au valorile inițiale

$$X(0) = 0, \quad Y(0) = D U_0. \quad (53)$$

2°. Definind *matricea pondere* prin relațiile

$$G(0) = D, \quad G(t) = C A^{t-1} B, \quad t = 1, 2, \dots \quad (54)$$

componenta forțată a ieșirii poate fi scrisă astfel:

$$Y_f(t) = G(t)U_0 + G(t-1)U_1 + \dots + G(0)U_t = \sum_{i=0}^t G(t-i)U(i). \quad (55)$$

3°. În cazul sistemelor liniare discrete, calculul răspunsului la intrarea constantă  $U_0$  și starea inițială  $X_0$ , respectiv la intrarea treaptă  $U(t) = U_0 \cdot 1^0(t)$ , necesită determinarea matricei fundamentale  $\Phi(t) = A^t$ . Calculul analitic în domeniul timpului al acestei exponențiale matriceale se poate face prin metoda Sylvester și metoda diagonalizării.

**Metoda Sylvester.** Exponențiala matriceală  $A^t$  se exprimă cu ajutorul primelor  $n-1$  puteri ale lui  $A$ , astfel:

$$A^t = \beta_0(t)I + \beta_1(t)A + \dots + \beta_{n-1}(t)A^{n-1}, \quad (56)$$

unde  $\beta_i(t)$  sunt funcții analitice care pot fi determinate cu *relațiile lui Sylvester*:

$$f(z_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (57)$$

unde  $z_i$  sunt valorile proprii ale matricei  $A$  și

$$f(z) = z^t - \beta_0(t) - \beta_1(t)z - \dots - \beta_{n-1}(t)z^{n-1}. \quad (58)$$

În cazul valorilor proprii distincte, relațiile Sylvester (57), cu forma explicită

$$\beta_0 + \beta_1 z_i + \dots + \beta_{n-1} z_i^{n-1} = z_i^t, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

formează un sistem de  $n$  ecuații liniare independente având ca soluții funcțiile  $\beta_i(t)$  din expresia (56) a matricei fundamentale  $A^t$ . De remarcă faptul că funcțiile  $\beta_i(t)$ , deci și matricea fundamentală  $A^t$ , depind de  $t$  numai prin intermediul funcțiilor exponențiale  $z_i^t$ ; mai exact,

$$A^t = E_1 z_1^t + E_2 z_2^t + \dots + E_n z_n^t, \quad (59)$$

unde  $E_i$  sunt matrice pătrate constante.

Dacă  $z_1$  este o valoare proprie cu ordinul de multiplicitate  $k$ , atunci

$$f^{(j)}(z_1) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, k-1. \quad (60)$$

În acest caz, în locul funcțiilor exponențiale  $z_1^t, z_2^t, \dots, z_k^t$  din expresia analitică (59) a matricei fundamentale vor apărea respectiv funcțiile  $z_1^t, t z_1^t, \dots, t^{k-1} z_1^t$ .

**Metoda diagonalizării.** Exponențiala matriceală  $A^t$  se calculează cu relația

$$A^t = V \bar{A}^t V^{-1}, \quad (61)$$

unde  $V$  este matricea vectorilor proprii ai matricei  $A$ , iar  $\bar{A}$  matricea diagonală (modală) a valorilor proprii. Dacă valorile proprii  $z_1, z_2, \dots, z_n$  ale matricei  $A$  sunt distincte, atunci

$$\bar{A}^t = \text{diag}(z_1^t, z_2^t, \dots, z_n^t). \quad (62)$$

**4°.** Dacă valorile proprii  $z_1, z_2, \dots, z_n$  ale matricei  $A$  sunt distincte și au modulul subunitar, atunci toate exponențialele scalare  $z_i^t$  sunt mărginite pentru  $t \geq 0$ , iar din (59) sau din (61)-(62) rezultă că matricea fundamentală  $A^t$  este mărginită. Această proprietate se menține și în cazul valorilor proprii multiple. Din (47), (48) și (49) rezultă că dacă toate rădăcinile  $z_1, z_2, \dots, z_n$  ale ecuației caracteristice

$$\det(zI - A) = 0$$

au modulul subunitar, atunci funcțiile de stare  $X(t)$  și de ieșire  $Y(t)$  sunt mărginite oricare ar fi starea inițială  $X_0$  și intrarea constantă  $U(t) = U_0$  (teorema de mărginire a funcțiilor de stare și de ieșire ale unui sistem liniar discret).



■ In Matlab, sistemul de tip intrare-stare-ieșire ("state space") al unui sistem discret se construiește tot cu ajutorul funcției *ss*, pe baza matricelor  $A, B, C, D$  și a perioadei de eșantionare  $T$ , astfel:

$$\bullet s2 = \text{ss}(A,B,C,D,T).$$

Sistemul construit prin comanda  $s3 = \text{ss}(D)$  este de ordinul zero (fără dinamică), cu modelul  $Y_k = DU_k$ .

Pentru calculul și reprezentarea grafică a *răspunsului liber*, *răspunsului indicial*, *răspunsului pondere* (la impuls unitar) și *răspunsului mixt* (la o intrare oarecare dată, dintr-o stare inițială arbitrară) ale unui sistem discret se utilizează aceleași funcții ca la sistemele continue (initial, step, impulse, lsim). La vectorul timp  $t = t_0 : dt : t_1$ , pasul  $dt$  trebuie să coincidă cu perioada de eșantionare ("sampling time")  $T$ , adică  $dt = s2 \cdot T$ .

#### 4.4. SISTEME ECHIVALENTE I-S-E

Două sisteme  $\Sigma$  și  $\bar{\Sigma}$  de tip I-S-E se numesc *echivalente I-S-E* (asemenea, izomorfe, S-echivalente) dacă unul se obține din celălalt printr-o transformare nesingulară a componentelor stării, de tipul

$$X = S\bar{X}, \quad (63)$$

unde  $S$  este o matrice pătrată nesingulară de tipul  $n \times n$ . Sistemele  $\Sigma$  și  $\bar{\Sigma}$  au evident același ordin și același număr de intrări, de stări și de ieșiri. Ele se mai numesc sisteme *S-echivalente*.

**Teorema de echivalență I-S-E.** *Sistemele liniare  $\Sigma(A,B,C,D)$  și  $\bar{\Sigma}(\bar{A},\bar{B},\bar{C},\bar{D})$  sunt echivalente I-S-E dacă și numai dacă există o matrice pătrată nesingulară  $S$  astfel încât*

$$\bar{A} = S^{-1}AS, \quad \bar{B} = S^{-1}B, \quad \bar{C} = CS, \quad \bar{D} = D. \quad (64)$$

*Demonstrația necesității.* Conform ipotezei, sistemele liniare continue  $\Sigma$  și  $\bar{\Sigma}$  sunt S-echivalente, deci sistemul  $\bar{\Sigma}$  se obține din sistemul

$$\Sigma: \dot{X} = AX + BU, \quad Y = CX + DU$$

prin înlocuirea lui  $X$  cu  $S\bar{X}$ . Efectuând înlocuirea, obținem

$$S\dot{\bar{X}} = AS\bar{X} + BU, \quad Y = CS\bar{X} + DU,$$

deci

$$\dot{\bar{X}} = S^{-1}AS\bar{X} + S^{-1}BU, \quad Y = CS\bar{X} + DU,$$

de unde rezultă relațiile (64).

*Demonstrația suficienței.* Prin ipoteză, au loc relațiile (64). Pe baza acestora, din ecuațiile sistemului  $\bar{\Sigma}$ ,

$$\bar{\Sigma}: \dot{\bar{X}} = \bar{A}\bar{X} + \bar{B}U, \quad Y = \bar{C}\bar{X} + \bar{D}U,$$

rezultă

$$\dot{\bar{X}} = S^{-1}AS\bar{X} + S^{-1}BU, \quad Y = CS\bar{X} + DU,$$

deci

$$S\dot{\bar{X}} = AS\bar{X} + BU, \quad Y = CS\bar{X} + DU.$$

Inlocuind pe  $S\bar{X}$  cu  $X$ , obținem

$$\dot{X} = AX + BU, \quad Y = CX + DU,$$

adică ecuațiile sistemului  $\Sigma$ . Astfel, conform definiției, sistemele  $\Sigma$  și  $\bar{\Sigma}$  sunt echivalente I-S-E. Demonstrația este similară în cazul sistemelor discrete.

**Observații. 1°.** Unui sistem de tip I-S-E i se pot asocia o *infinitate de sisteme echivalente I-S-E*, prin alegerea diferită a *matricei de transformare*  $S$ . În consecință, forma I-S-E a modelului unui sistem fizic dat sau a unui sistem de tip I-E nu este unică.

**2°.** Din definiția sistemelor S-echivalente rezultă că oricare ar fi intrarea comună  $U(t)$  pentru  $t \geq 0$  și stările inițiale  $X_0$  și  $\bar{X}_0$  astfel încât  $X_0 = S\bar{X}_0$ , funcțiile de ieșire  $Y(t)$  și  $\bar{Y}(t)$  ale sistemelor S-echivalente  $\Sigma$  și  $\bar{\Sigma}$  sunt egale.

Pentru orice intrare comună de tip original, avem  $X_0 = \bar{X}_0 = 0$ , deci  $X_0 = S\bar{X}_0$ . Prin urmare, două sisteme echivalente I-S-E au același răspuns  $Y(t)$  pentru orice intrare comună  $U(t)$  de tip original, deci sunt *echivalente I-E*. Reciproca acestei proprietăți nu este adevărată, două sisteme echivalente I-E de dimensiuni diferite nefiind echivalente I-S-E.

**3°.** Două sisteme liniare S-echivalente au același polinom caracteristic, deci același spectru  $\sigma$  (reprezentat de mulțimea valorilor proprii ale matricei  $A$ ), adică

$$\sigma(\bar{\Sigma}) = \sigma(\Sigma). \quad (65)$$

Intr-adevăr,

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{P}}(s) &= \det(sI - \bar{A}) = \det(S^{-1}sIS - S^{-1}AS) = \det[S^{-1}(sI - A)S] \\ &= \det S^{-1} \cdot \det(sI - A) \cdot \det S = \det(sI - A) = \mathcal{P}(s).\end{aligned}$$

4°. În cadrul procedurilor de analiză și proiectare, prin alegerea convenabilă a matricei de transformare  $S$ , sistemul  $\Sigma$  poate fi transformat într-un sistem echivalent  $\bar{\Sigma}$  la care unii dintre parametrii matriceali  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{C}$  și  $\bar{D}$  să aibă forme convenabile. De exemplu, dacă  $S$  este matricea vectorilor proprii ai matricei  $A$ , atunci sistemul echivalent (nedegenerat) capătă așa numita formă *modală* (sau *spectrală*), caracterizată printr-o matrice  $\bar{A}$  de tip diagonal (sau bloc diagonal), în care toate valorile proprii apar pe diagonală. Dacă valorile proprii sunt distincte, fiecare ecuație de stare a sistemului echivalent poate fi integrată separat, deoarece conține o singură variabilă de stare.

■ În Matlab, pentru obținerea prin transformarea  $X_1 = TX$  a sistemului  $\Sigma_1(A_1, B_1, C_1, D_1)$  echivalent I-S-E cu  $\Sigma(A, B, C, D)$ , se utilizează funcția `ss2ss`:

- `sis1 = ss2ss(sis, T)`

Pentru aducerea sistemului  $\Sigma$  la o anumită formă canonică  $\Sigma_1(A_1, B_1, C_1, D_1)$ , se utilizează funcția

- `[sis1, T] = canon(sis, type)`

în care `type` poate fi *mod* (forma *modală*) sau *com* (forma *companion*). În forma *companion*, matricea  $A$  are ultima coloană formată din coeficienții polinomului caracteristic al matricei  $A$ . Argumentul  $T$  (de intrare al funcției `ss2ss` și, respectiv, de ieșire al funcției `canon`) este așa numita *matrice de transformare*, egală cu inversa matricei  $S$ , adică  $T = S^{-1}$ .

#### 4.5. DISCRETIZAREA SISTEMELOR CONTINUE TIP I-S-E

Sistemul discret  $\Sigma^0(A^0, B^0, C^0, D^0)$  reprezintă *discretizatul I-S-E* cu perioada  $T$  al sistemului continuu  $\Sigma(A, B, C, D)$  dacă pentru orice stări inițiale egale și orice intrări  $T$ -echivalente de ordinul zero, stările și ieșirile celor două sisteme sunt  $T$ -echivalente. Discretizatul I-S-E se mai numește *echivalentul discret I-S-E*.

Ținând seama de expresia funcției de tranziție a stării sistemului continuu  $\Sigma$  pentru funcția de intrare  $U(t)$  de tip  $T$ -scară, alegând momentul inițial  $t_k = kT$  și momentul curent  $t_{k+1} = (k+1)T$ , avem:

$$\begin{aligned} X(t_{k+1}) &= e^{A(t_{k+1}-t_k)} X(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)} BU(\tau) d\tau \\ &= e^{AT} X(t_k) + \left( \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)} d\tau \right) BU(t_k) \\ &= e^{AT} X(t_k) + \left( \int_0^T e^{Ax} dx \right) BU(t_k). \end{aligned}$$

Prin urmare, discretizatul  $\Sigma^0$  cu perioada  $T$  al sistemului continuu  $\Sigma$ , cu ecuația

$$\Sigma^0: \begin{cases} X(t+T) = A^0 X(t) + B^0 U(t) \\ Y(t) = C^0 X(t) + D^0 U(t) \end{cases},$$

are parametrii matriceali

$$A^0 = e^{AT}, \quad B^0 = \left( \int_0^T e^{A\tau} d\tau \right) B, \quad C^0 = C, \quad D^0 = D. \quad (66)$$

Atunci când matricea  $A$  este inversabilă, parametrul  $B^0$  are expresia:

$$B^0 = (A^0 - I)A^{-1}B. \quad (67)$$

**Observații. 1°.** Dacă matricea  $A$  are valorile proprii  $s_1, s_2, \dots, s_n$ , atunci matricea  $A^0 = e^{AT}$  are valorile proprii  $e^{s_1 T}, e^{s_2 T}, \dots, e^{s_n T}$ . Prin urmare, dacă sistemul continuu are spectrul  $\sigma = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ , atunci discretizatul  $\Sigma^0$  va avea spectrul  $\sigma^0 = \{e^{s_1 T}, e^{s_2 T}, \dots, e^{s_n T}\}$ .

**2°.** Prin înlocuirea derivatei  $\dot{X}(t)$  cu  $(X_{k+1} - X_k)/T$ , a lui  $X(t)$  cu  $X_k$ , a lui  $U(t)$  cu  $U_k$  și a lui  $Y(t)$  cu  $Y_k$ , sistemul continuu  $\Sigma$  se transformă în sistemul discret  $\tilde{\Sigma}$  având

$$\tilde{A} = I + AT, \quad \tilde{B} = BT, \quad \tilde{C} = C, \quad \tilde{D} = D. \quad (68)$$

De remarcat faptul că sistemul  $\tilde{\Sigma}$  constituie un *aproximant* al discretizatului propriu-zis  $\Sigma^0$ . Acest lucru reiese și din faptul că  $\tilde{\Sigma}$  se obține din  $\Sigma^0$  prin înlocuirea exponențialei matriceale  $e^{At}$  cu  $I + AT$ , adică cu primii doi termeni din dezvoltarea exponențialei în serie de puteri.

■ În **MATLAB**, discretizatul I-S-E al unui sistem continuu de tip I-S-E, se obține cu funcția

- $\text{sisd} = \mathbf{c2d}(\text{sis}, T)$ ,

unde  $T$  reprezintă perioada de discretizare.

#### 4.6. CONEXIUNI SERIE, PARALEL ȘI CU REACȚIE

Două sisteme continue sau discrete  $\Sigma_1(A_1, B_1, C_1, D_1)$  și  $\Sigma_2(A_2, B_2, C_2, D_2)$  sunt conectate:

a) *în serie* (fig. 4.1), atunci când ieșirea primului sistem constituie intrarea celui de-al doilea sistem;

b) *în paralel* (fig. 4.2), atunci când cele două sisteme au intrarea comună, iar ieșirile se însumează (algebric);

c) *în buclă închisă sau cu reacție* (fig. 4.3), atunci când ieșirea primului sistem este intrarea celui de-al doilea sistem, iar ieșirea celui de-al doilea sistem se însumează algebric la intrarea primului sistem.

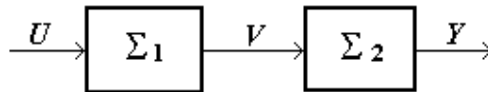


Fig. 4.1. Conexiune serie.

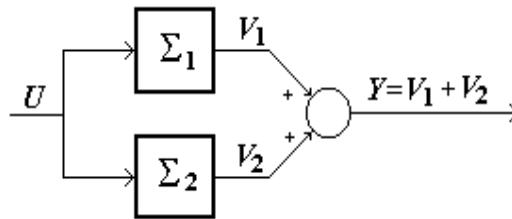


Fig. 4.2. Conexiune paralel.

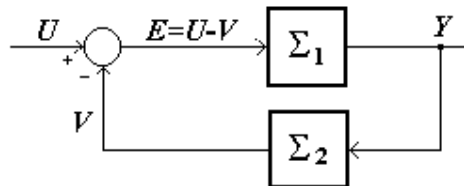


Fig. 4.3. Conexiune cu reacție.

Sistemul rezultat  $\Sigma(A,B,C,D)$ , cu vectorul de stare

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix},$$

are următorii parametri matriceali:

a) conexiune serie:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2C_1 & A_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2D_1 \end{bmatrix}, \quad C = [D_2C_1 \quad C_2], \quad D = D_2D_1; \quad (69)$$

b) conexiune paralel:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad C = [C_1 \quad C_2], \quad D = D_1 + D_2; \quad (70)$$

c) conexiune cu reacție negativă și  $D_1 = 0$ :

$$A = \begin{bmatrix} A_1 - B_1D_2C_1 & -B_1C_2 \\ B_2C_1 & A_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [C_1 \quad 0], \quad D = 0. \quad (71)$$

În toate cazurile, sistemul rezultat are dimensiunea  $n_1 + n_2$ , unde  $n_1$  este dimensiunea lui  $\Sigma_1$ , iar  $n_2$  este dimensiunea lui  $\Sigma_2$ .

La conexiunile serie și paralel are loc relația

$$\det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - A_1) \cdot \det(\lambda I - A_2), \quad (72)$$

care exprimă faptul că polinomul caracteristic al conexiunii este egal cu produsul polinoamelor caracteristice ale sistemelor componente. Prin urmare, spectrul conexiunii (mulțimea valorilor proprii) este reuniunea disjunctă a spectrelor sistemelor componente (formată din  $n_1 + n_2$  elemente), adică

$$\sigma(A) = \sigma(A_1) \cup \sigma(A_2). \quad (73)$$

#### 4.7. REDUCEREA SISTEMELOR DE TIP I-S-E

Problema reducerii ordinului sistemelor se pune în special la sistemele de mari dimensiuni, unde apar dificultăți ca urmare a complexității modelului, a erorilor de calcul și a robusteții reduse (a sensibilității exagerate la modificarea punctului de funcționare sau a unor parametri ai

procesului sau dispozitivului de comandă). Reducerea unui sistem liniar continuu de tip I-S-E se poate realiza prin *anularea dinamicii modurilor rapide*, adică a modurilor asociate valorilor proprii cu partea reală negativă mică (situatc cāt mai departe de axa imaginară, în stānga acesteia). Astfel, presupunānd cā sistemul  $\Sigma(A, B, C, D)$  are dimensiunea  $n$  și valorile proprii ordonate astfel

$$Re \lambda_1 \geq Re \lambda_2 \geq \dots \geq Re \lambda_n,$$

prin neglijarea dinamicii ultimelor  $n-q$  moduri, în sensul reținerii numai a aportului static al acestora, se obține un sistem redus de ordinul  $q$ , cu valorile proprii  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$ . Determinarea ordinului  $q$  se face astfel încât partea reală a lui  $\lambda_{q+1}$  să fie negativă și mult mai mare în modul (de cel puțin 5 ori) decât partea reală a lui  $\lambda_q$ .

În cazul în care valorile proprii ale matricei  $A$  sunt distincte, alegând ca bază a spațiului stărilor matricea vectorilor proprii ai lui  $A$ , obținem sistemul echivalent  $\bar{\Sigma}(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$ , în care matricea pătrată  $\bar{A}$  este de tip diagonal, adică

$$\bar{A} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

Ecuatiile sistemului  $\bar{\Sigma}$  pot fi scrise sub forma modală

$$\begin{cases} \dot{\bar{X}}_1 = \bar{A}_{11}\bar{X}_1 + \bar{B}_1U \\ \dot{\bar{X}}_2 = \bar{A}_{22}\bar{X}_2 + \bar{B}_2U \end{cases},$$

$$Y = \bar{C}_1\bar{X}_1 + \bar{C}_2\bar{X}_2 + \bar{D}U,$$

în care

$$\bar{A}_{11} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q), \quad \bar{A}_{22} = \text{diag}(\lambda_{q+1}, \lambda_{q+2}, \dots, \lambda_n).$$

Reducerea sistemului se realizează prin înlocuirea celei de-a doua ecuații de stare cu ecuația algebrică

$$\bar{A}_{22}\bar{X}_2 + \bar{B}_2U = 0.$$

Sistemul redus are atunci ecuațiile

$$\begin{cases} \dot{\bar{X}}_1 = \bar{A}_{11}\bar{X}_1 + \bar{B}_1U \\ Y = \bar{C}_1\bar{X}_1 + (\bar{D} - \bar{C}_2\bar{A}_{22}^{-1}\bar{B}_2)U \end{cases} \quad (74)$$

Metoda reducerii în domeniul spațiului stărilor prezintă avantajul tratării unitare a sistemelor monovariabile și multivariabile.

#### 4.8. METODA PLANULUI FAZELOR

Metoda planului fazelor este o metodă grafică de analiză a sistemelor continue, liniare sau neliniare, de ordinul unu sau doi.

Două variabile  $x_1$  și  $x_2$  se numesc *variabile de fază* atunci când una este derivata celeilalte, adică  $\dot{x}_1 = x_2$  ( $x_2$  este viteza de variație a lui  $x_1$ ). Sistemele de ordinul doi ale căror stări  $x_1$  și  $x_2$  sunt variabile de fază au ecuația de stare sub forma generală

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, u) \end{cases} \quad (75)$$

Sistemele de ordinul doi cu modelul intrare-ieșire

$$\ddot{y} = f_2(y, \dot{y}, u), \quad (76)$$

pot fi aduse la forma intrare-fază-ieșire alegând ca variabile de fază ieșirea  $y$  și derivata acesteia  $\dot{y}$ , adică  $x_1 = y$ ,  $x_2 = \dot{y}$ .

Sub acțiunea unei intrări  $u$  date, starea sistemului evoluează în planul stărilor (fazelor), dintr-o stare inițială dată, pe o traiectorie de stare numită *traiectorie de fază* (fig. 4.4). Faza curentă  $(x_1, x_2)$  este reprezentată pe traiectoria de fază printr-un punct numit *punct caracteristic*. Caracteristica principală a metodei planului fazelor este dată de *sensul de deplasare* a punctului caracteristic pe traiectoria de fază. Astfel, în semiplanul superior ( $x_2 > 0$ ), punctul caracteristic se deplasează pe traiectoria de fază de la stânga la dreapta, iar în semiplanul inferior ( $x_2 < 0$ ) - de la dreapta spre stânga. Intr-adevăr, dacă faza curentă  $(x_1, x_2)$  este situată în semiplanul superior, atunci din relația  $x_2 > 0$ , echivalentă cu  $\dot{x}_1 > 0$ , rezultă că  $x_1(t)$  este strict crescătoare în timp, deci punctul caracteristic se va deplasa pe traiectoria de fază spre dreapta. În mod similar, dacă  $x_2 < 0$ , atunci punctul



caracteristic se deplasează pe traiectoria de fază spre stânga. În cazul traiectoriei de fază din fig. 4.4, punctul caracteristic evoluează, indiferent de poziția sa inițială, spre punctul C de intersecție a traiectoriei cu axa absciselor.

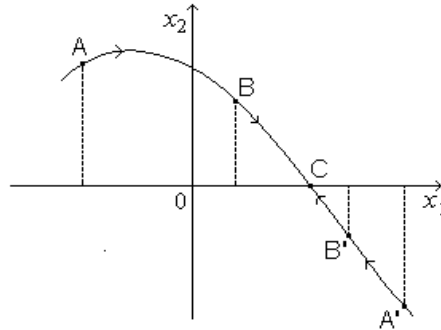


Fig. 4.4. Exemplu de traiectorie de fază.

Pentru o intrare  $u$  constantă sau, mai general, dependentă de fazele  $x_1$  și  $x_2$ , prin orice punct al planului fazelor pentru care funcția

$$f_2(x_1, x_2, u(x_1, x_2))$$

este definită trece o singură traiectorie de fază. Mulțimea tuturor traiectoriilor de fază din planul fazelor constituie *portretul fazelor*.

În cazul traiectoriei de fază descrise de ecuația

$$x_2 = f(x_1), \quad (77)$$

timpul de evoluție a stării sistemului din punctul  $A(x_{1A}, x_{2A})$  în punctul  $B(x_{1B}, x_{2B})$  este dat de următoarea relație

$$T_{AB} = \int_{x_{1A}}^{x_{1B}} \frac{dx_1}{f(x_1)}, \quad (78)$$

care se obține imediat din (77) prin înlocuirea lui  $x_2$  cu  $\frac{dx_1}{dt}$ .

*Ecuația traiectoriilor de fază* ale sistemelor de ordinul doi, cu intrarea  $u$  dependentă de variabilele de fază  $x_1$  și  $x_2$ , este dată de soluția ecuației diferențiale de ordinul unu

$$x_2 \cdot \frac{dx_2}{dx_1} = f_2(x_1, x_2, u(x_1, x_2)). \quad (79)$$

Această ecuație diferențială se obține din ecuațiile de stare (75) ale sistemului considerând că faza  $x_2$  depinde de  $t$  prin intermediul fazei  $x_1$ , adică  $x_2 = x_2(x_1(t))$ . Avem

$$\dot{x}_2 = \frac{dx_2}{dx_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_2}{dx_1} \cdot x_2,$$

iar din a doua ecuație de stare (75) se obține imediat (79). În mod similar, ecuația diferențială a traiectoriilor de fază poate fi obținută din ecuația intrare-ieșire (76) ținând seama că

$$\ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt} = \frac{dx_2}{dt} = \frac{dx_2(x_1(t))}{dt} = \frac{dx_2}{dx_1} \cdot x_2.$$

Punctele  $(x_1, x_2)$  din planul fazelor caracterizate prin  $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$  se numesc *puncte singulare* (fixe sau *de echilibru*). Din ecuațiile de stare (75) rezultă că punctele singulare satisfac relațiile

$$x_2 = 0, \quad f_2(x_1, 0, u(x_1, 0)) = 0, \quad (80)$$

deci sunt situate pe axa absciselor. Punctele singulare situate pe traiectoria de fază sunt puncte *staționare* (de regim staționar). De remarcat faptul că nu orice punct de intersecție a traiectoriei de fază cu axa absciselor este punct singular sau punct staționar. *Dacă o traiectorie de fază intersectează axa absciselor după un unghi diferit de  $\pm 90^\circ$ , atunci punctul de intersecție este punct singular staționar.* În acest caz, derivata  $dx_2 / dx_1$  în punctul de intersecție a traiectoriei de fază cu axa absciselor este finită, produsul  $x_2 \frac{dx_2}{dx_1} = 0$  este zero (deoarece  $x_2 = 0$ ), iar din ecuația diferențială a traiectoriilor de fază (79) rezultă  $f_2(x_1, 0, u(x_1, 0)) = 0$ ; prin urmare, punctul de intersecție este punct singular staționar.

Unui sistem liniar de ordinul doi  $\Sigma(A, B, C, D)$  cu o singură intrare  $i$  se poate asocia un sistem echivalent I-S-E cu variabile de fază  $\bar{\Sigma}$  (cu ecuația de stare  $\dot{\bar{x}}_1 = \bar{x}_2$ ) dacă și numai dacă matricea pătrată (de controlabilitate)

$$S = [B \quad AB] \quad (81)$$

este *nesingulară*. În acest caz, alegând matricea de transformare a stării (81) și utilizând transformarea  $X = S\bar{X}$ , sistemul  $\Sigma$  se transformă în sistemul cu variabile de fază  $\bar{\Sigma}$ .

Să considerăm acum sistemul continuu liniar de ordinul doi, de tip proporțional, cu modelul intrare-ieșire

$$\ddot{y} + 2\xi\omega_n\dot{y} + \omega_n^2 y = \omega_n^2 u, \quad \omega_n > 0, \quad (82)$$

unde  $\omega_n$  este pulsația naturală, iar  $\xi$  - factorul de amortizare. Alegând  $x_1 = y$ ,  $x_2 = \dot{y}$  și considerând intrarea  $u$  constantă pentru  $t \geq 0$  (egală cu  $u_0$ ), obținem ecuațiile de fază

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega_n^2(x_1 - u_0) - 2\xi\omega_n x_2 \end{cases}. \quad (83)$$

Sistemul (83) are punctul singular  $(u_0, 0)$  și ecuația diferențială a traiectoriilor de fază:

$$x_2 \frac{dx_2}{dx_1} = -\omega_n^2(x_1 - u_0) - 2\xi\omega_n x_2. \quad (84)$$

În cazul particular  $\xi = 0$ , prin integrarea ecuației (84) obținem ecuația algebrică a traiectoriilor de fază, sub forma

$$\omega_n^2(x_1 - u_0)^2 + x_2^2 = a^2, \quad a > 0. \quad (85)$$

Trajectoriile de fază sunt elipse cu centrul în punctul singular  $P(u_0, 0)$ , de tip *turbion* - fig. 4.5.

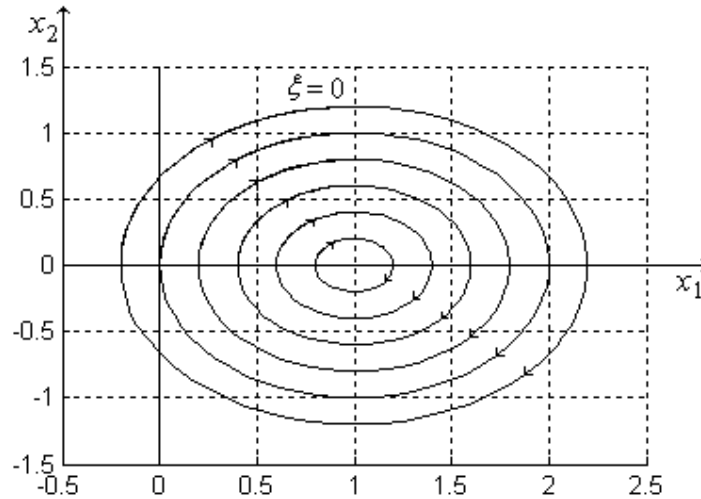


Fig. 4.5. Portretul fazelor sistemului liniar de ordinul doi cu amortizare nulă și  $u_0 = 1$ .

In consecință, sistemul este de tip oscilant întreținut (cu amplitudinea de oscilație constantă). In conformitate cu relația (78), în cazul în care faza inițială este situată în origine, perioada de oscilație este

$$T = \frac{2}{\omega_n} \int_0^{2u_0} \frac{dx_1}{\sqrt{u_0^2 - (x_1 - u_0)^2}} = \frac{2\pi}{\omega_n}. \quad (86)$$

In cazul  $|\xi| > 1$ , sistemul de ecuații diferențiale (83) admite soluția generală

$$\begin{cases} x_1(t) = u_0 + C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} \\ x_2(t) = C_1 s_1 e^{s_1 t} + C_2 s_2 e^{s_2 t} \end{cases}, \quad (87)$$

unde  $s_1$  și  $s_2$  sunt valorile proprii reale ale sistemului, adică

$$s_{1,2} = (-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}) \omega_n, \quad s_1 > s_2. \quad (88)$$

Cazurilor particulare  $C_2 = 0$  și, respectiv,  $C_1 = 0$ , le corespund traiectoriile de fază degenerate

$$D_1: x_2 = s_1(x_1 - u_0), \quad D_2: x_2 = s_2(x_1 - u_0). \quad (89)$$

*Dreptele separatoare*  $D_1$  și  $D_2$  împart planul fazelor în patru domenii distincte (fig. 4.6). Orice traiectorie de fază aparține în întregime unui singur domeniu (determinat de poziția fazei inițiale).

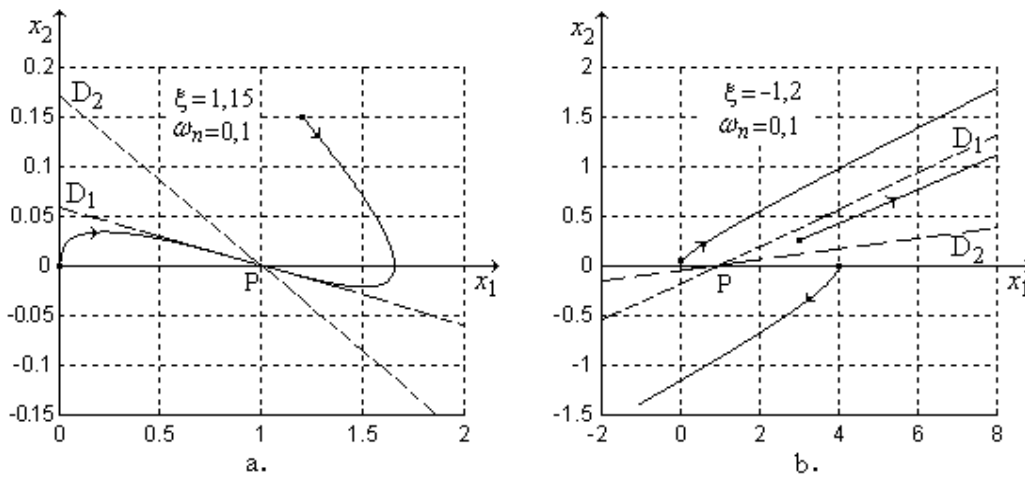


Fig. 4.6. Dreptele de separație și traiectoriile de fază ale sistemului liniar de ordinul doi cu  $|\xi| > 1$ .

În cazul  $\xi > 1$  (fig. 4.6, a), punctul singular  $P(u_0, 0)$  este punct staționar de tip *nod stabil*, (deoarece traiectoriile de fază converg către acesta din toate direcțiile), iar în cazul  $\xi < -1$  (fig. 4.6, b), punctul singular este *nod instabil* (deoarece traiectoriile de fază sunt divergente).

În cazul  $0 < \xi < 1$  (fig. 4.7, a), punctul singular  $P(u_0, 0)$  este punct staționar de tip *focar stabil* (deoarece traiectoriile de fază converg în spirală, din toate direcțiile, către acesta), iar în cazul  $-1 < \xi < 0$  (fig. 4.7, b), punctul singular este *focar instabil* (deoarece traiectoriile de fază sunt divergente).

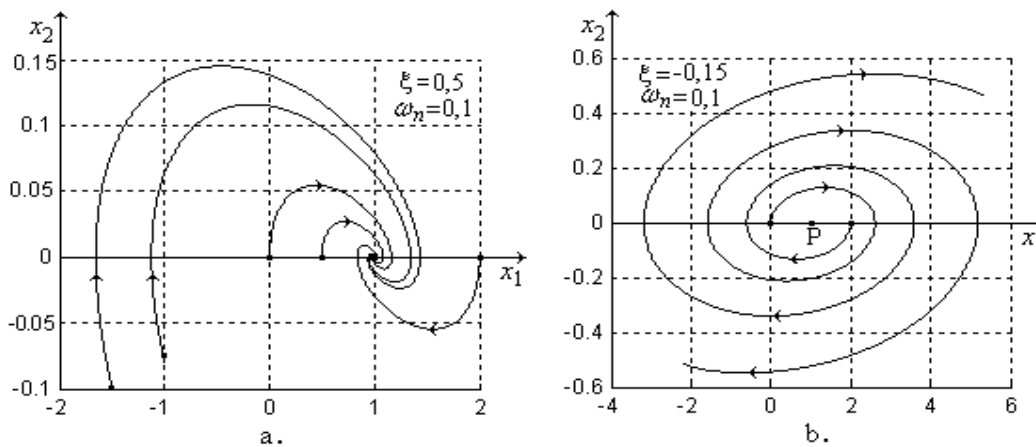


Fig. 4.7. Traiectoriile de fază ale sistemului liniar de ordinul doi cu  $|\xi| < 1$ .

Traiectoriile de fază din figurile 4.5, 4.6 și 4.7 au fost obținute în MATLAB, cu funcția *plfaz* de mai jos:

```
function[]=plfaz(cs,m,t1,X0,u0)
%   Reprezentarea grafică pe intervalul [0, t1] a traiectoriilor de fază ale sistemelor
%   liniare de ordinul doi cu factorul de amortizare cs și pulsația naturală m, pentru
%   starea inițială X0 și intrarea constantă u0.

A=[0 1;-m*m -2*cs*m];
B=[0;m*m]; C=[1 0]; D=0;
sis=ss(A,B,C,D);
t1=0:1:t1; u=u0*ones(length(t1),1);
[Y,t,X]=lsim(sis,u,t1,X0); hold on;
if (cs>=1 | cs<=-1)
    s1=(-cs-sqrt(cs*cs-1))*m;
    s2=(-cs+sqrt(cs*cs-1))*m;
```

```

plot(X(:,1),s1*(X(:,1)-1),'r'); % Dreapta de separație
plot(X(:,1),s2*(X(:,1)-1),'r'); % Dreapta de separație
end
plot(X(:,1),X(:,2),'b');      % Traectoria de faza
xlabel('x1'); ylabel('x2');
grid on;

```

Spre exemplificare, graficele din fig. 4.6-a și 4.7.b au fost obținute cu comenzile

```

plfaz(1.15,0.1,100,[0;0],1);
plfaz(1.15,0.1,100,[1.2;0.15],1);

```

respectiv

```

plfaz(-.15,0.1,118,[0;0],1);
plfaz(-.15,0.1,118,[2;0],1)

```

In fig. 4.8 este reprezentat portretul fazelor sistemului *dublu integral*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}, \quad (90)$$

având comanda  $u$  dependentă neliniar de stare, după relația

$$u = \begin{cases} 0,5 & , \quad x_1 < 0 \\ 0 & , \quad x_1 \in [0, 2] \\ -0,5 & , \quad x_1 > 2 \end{cases}. \quad (91)$$

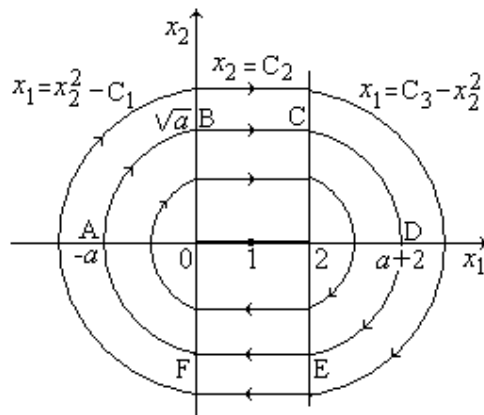


Fig. 4.8. Traectoriile de faza ale sistemului dublu integral cu comandă tripozițională dependentă de stare.

Punctele de pe axa absciselor din intervalul  $[0, 2]$  sunt puncte singulare. Prin rezolvarea ecuației diferențiale de stare

$$x_2 \frac{dx_2}{dx_1} = u,$$

se obține ecuația traiectoriilor de fază, sub forma

$$x_2 = \begin{cases} \pm\sqrt{x_1 + C_1}, & x_1 < 0 \\ C_2, & x_1 \in [0, 2] \\ \pm\sqrt{C_3 - x_1}, & x_1 > 2 \end{cases} \quad (92)$$

Traietoriile de fază au o formă ciclică, alcătuită din curbe parabolice și drepte. În cazul traiectoriei de fază care trece prin punctul  $A(a, 0)$  cu  $a > 0$ , porțiunile (FAB), (BC), (CDE) și (EF) au respectiv ecuațiile

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2^2 - a, & x_2 &= \sqrt{a}, \\ x_1 &= a + 2 - x_2^2, & x_2 &= -\sqrt{a}, \end{aligned}$$

iar punctele de pe traiectorie au coordonatele

$$\begin{aligned} B(0, \sqrt{a}), & \quad C(2, \sqrt{a}), \quad D(a+2, 0), \\ E(2, -\sqrt{a}), & \quad F(0, \sqrt{a}). \end{aligned}$$

În conformitate cu (78), avem

$$\begin{aligned} T_{AB} &= \int_{-a}^0 \frac{dx_1}{\sqrt{x_1 + a}} = 2\sqrt{x_1 + a} \Big|_{-a}^0 = 2\sqrt{a}, \\ T_{BC} &= \int_0^2 \frac{dx_1}{\sqrt{a}} = \frac{2\sqrt{a}}{a}. \end{aligned}$$

Deoarece, din considerente de simetrie, avem  $T_{AB}=T_{CD}=T_{DE}=T_{FA}$  și  $T_{BC}=T_{EF}$ , rezultă că ciclul (ABCDEF) are perioada

$$T = 4T_{AB} + 2T_{BC} = 4\left(2 + \frac{1}{a}\right)\sqrt{a}.$$

## 4.9. APLICAȚII REZOLVATE

♦ **Aplicația 4.1.** Pentru sistemul liniar continuu de ordinul doi

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

să se afle evoluția în timp a stării și a ieșirii pentru starea inițială  $X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  și intrarea  $u(t) = 1, t \geq 0$ .

**Soluție.** Avem

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vom rezolva problema printr-o metodă directă (nematriceală), apoi prin două metode matriceale: metoda Sylvester și metoda diagonalizării.

*Metoda directă.* Din ecuațiile de stare  $\dot{x}_1 = x_2 + u$  și  $\dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2$ , prin eliminarea variabilei  $x_2$ , obținem ecuația

$$\ddot{x}_1 + 3\dot{x}_1 + 2x_1 = \dot{u} + 3u.$$

Pentru  $t > 0$ , ecuația devine  $\ddot{x}_1 + 3\dot{x}_1 + 2x_1 = 3$  și are soluția generală

$$x_1(t) = \frac{3}{2} + C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}.$$

Constantele  $C_1$  și  $C_2$  se obțin din condițiile inițiale

$$x_1(0) = 1, \quad \dot{x}_1(0) = x_2(0) + u(0) = 2.$$

Rezultă

$$x_1(t) = \frac{3}{2} + e^{-t} - \frac{3}{2} e^{-2t},$$

$$x_2(t) = \dot{x}_1(t) - u(t) = -1 - e^{-t} + 3e^{-2t},$$

apoi

$$y_1(t) = x_1(t) - x_2(t) = \frac{5}{2} + 2e^{-t} - \frac{9}{2} e^{-2t},$$

$$y_2(t) = x_2(t) = -1 - e^{-t} + 3e^{-2t}.$$

La sistemele de ordin superior, metoda directă devine extrem de greoaie.

*Metoda Sylvester.* Avem

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}, \quad \det(sI - A) = s(s+3) + 2 = (s+1)(s+2),$$



deci matricea  $A$  are valorile proprii  $s_1 = -1$ ,  $s_2 = -2$ . Formăm

$$f(s) = e^{st} - \alpha_0(t) - \alpha_1(t)s,$$

iar din  $f(s_1) = 0$  și  $f(s_2) = 0$  rezultă

$$e^{-t} - \alpha_0 + \alpha_1 = 0, \quad e^{-2t} - \alpha_0 + 2\alpha_1 = 0,$$

apoi

$$\alpha_0 = 2e^{-t} - e^{-2t}, \quad \alpha_1 = e^{-t} - e^{-2t}.$$

Deci

$$\Phi(t) = e^{At} = \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ -2\alpha_1 & \alpha_0 - 3\alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Mai departe, avem:

$$\Psi(t) = (e^{At} - I)A^{-1}B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -4e^{-t} + e^{-2t} + 3 \\ 4e^{-t} - 2e^{-2t} - 2 \end{bmatrix},$$

$$X_l(t) = \Phi(t)X_0 = \begin{bmatrix} 3e^{-t} - 2e^{-2t} \\ -3e^{-t} + 4e^{-2t} \end{bmatrix}, \quad X_f(t) = \Psi(t)u_0 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -4e^{-t} + e^{-2t} + 3 \\ 4e^{-t} - 2e^{-2t} - 2 \end{bmatrix},$$

$$X(t) = X_l + X_f = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2e^{-t} - 3e^{-2t} + 3 \\ -2e^{-t} + 6e^{-2t} - 2 \end{bmatrix},$$

$$Y(t) = CX(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4e^{-t} - 9e^{-2t} + 5 \\ -2e^{-t} + 6e^{-2t} - 2 \end{bmatrix}.$$

*Metoda diagonalizării.* Matricea  $A$  are vectorii proprii

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Rezultă:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad V^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad e^{\bar{A}t} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

$$\Phi(t) = e^{At} = Ve^{\bar{A}t}V^{-1} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Graficele răspunsului liber al stării  $X_l$ , răspunsului forțat al stării  $X_f$  și răspunsului total al stării  $X_l + X_f$  au fost obținut în Matlab cu următorul program (fig. 4.9):

```

sis=ss([0 1;-2 -3],[1;0],[1 -1;0 1],0);
X0=[1,1]; t=0:0.1:6;
[Y1,t,Xl]=initial(sis,X0);
[Y2,t,Xf]=step(sis,t);
plot(t,Xl,t,Xf, t,Xl+Xf);
grid on;

```

Graficele răspunsului liber al ieșirii  $Y_l$ , răspunsului forțat al ieșirii  $Y_f$  și răspunsului total al ieșirii ( $Y_l + Y_f$ ) au fost obținute cu programul (fig. 4.10):

```

sis=ss([0 1;-2 -3],[1;0],[1 -1;0 1],0);
X0=[1,1]; t=0:0.1:6;
[Y1,t,Xl]=initial(sis,X0);
[Yf,t,Xf]=step(sis,t);
plot(t,Xl,t,Yf, t,Y1+Yf); grid on;

```

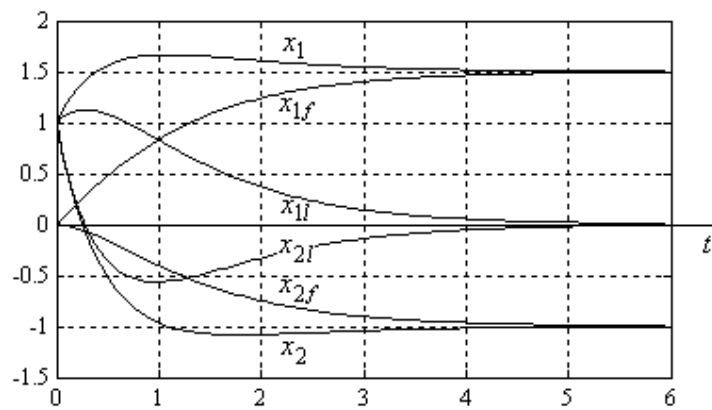


Fig. 4.9. Răspunsul liber, răspunsul forțat și răspunsul total al stării.

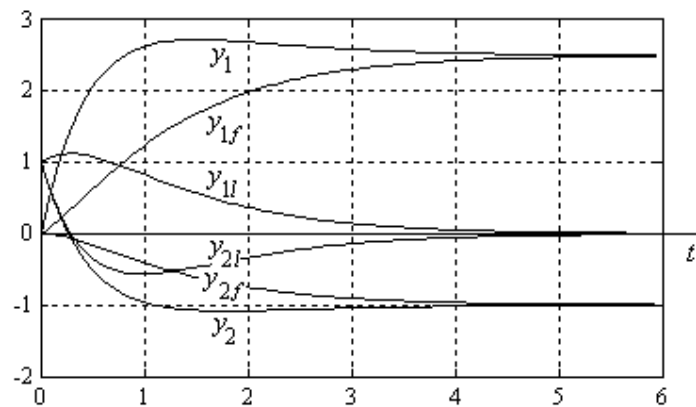


Fig. 4.10. Răspunsul liber, răspunsul forțat și răspunsul total al ieșirii.

◆ **Aplicația 4.2.** Se consideră sistemul linear continuu de tip I-S-E

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - x_2 + u \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 0,6x_2 + u \end{cases}, \quad y = x_1 - x_2.$$

Să se afle: a)  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  și  $y(t)$  pentru  $u = 13 \cdot 1(t)$ ; b) funcția pondere  $g(t)$ .

**Soluție.** Avem

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -0,6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad -1], \quad D = 0.$$

a) *Metoda directă.* Avem:

$$\ddot{x}_1 = -\dot{x}_1 - \dot{x}_2 + \dot{u} = -\dot{x}_1 - (2x_1 - 0,6x_2 + u) + \dot{u} = -\dot{x}_1 - 2x_1 + 0,6(-\dot{x}_1 - x_1 + u) - u + \dot{u}$$

deci

$$\ddot{x}_1 + 1,6\dot{x}_1 + 2,6x_1 = \dot{u} - 0,4u.$$

Modelul secundar are forma

$$\begin{cases} \ddot{w} + 1,6\dot{w} + 2,6w = u \\ x_1 = \dot{w} - 0,4w \end{cases}.$$

Pentru  $t \geq 0$ , rezultă

$$\begin{cases} \ddot{w} + 1,6\dot{w} + 2,6w = 13, & w(0) = \dot{w}(0) = 0 \\ x_1 = \dot{w} - 0,4w \end{cases},$$

de unde

$$w(t) = 5 - e^{-0,8t} \left( \frac{20}{7} \sin 1,4t + 5 \cos 1,4t \right),$$

$$x_1(t) = -2 + e^{-0,8t} \left( \frac{73}{7} \sin 1,4t + 2 \cos 1,4t \right),$$

apoi

$$x_2(t) = -\dot{x}_1 - x_1 + 13 = 15 + e^{-0,8t} \left( \frac{5}{7} \sin 1,4t - 15 \cos 1,4t \right),$$

$$y(t) = x_1 - x_2 = -17 + e^{-0,8t} \left( \frac{68}{7} \sin 1,4t + 17 \cos 1,4t \right).$$

*Metoda Sylvester.* Matricea  $A$  are valorile proprii  $s_{1,2} = a \pm jb$ , unde  $a = -0,8$  și  $b = 1,4$ . Formăm

$$f(s) = e^{st} - \alpha_0 - \alpha_1 s,$$

iar din  $f(s_1) = 0$  și  $f(s_2) = 0$ , rezultă

$$\alpha_1 = (e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) / (s_1 - s_2) = \frac{e^{at} \sin bt}{b} = \frac{5}{7} e^{-0,8t} \sin 1,4t,$$

$$\alpha_0 = e^{s_1 t} - \alpha_1 s_1 = e^{at} \left( \cos bt - \frac{a}{b} \sin bt \right) = e^{-0,8t} \left( \cos 1,4t + \frac{4}{7} \sin 1,4t \right),$$

deci

$$e^{At} = \alpha_0 I + \alpha_1 A = \begin{bmatrix} \alpha_0 - \alpha_1 & -\alpha_1 \\ 2\alpha_1 & \alpha_0 - 0,6\alpha_1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{7} e^{-0,8t} \begin{bmatrix} 7 \cos 1,4t - \sin 1,4t & -5 \sin 1,4t \\ 10 \sin 1,4t & 7 \cos 1,4t + \sin 1,4t \end{bmatrix}.$$

Mai departe,

$$X(t) = \Psi(t)u_0 = (e^{At} - I)A^{-1}Bu_0 = \begin{bmatrix} e^{-0,8t} \left( \frac{73}{7} \sin 1,4t + 2 \cos 1,4t \right) - 2 \\ e^{-0,8t} \left( \frac{5}{7} \sin 1,4t - 15 \cos 1,4t \right) + 15 \end{bmatrix},$$

$$y(t) = CX(t) + Du_0 = -17 + e^{-0,8t} \left( \frac{68}{7} \sin 1,4t + 17 \cos 1,4t \right).$$

*Metoda diagonalizării.* Valorilor proprii  $s_1$  și  $s_2$  li se asociază vectorii proprii

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 + s_1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 + s_2 \end{bmatrix}.$$

Rezultă

$$V = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0,2 + 1,4j & 0,2 - 1,4j \end{bmatrix}, \quad V^{-1} = \frac{5}{14j} \begin{bmatrix} 0,2 - 1,4j & 1 \\ -0,2 - 1,4j & -1 \end{bmatrix},$$

$$e^{\bar{A}t} = e^{-0,8t} \begin{bmatrix} e^{1,4tj} & 0 \\ 0 & e^{-1,4tj} \end{bmatrix},$$

$$e^{At} = V e^{\bar{A}t} V^{-1} = \frac{1}{7} e^{-0,8t} \begin{bmatrix} 7 \cos 1,4t - \sin 1,4t & -5 \sin 1,4t \\ 10 \sin 1,4t & 7 \cos 1,4t + \sin 1,4t \end{bmatrix}.$$

b) Sistemul are funcția pondere

$$g(t) = C e^{At} B + D \delta_0(t) = -\frac{17}{7} e^{-0,8t} \sin 1,4t.$$

*Observație.* Graficele cu răspunsurile sistemului din fig. 4.11 au fost obținut în Matlab, cu programul:

```
sis=ss([-1 -1;2 -0.6],[1;1],[1 -1],0);
u0=13;
[Y,t,X]=step(sis);
X=u0*X;
Y=u0*Y;
[G]=impulse(sis);
plot(t,X,t,Y,t,G); grid on;
```

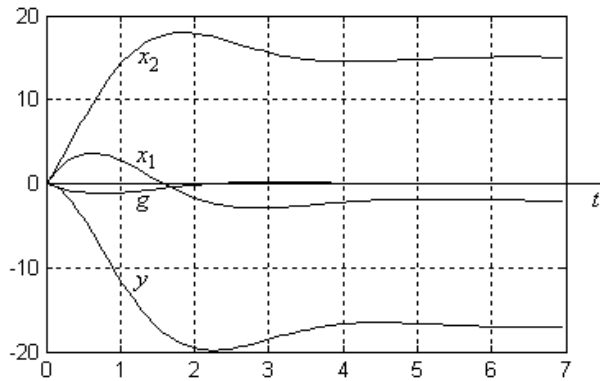


Fig. 4.11. Reprezentarea grafică a răspunsurilor sistemului.

◆ **Aplicația 4.3.** Să se afle evoluția stării și ieșirii sistemului liniar discret

$$\begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3 & -0,2 \\ 0,2 & 0,8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = [1 \quad -1] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix},$$

pentru starea inițială  $X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  și intrarea  $u(t)=1, t \geq 0$ .

**Soluție.** Vom rezolva problema prin metoda Sylvester și metoda diagonalizării.

*Metoda Sylvester.* Matricea  $A$  are valorile proprii

$$z_1=0,4, \quad z_2=0,7.$$

Formăm

$$f(z) = z^2 - \beta_0 - \beta_1 z,$$

iar din  $f(z_1)=0$  și  $f(z_2)=0$  rezultă  $p - \beta_0 - 0,4\beta_1 = 0$  și  $q - \beta_0 - 0,7\beta_1 = 0$ , unde

$$p = 0,4^t, \quad q = 0,7^t.$$

De aici obținem

$$\beta_0 = \frac{7p-4q}{3}, \quad \beta_1 = \frac{10(-p+q)}{3},$$

deci

$$A^t = \beta_0 I + \beta_1 A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4p-q & 2p-2q \\ -2p+2q & -p+4q \end{bmatrix}.$$

Mai departe,

$$X_f(t) = A^t X_0 = \begin{bmatrix} 2p-q \\ -p+2q \end{bmatrix},$$

$$X_f(t) = (I - A^t)(I - A)^{-1} B U_0 = \frac{5}{9} \begin{bmatrix} 4-2p-2q \\ -5+p+4q \end{bmatrix},$$

$$X(t) = X_l + X_f = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 20+8p-19q \\ -25-4p+38q \end{bmatrix}, \quad y(t) = CX(t) = \frac{15+4p-19q}{3}.$$

Metoda diagonalizării. Avem:

$$V = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad V^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}^t = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix},$$

deci

$$A^t = V\bar{A}^tV^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4p-q & 2p-2q \\ -2p+2q & -p+4q \end{bmatrix}.$$

Răspunsul liber și răspunsul forțat al stării sunt reprezentate grafic în fig. 4.12. Ambele răspunsuri au fost obținute în Matlab, cu următorul program:

```
sis=ss([0.3 -0.2;0.2 0.8],[1;-1],[1 -1],0,1);
t=0:1:10; X0=[1,1];
[Y1,t,X1]=initial(sis,X0,t); [Y2,t,X2]=step(sis,t);
plot(t,X1,'-'); hold on;
plot(t,X2,'-'); grid on;
```

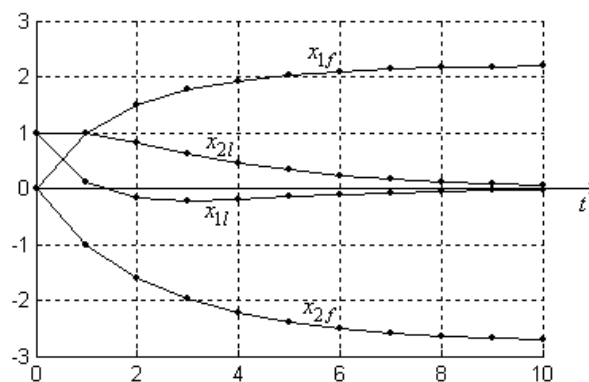


Fig. 4.12. Răspunsul liber și răspunsul forțat al stării.

Graficul răspunsului complet al stării și al ieșirii din fig. 4.13 a fost obținut în Matlab, cu programul:

```
sis=ss([0.3 -0.2;0.2 0.8],[1;-1],[1 -1],0,1);
t=0:1:10; X0=[1,1];
[Y1,t,X1]=initial(sis,X0,t); [Yf,t,Xf]=step(sis,t);
plot(t,X1+Xf,'-'); hold on;
plot(t,Y1+Yf,'-');
grid on;
```

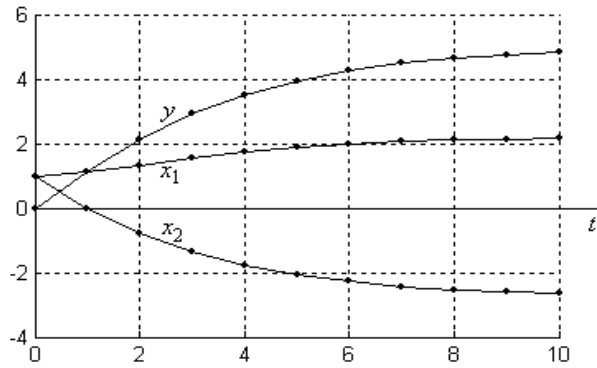


Fig. 4.13. Răspunsul stării și răspunsul ieșirii.

◆ **Aplicația 4.4.** Fiind dat sistemul

$$\Sigma: \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

să se afle sistemul  $\bar{\Sigma}$  echivalent I-S-E, cu matricea  $\bar{A}$  de tip diagonal.

**Soluție.** Alegem ca matrice de transformare  $S$  matricea  $V$  a vectorilor proprii a lui  $A$ , adică

$$S = V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Rezultă

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

apoi

$$\bar{A} = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = S^{-1}B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{C} = CS = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \bar{D} = D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Sistemul echivalent  $\bar{\Sigma}$  are ecuațiile

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2u \\ \dot{x}_2 = -2x_2 - u \end{cases},$$

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 + 3x_2 \\ y_2 = -x_1 - 2x_2 \end{cases}.$$

♦ **Aplicația 4.5.** Să se arate că sistemul  $\Sigma$  de la aplicația 4.4 este echivalent I-E cu sistemul

$$\bar{\Sigma}: \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \bar{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

**Soluție.** Pentru orice intrare de tip original (nulă pentru  $t < 0$ ), avem  $X_0 = 0$ , deci  $\bar{x}_3(0) = 0$ , iar din ultima ecuație de stare a sistemului  $\bar{\Sigma}$ , anume  $\dot{\bar{x}}_3 = -5\bar{x}_3$ , rezultă  $\bar{x}_3(t) = 0$  pentru orice  $t \geq 0$ . În consecință, ieșirea  $Y$  a sistemului  $\bar{\Sigma}$  pentru  $t \geq 0$  este influențată numai de stările  $x_1$  și  $x_2$ , fiind complet determinată de ecuațiile:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 \end{cases}; \quad \begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 \\ y_2 = x_2 \end{cases},$$

identice cu cele ale sistemului  $\Sigma$ .

♦ **Aplicația 4.6.** Să se afle discretizatul sistemului continuu de ordinul doi

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

cu perioada de eșantionare  $T = 0,2$ .

**Soluție.** Matricea  $A$  are valorile proprii  $s_1 = -1$ ,  $s_2 = -2$  și matricea vectorilor proprii

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Parametrii matriceali ai discretizatului propriu-zis sunt:

$$\begin{aligned} A^0 &= e^{\bar{A}T} = V e^{\bar{A}T} V^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-T} & 0 \\ 0 & e^{-2T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{-T} - e^{-2T} & e^{-T} - e^{-2T} \\ -2e^{-T} + 2e^{-2T} & -e^{-T} + 2e^{-2T} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0,967 & 0,148 \\ -0,297 & 0,522 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$B^0 = (A^0 - I)A^{-1}B = \begin{bmatrix} -2e^{-T} + 0,5e^{-2T} + 1,5 \\ 2e^{-T} - e^{-2T} - 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0,198 \\ -0,033 \end{bmatrix},$$

$$C^0 = C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D^0 = D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$



Pentru discretizatul aproximativ, avem

$$\tilde{A} = I + AT = \begin{bmatrix} 1 & T \\ -2T & 1-3T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,2 \\ -0,4 & 0,4 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = BT = \begin{bmatrix} T \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

♦ **Aplicația 4.7.** Să se elimine modurile rapide ale sistemului

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -0,005x_1 - 0,155x_2 - 1,15x_3 + u \\ y = 0,01x_1 + 0,005x_2 \end{cases}$$

**Soluție.** Matricea  $A$  a sistemului are valorile proprii  $\lambda_1 = -0,05$ ,  $\lambda_2 = -0,1$ ,  $\lambda_3 = -1$  și matricea vectorilor proprii

$$S = \begin{bmatrix} 400 & 100 & 1 \\ -20 & -10 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Alegând pe  $S$  ca bază a spațiului stărilor, obținem forma modală  $\bar{\Sigma}$  caracterizată prin

$$\bar{A} = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} -0,05 & 0 & 0 \\ 0 & -0,1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = S^{-1}B = \begin{bmatrix} 0,05263 \\ -0,22222 \\ 1,16960 \end{bmatrix},$$

$$\bar{C} = CS = [3,9 \quad 0,95 \quad 0,005], \quad \bar{D} = D = 0.$$

Deoarece  $\lambda_3 = 10\lambda_2 < 0$ , vom reduce sistemul de la ordinul  $n=3$  la ordinul  $n=2$ . Scriem sistemul  $\bar{\Sigma}$  sub forma

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,05 & 0 \\ 0 & -0,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,05263 \\ -0,22222 \end{bmatrix} u \\ \dot{x}_3 = -x_3 + 1,1696u \\ y = [3,9 \quad 0,95] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0,005x_3. \end{cases}$$

Ecuția diferențială  $\dot{x}_3 = -x_3 + 1,1696u$  are forma staționară  $x_3 = 1,1696u$ . Prin urmare, sistemul redus are modelul

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -0,05x_1 + 0,05263u \\ \dot{x}_2 = -0,1x_2 - 0,22222u \end{cases}, \quad y = 3,9x_1 + 0,95x_2 + 0,005848u.$$

♦ **Aplicația 4.8.** Fie sistemul linear continuu de tip integral cu ecuația intrare-ieșire

$$2\ddot{y} + \dot{y} = u.$$

Alegând variabilele de fază  $x_1 = y$  și  $x_2 = \dot{y}$ , să se reprezinte traiectoriile de fază pentru intrarea constantă  $u = u_0$  în cazurile: a)  $u_0 = 0$ ; b)  $u_0 = 1$ .

**Soluție.** Formăm ecuațiile de fază

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -0,5x_2 + 0,5u_0 \end{cases}$$

și ecuația diferențială a traiectoriilor de fază

$$x_2 \frac{dx_2}{dx_1} = -0,5x_2 + 0,5u_0,$$

echivalentă cu

$$dx_1 + 2\left(1 + \frac{u_0}{x_2 - u_0}\right)dx_2 = 0,$$

Prin integrare, obținem ecuația algebrică a traiectoriilor de fază, sub forma

$$x_1 + 2x_2 + 2u_0 \ln|x_2 - u_0| = C_1.$$

a) Pentru  $u_0 = 0$ , traiectoriile de fază sunt drepte cu ecuația

$$x_1 + 2x_2 = C_1$$

(fig. 4.14). Toate punctele de pe axa absciselor (cu  $x_2 = 0$ ) sunt puncte singulare și puncte staționare.

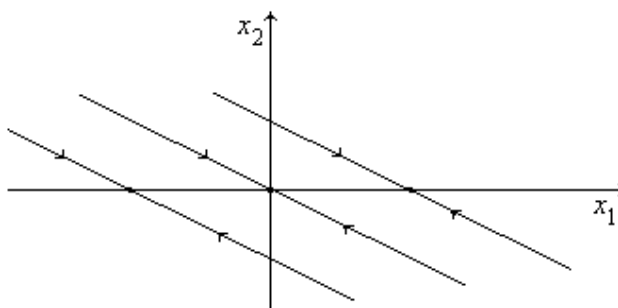


Fig. 4.14. Traiectoriile de fază pentru  $u_0 = 0$ .

b) Pentru  $u_0 = 1$ , traiectoriile de fază sunt descrise de ecuația

$$x_1 + 2x_2 + 2\ln|x_2 - 1| = C_1.$$

Ele sunt reprezentate grafic în fig. 4.15. Oricare ar fi faza inițială, punctul caracteristic tinde aperiodic către  $(1, \infty)$ . Pentru  $x_1 > 10$ , deplasarea punctului caracteristic se face practic cu viteză constantă (egală cu 1).

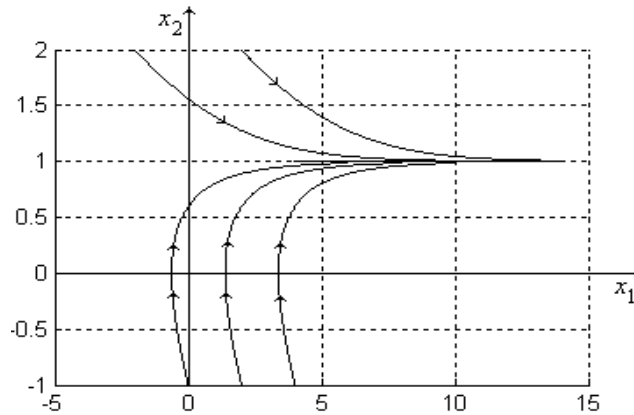


Fig. 4.15. Traiectioniile de fază pentru  $u_0=1$ .

◆ **Aplicația 4.9.** Pentru sistemul cu ecuația

$$8\ddot{y} + 6\dot{y} + y = \dot{u} + u,$$

să se determine un sistem (echivalent intrare-ieșire) cu variabile de fază.

**Soluție.** Formăm modelul secundar

$$\begin{cases} 8\dot{w} + 6w + w = u \\ y = \dot{w} + w \end{cases},$$

și alegem variabilele de stare

$$x_1 = w, \quad x_2 = \dot{w},$$

care satisfac ecuația

$$\dot{x}_1 = x_2.$$

Din ecuațiile modelului secundar, rezultă

$$\begin{cases} 8\dot{x}_2 + 6x_2 + x_1 = u \\ y = x_2 + x_1 \end{cases}.$$

Am obținut astfel sistemul cu variabile de fază

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{8}(-x_1 - 6x_2 + u) \end{cases}, \quad y = x_1 + x_2.$$

#### 4.10. APLICAȚII DE AUTOCONTROL

◆ **C4.1.** Pentru ce valori ale parametrului real  $m$ , sistemul continuu de ordinul doi

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

are răspunsul indicial  $Y(t)$  mărginit? In cazul  $m=-3$ , să se afle evoluția în timp a stării și a ieșirii pentru starea inițială  $X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  și intrarea  $u(t)=1, t \geq 0$ .

◆ **C4.2.** Pentru sistemul cu ecuațiile

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - 2x_2 + 15u \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + 2x_2 \end{cases}, \quad y = x_1 + 2x_2,$$

să se afle: a)  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  și  $y(t)$  pentru  $u=1(t)$ ; b) funcția pondere  $g(t)$ .

◆ **C4.3.** Să se afle evoluția stării și a ieșirii sistemului discret

$$\begin{cases} x_1(t+1) = 2x_1(t) - x_2(t) - 4u(t) \\ x_2(t+1) = -3x_1(t) - 4u(t) \end{cases}, \quad y(t) = x_1(t) + x_2(t),$$

a) pentru starea inițială  $X_0 = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \end{bmatrix}$  și intrarea  $u(t)=1, t \geq 0$ ;

b) pentru  $u=1^0(t)$ .

◆ **C4.4.** Fiind dat sistemul

$$\Sigma: \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} u, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

și matricea de transformare  $S = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ , să se afle sistemul echivalent  $\bar{\Sigma}$ .

◆ **C4.5.** Să se afle discretizatul propriu zis și discretizatul aproximativ al sistemului continuu de ordinul doi

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = x_1 + x_2,$$

cu perioada de eșantionare  $T$ .

◆ **C4.6.** Fie  $X_l(t)$  componenta liberă a stării unui sistem liniar continuu  $\Sigma(A,B,C,D)$  pentru starea inițială  $X_0$ , iar  $X_f(t)$  componenta forțată a stării pentru  $U(t) = U_0 \cdot 1(t)$ . Să se arate că:

a) dacă  $AX_0 = BU_0$ , atunci  $X_f(t) = X_l(t) - X_0$  ;

b) dacă  $X_0 = BU_0$ , atunci  $\dot{X}_f(t) = X_l(t)$ .

◆ **C4.7.** Pentru sistemul cu ecuația

$$9\ddot{y} + 6\dot{y} + 2y = 3\dot{u} + u ,$$

să se determine un sistem (echivalent intrare-ieșire) cu variabile de fază.

◆ **C4.8.** Pentru sistemul cu ecuația

$$\ddot{y} + 7\dot{y} + 2y = 4\ddot{u} + 3\dot{u} + u ,$$

să se determine un sistem (echivalent intrare-ieșire) cu variabile de fază.

◆ **C4.9.** Pentru ce valori ale parametrului real  $m$ , sistemul discret de ordinul doi

$$\begin{cases} x_1(t+1) = mx_1(t) + \frac{2m-1}{4}x_2(t) - 4u(t) \\ x_2(t+1) = -x_1(t) - 4u(t) \end{cases} , \quad y(t) = x_1(t) + (m-1)x_2(t)$$

are răspunsul indicial mărginit?

# 5

---

## METODA OPERAȚIONALĂ LAPLACE

---

Metoda operațională Laplace permite studiul în domeniul complex, pe baza transformării operaționale Laplace, al *sistemelor liniare continue și cu parametri constanți*.

Caracteristica principală a metodei operaționale Laplace este dată de forma simplă de descriere matematică a corelației dinamice între mărimile de intrare și mărimile de ieșire ale sistemului. Anticipând, *modelul operațional dinamic* al unui sistem monovariabil are o formă similară celei a modelului staționar  $y = Ku$ , la care ieșirea reală  $y$  se obține prin multiplicarea intrării reale  $u$  cu un factor constant de proporționalitate  $K$ .

Forma simplă a modelului operațional dinamic aduce simplificări remarcabile în studiul sistemelor liniare, în special al sistemelor compuse cu una sau mai multe legături de reacție. *Simplificarea formalismului matematic* se realizează însă cu prețul *creșterii gradului de abstractizare*, care presupune trecerea de la studiul sistemelor în domeniul real la cel în domeniul complex.

Reamintim că *modelul primar* de tip I-E al unui sistem liniar, continuu, monovariabil, cu parametri constanți, de ordinul  $n$  și cu variabile de tip original (nule pentru timp negativ) are forma:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b_r u^{(r)} + b_{r-1} u^{(r-1)} + \dots + b_1 u' + b_0 u, \quad (1)$$

unde  $a_n \neq 0$ ,  $b_r \neq 0$  și  $r \leq n$ .

Prin anularea tuturor derivatelor mărimilor de intrare și de ieșire, se obține modelul staționar:

$$y = Ku, \quad K = b_0/a_0. \quad (2)$$

În condițiile aplicării la intrarea sistemului a unui semnal de tip treaptă, modelul staționar poate fi utilizat numai în regimul trivial cu  $t < 0$  (când mărimile de intrare și ieșire sunt nule) și în regimul final (teoretic, pentru  $t \rightarrow \infty$ ) - dacă răspunsul sistemului se stabilizează la o valoare mărginită.

Modelul primar de tip I-E are două neajunsuri: forma relativ complicată (mai ales la sistemele multivariabile de ordin superior) și prezența derivatelor mărimii de intrare, care crează probleme în cazul mărimilor de intrare discontinue, deci nederivabile (cazul intrării tip treaptă).

*Modelul secundar de tip I-E, cu forma*

$$\begin{cases} a_n w^{(n)} + a_{n-1} w^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{w} + a_0 w = u \\ y = b_r w^{(r)} + \dots + b_1 \dot{w} + b_0 w \end{cases}, \quad (3)$$

înlătură al doilea neajuns, dar îl accentuează pe primul, prin introducerea mărimii  $w$  care mediază transferul intrare-ieșire.

Ambele neajunsuri sunt aparent eliminate în cazul *modelului de convoluție*

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau = g_{[0,t]} * u_{[0,t]}, \quad (4)$$

care exprimă răspunsul  $y$  la o intrare de tip original dată  $u$ , atunci când se cunoaște funcția pondere  $g$  a sistemului (reprezentând răspunsul sistemului la intrarea impuls Dirac). Răspunsul sistemului, egal cu produsul de convoluție comutativ  $g * u$ , depinde de întreaga evoluție în timp a semnalului de intrare  $u$  și a răspunsului pondere  $g$  pe intervalul  $[0, t)$ . În acest mod, valoarea curentă a ieșirii  $y$  cumulează toate efectele produse de semnalul de intrare  $u$  la momentele de timp anterioare. Forma modelului de convoluție evidențiază faptul că funcția pondere  $g$  conține toate caracteristicile și proprietățile dinamice ale sistemului, descrise de coeficienții  $a_i$  și  $b_i$  în cazul modelului primar (1) și modelului secundar (3).

Deși are o formă relativ simplă, modelul de convoluție este rar utilizat în aplicații, deoarece implică determinarea funcției pondere  $g$  (prin derivarea funcției indiciale  $h$ , obținută analitic pe baza modelului secundar). Modelul dinamic de convoluție are însă o mare *importanță teoretică*, deoarece forma sa relativ simplă, anume  $y = g * u$ , sugerează posibilitatea găsirii unui model dinamic având forma și mai simplă, prin înlocuirea produsului de convoluție cu produsul algebric. Acest lucru este realizabil cu ajutorul transformării Laplace.

În cadrul metodei operaționale Laplace, modelul de convoluție  $y = g * u$  va căpăta forma operațională de tip algebric:

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s),$$

unde  $s$  este variabila complexă Laplace, iar  $Y(s)$ ,  $G(s)$  și  $U(s)$  sunt transformatele Laplace ale funcțiilor de timp  $y(t)$ ,  $g(t)$  și  $u(t)$ . *Modelul operațional* este un model abstract (în domeniul complex), care exprimă însă corelația dinamică intrare-ieșire în cea mai simplă formă posibilă. Astfel, ieșirea complexă  $Y(s)$  este produsul algebric dintre funcția complexă de transfer  $G(s)$  (asociată structurii și caracteristicilor dinamice ale sistemului) și intrarea complexă  $U(s)$ .

În cazul unui sistem liniar compus, determinarea modelului operațional din modelele operaționale ale subsistemelor componente este o operație mult mai simplă decât cea de obținere a ecuației diferențiale a sistemului din ecuațiile diferențiale ale subsistemelor componente. Modelul operațional al sistemului compus poate fi dedus pe cale algebrică, printr-o metodologie similară celei utilizate în studiul sistemelor formate numai din subsisteme statice (de ordinul zero) sau aflate în regim staționar. În plus, procedura analitică de calcul al răspunsului unui sistem liniar continuu prin metoda operațională Laplace este una algebrică, mai simplă decât procedura din domeniul timpului, bazată pe rezolvarea ecuației diferențiale a sistemului.

## 5.1. TRANSFORMAREA LAPLACE

*Transformata Laplace* sau *imaginea Laplace* a funcției original  $f$  este definită prin relația

$$F(s) \stackrel{\Delta}{=} \mathcal{L}[f(t)] = \int_{0_-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt, \quad s \in \mathbf{C}. \quad (5)$$

În mod natural, limita inferioară a integralei se alege  $0_-$  pentru a include în rezultatul transformării și efectul funcțiilor original generalizate (tip distribuție), așa cum este funcția impuls Dirac  $\delta_0(t)$ . În plus, această alegere simplifică formula transformatei Laplace a derivatei  $f^{(k)}(t)$ , deoarece toate derivatele funcției original  $f(t)$  la momentul de timp  $t = 0_-$  sunt nule, deci nu intervin în expresia transformatei Laplace (vezi proprietatea (8) a derivării). Pe de altă parte, funcția  $f(t)$  este de tip original, continuă și derivabilă pe porțiuni, cu o rată de creștere cel mult exponențială (pentru ca integrala să fie convergentă), adică există  $A > 0$  și  $B > 0$  astfel încât

$$|f(t)| \leq A e^{Bt}. \quad (6)$$



Variabilele sistemice (de intrare, de stare și de ieșire) ale tuturor sistemelor fizice liniare, continue și cu parametri constanți, aflate în regim staționar pentru  $t < 0$ , sunt funcții de timp de tip *original*, care admit transformate Laplace. Proprietatea de-a fi funcții original este satisfăcută în virtutea ipotezei că variabilele sistemice ale unui sistem fizic reprezintă variațiile mărimilor fizice respective față de valorile lor inițiale, completată cu ipoteza că sistemul se află în regim staționar pentru  $t < 0$ . În consecință, răspunsul stării  $X(t)$  și răspunsul ieșirii  $Y(t)$  la orice semnal de intrare de tip original sunt răspunsuri forțate de tip original.

Principalele *proprietăți* ale transformării Laplace sunt următoarele:

- proprietatea de liniaritate

$$\mathcal{L}[k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)] = k_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + k_2 \mathcal{L}[f_2(t)], \quad (7)$$

valabilă oricare ar fi funcțiile original  $f_1$ ,  $f_2$  și constantele reale  $k_1$ ,  $k_2$ ;

- proprietatea de derivare (integrare) în domeniul real<sup>1</sup>

$$\mathcal{L}[f^{(k)}(t)] = s^k F(s), \quad k \in \mathbf{Z}; \quad (8)$$

- proprietatea de derivare în domeniul complex

$$\mathcal{L}[t f(t)] = -F'(s); \quad (9)$$

- proprietatea de translație în complex

$$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(s+a), \quad a \in \mathbf{C}; \quad (10)$$

- proprietatea de translație în real

$$\mathcal{L}[f(t-\tau)] = e^{-\tau s} F(s); \quad (11)$$

- proprietatea valorii finale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s), \quad (12)$$

valabilă în condițiile în care toți polii funcției  $sF(s)$  au partea reală negativă, deci sunt situați în stânga axei imaginare;

<sup>1</sup> În relația (8), derivata  $f^{(k)}(t)$  poate fi și funcție de tip *distribuție*, definită inclusiv în punctele de discontinuitate ale funcției  $f(t)$ . Astfel, prima derivată a funcției discontinue  $f(t) = e^{-at} \cdot 1(t)$  este distribuția  $f'(t) = \delta_0(t) - a e^{-at} \cdot 1(t)$ , unde  $\delta_0(t)$  este funcția impuls Dirac.

- proprietatea valorii inițiale

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s), \quad (13)$$

valabilă atunci când limita din dreapta există și este finită;

- proprietatea produsului de convoluție

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau\right] = G(s)U(s). \quad (14)$$

Transformarea Laplace inversă este operația de obținere a funcției original  $f(t)$  din imaginea Laplace  $F(s)$ . Transformata Laplace inversă a imaginii  $F(s)$  este dată de relația

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{ts} ds, \quad (15)$$

în care integrala se calculează de-a lungul drepte cu abcisa constantă  $\sigma$ , suficient de mică pentru a asigura convergența integralei. În majoritatea aplicațiilor, pentru determinarea transformatei Laplace inverse se utilizează metoda descompunerii imaginii  $F(s)$  în fracții simple, pentru care se cunosc transformatele Laplace inverse (funcțiile original).

Dintre transformatele Laplace mai frecvent utilizate, menționăm următoarele:

$$\mathcal{L}[\delta_0(t)] = 1, \quad \mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s}, \quad \mathcal{L}[t \cdot 1(t)] = \frac{1}{s^2}, \quad \mathcal{L}[t^k \cdot 1(t)] = \frac{k!}{s^{k+1}},$$

$$\mathcal{L}[e^{-at} \cdot 1(t)] = \frac{1}{s+a}, \quad \mathcal{L}[te^{-at} \cdot 1(t)] = \frac{1}{(s+a)^2},$$

$$\mathcal{L}[e^{-at} \cos bt \cdot 1(t)] = \frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2}, \quad \mathcal{L}[e^{-at} \sin bt \cdot 1(t)] = \frac{b}{(s+a)^2 + b^2},$$

$$\mathcal{L}[\cos bt \cdot 1(t)] = \frac{s}{s^2 + b^2}, \quad \mathcal{L}[\sin bt \cdot 1(t)] = \frac{b}{s^2 + b^2}.$$

## 5.2. FUNCȚIA DE TRANSFER

Prin *definiție*, funcția de transfer a unui sistem liniar continuu și monovariabil este transformata Laplace  $G(s)$  a funcției pondere  $g(t)$  a sistemului. Aplicând transformarea Laplace modelului de convoluție

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

și ținând seama de proprietatea produsului de convoluție (14), se obține *modelul operațional* dinamic intrare-ieșire

$$Y(s) = G(s)U(s), \quad (16)$$

unde  $U(s)$  este transformata Laplace a funcției de intrare  $u(t)$ , iar  $Y(s)$  este transformata Laplace a funcției de ieșire  $y(t)$ . Scriind modelul operațional sub forma

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)},$$

rezultă

**Teorema funcției de transfer.** *Funcția de transfer a unui sistem liniar continuu monovariabil este egală cu raportul dintre transformata Laplace a răspunsului sistemului la o funcție de intrare de tip original și transformata Laplace a funcției de intrare.*

Modelul operațional (16) este modelul dinamic cu cea mai simplă formă posibilă, similară celei a modelului staționar

$$y = Ku,$$

unde  $K$  reprezintă factorul static de proporționalitate al sistemului. Modelul operațional este însă un model abstract, deoarece nu realizează o corelare directă între mărimile fizice reale ale sistemului, ci o corelare între transformatele Laplace ale acestor mărimi, care sunt funcții de variabilă complexă.

Aplicând transformarea Laplace ambilor membri ai modelului primar (1) și ținând seama de proprietatea de liniaritate (7) și de proprietatea de derivare în domeniul real (8), obținem *forma primară* a funcției de transfer

$$G(s) = \frac{b_r s^r + b_{r-1} s^{r-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}, \quad (17)$$

care are la numitor chiar *polinomul caracteristic* al sistemului.

În modelul primar (1) de tip I-E, dacă  $a_0$  și  $b_0$  sunt coeficienți adimensionali, atunci toți coeficienții  $a_i$  și  $b_i$  sunt, din punct de vedere dimensional, constante de timp la puterea  $i$  (din considerente de omogenitate

dimensională). Prin urmare, putem considera că variabila  $s$  din expresia funcției de transfer (17) are, formal, dimensiunea inversului timpului.

La *sistemele proprii* (fizic realizabile, fără impuls Dirac în componența răspunsului indicial), polinomul de la numărătorul funcției de transfer are gradul mai mic sau cel mult egal cu gradul polinomului de la numitorul funcției de transfer, adică  $r \leq n$  ( $a_n \neq 0$  și  $b_r \neq 0$ ).

O rădăcină a numitorului funcției de transfer (a polinomului caracteristic) este *pol* al funcției de transfer dacă nu este și rădăcină a numărătorului, iar o rădăcină a numărătorului funcției de transfer este *zerou* al funcției de transfer dacă nu este și rădăcină a numitorului.

Prin definiție, *ordinul funcției de transfer* este egal cu gradul  $n$  al numitorului funcției de transfer. Prin simplificare (când numărătorul și numitorul au rădăcini comune), ordinul funcției de transfer se reduce. Ordinul funcției de transfer exprimă gradul de complexitate al sistemului.

Diferența  $n-r$  dintre gradul polinoamelor de la numitorul și numărătorul funcției de transfer reprezintă *ordinul relativ al funcției de transfer* sau *excesul poli-zerouri*. Ordinul relativ al funcției de transfer exprimă *gradul de inerție* al sistemului, definit prin numărul condițiilor inițiale nule (la momentul  $t=0_+$ ) ale răspunsului indicial. Într-adevăr, în conformitate cu *teorema condițiilor inițiale nule*, numărul condițiilor inițiale nule ale răspunsului indicial  $h(t)$  este egal cu  $n-r$ , adică

$$h(0_+) = h'(0_+) = \dots = h^{(n-r+1)}(0_+) = 0, \quad h^{(n-r)}(0_+) \neq 0. \quad (18)$$

Teorema condițiilor inițiale nule rezultă și din proprietatea derivării și proprietatea valorii inițiale. Astfel, pentru  $i=0, 1, \dots, n-r-1$ , avem:

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} h^{(i)}(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \mathcal{L}[h^{(i)}(t)] = \lim_{s \rightarrow \infty} s^{i+1} H(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^i G(s) = 0.$$

Un sistem se numește de *fază minimă* atunci când toate *zerourile* funcției de transfer au partea reală negativă, adică sunt situate în semiplanul stâng.

Funcția de transfer  $G(s)$  poate fi interpretată ca fiind un *factor de proporționalitate complex* între transformatele Laplace (complexe) ale mărimilor de intrare și de ieșire. În cazul particular  $s=0$ , funcția de transfer coincide cu factorul static de proporționalitate al sistemului:

$$G(0) = \frac{b_0}{a_0} = K. \quad (19)$$

La sistemele de tip *proporțional* (având  $a_0 \neq 0$  și  $b_0 \neq 0$ , deci  $K$  finit și nenul), funcția de transfer  $G(s)$  nu are pe  $s$  factor comun la numărător sau numitor, deci nu are zerou sau pol în origine. La sistemele de tip *integral* (cu  $a_0 = 0$  și  $b_0 \neq 0$ ), funcția de transfer  $G(s)$  are variabila  $s$  factor comun la numitor, iar la sistemele de tip *derivativ* (având  $a_0 \neq 0$  și  $b_0 = 0$ , deci  $K = 0$ ), funcția de transfer  $G(s)$  are pe  $s$  factor comun la numărător.

**Observații. 1°.** Din relația operațională intrare-ieșire  $Y(s) = G(s)U(s)$ , rezultă că transformata Laplace  $H(s)$  a răspunsului indicial  $h(t)$  al sistemului are expresia

$$H(s) = \frac{G(s)}{s}.$$

Din relația în complex  $G(s) = sH(s)$  și proprietatea de derivare a transformării Laplace, regăsim relația dintre funcția indicială  $h(t)$  și funcția pondere  $g(t)$ , anume

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} = h'(t) + h(0_+) \delta_0(t).$$

**2°.** Din *proprietatea valorii inițiale* rezultă

$$h(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s H(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = G(\infty), \quad (20)$$

deci

$$h(0_+) = \frac{b_n}{a_n}.$$

Dacă  $h(0_+) = 0$ , adică  $b_n = 0$ , atunci

$$h'(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \mathcal{L}[h'(t)] = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 H(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s G(s) = \frac{b_{n-1}}{a_n}, \quad (21)$$

iar dacă  $h(0_+) \neq 0$ , adică  $b_n \neq 0$ , atunci

$$h(0_+) = \frac{b_n}{a_n}, \quad h'(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s [G(s) - b_n/a_n] = \frac{b_{n-1}}{a_n} - \frac{a_{n-1} b_n}{a_n^2}. \quad (22)$$

Prin urmare, un sistem simplu propriu ( $b_n \neq 0$ ) are răspunsul indicial  $h(t)$  discontinuu în origine, un sistem strict propriu cu ordinul relativ unu ( $b_n = 0$  și

$b_{n-1} \neq 0$ ) are răspunsul indicial  $h(t)$  continuu și nederivabil în origine (tangent la o dreaptă oblică), iar un sistem strict propriu cu ordinul relativ doi sau mai mare ( $b_n = 0$  și  $b_{n-1} = 0$ ) are răspunsul indicial  $h(t)$  continuu și derivabil în origine (tangent la axa timpului).

Din *proprietatea valorii finale* rezultă că dacă răspunsul indicial  $h(t)$  al unui sistem tinde la o valoare finită pentru  $t \rightarrow \infty$  (prin stabilirea unui regim final staționar), atunci

$$h(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sH(s) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = G(0), \quad (23)$$

deci

$$h(\infty) = \frac{b_0}{a_0} = K.$$

Acest ultim rezultat este cunoscut de la analiza în domeniul timpului, deoarece, din ecuația de regim staționar  $y = Ku$  (valabilă pentru  $t \rightarrow \infty$ ), rezultă  $y(\infty) = Ku(\infty) = K$ . Prin urmare, răspunsul indicial  $h(t)$  se stabilizează la o valoare nenulă la *sistemele de tip proporțional* și la valoarea zero (fiind deci sub formă de “impuls”) la *sistemele de tip derivativ*. La *sistemele de tip integral*, răspunsul indicial  $h(t)$  tinde cu viteză constantă la  $\pm \infty$ . Această ultimă proprietate este pur teoretică, nefiind valabilă în cazul sistemelor fizice, unde răspunsul indicial este întotdeauna mărginit (deoarece sistemele fizice sunt liniare cel mult pe un domeniu limitat, încadrat de zone neliniare de tip saturație și blocare). Prin urmare, *toate rezultatele obținute în studiul sistemelor liniare pe domenii nelimitate trebuie adaptate în mod corespunzător la sistemele fizice, care au domeniul de liniaritate limitat.*

La sistemele de ordinul unu cu numitorul

$$T_1 s + 1, \quad T_1 > 0,$$

și timpul de stabilizare  $T_{s95}$ , răspunsul indicial  $h(t)$  poate fi reprezentat grafic pe baza relațiilor

$$h(0_+) = G(\infty), \quad h(\infty) = G(0), \quad T_{s95} \approx 3T_1. \quad (24)$$

**3°. Regulatorul continuu de tip PID, cu ecuația improprie**

$$c = K_R \left( \varepsilon + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon dt + T_d \frac{d\varepsilon}{dt} \right) + c_0, \quad (25)$$

are funcția de transfer

$$G_R(s) = K_R \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right). \quad (26)$$

Această funcție de transfer este improprie (cu gradul numărătorului mai mare decât cel al numitorului) din cauza componentei derivate. Caracterul impropriu reiese și din faptul că la intrare treaptă, răspunsul componentei derivativă este de tip impuls Dirac. În realitate, funcția de transfer a regulatorului PID are forma simplu proprie

$$G_R(s) = K_R \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{T_1 s + 1} \right), \quad (27)$$

unde  $T_1$  este constanta de timp de întârziere a componentei derivate (cu valoarea, de regulă, mult mai mică decât cea a constantei de timp derivate  $T_d$ ). Răspunsul indicial al componentei derivate simplu proprii cu funcția de transfer  $G_d(s) = \frac{T_d s}{T_1 s + 1}$  are expresia

$$h_d(t) = \frac{T_d}{T_1} e^{-t/T_1},$$

deci crește instantaneu la valoarea maximă  $h_d(0_+) = T_d / T_1$ , apoi coboară spre valoarea zero, timpul de stabilizare fiind  $T_{s95} \approx 3T_1$  (egal cu timpul în care exponențiala  $e^{-t/T_1}$  scade de la valoarea inițială 1 la valoarea  $e^{-3} \approx 0,05$ ).

Prin utilizarea formei improprie a componentei derivate, calculul răspunsului unui sistem de reglare nu este afectat semnificativ, deoarece caracterul impropriu al regulatorului este compensat de caracterul strict propriu al procesului reglat și, în plus, constanta de timp de întârziere dominantă a procesului este de zeci sau sute de ori mai mare decât constanta de timp de întârziere  $T_1$  a componentei derivate. Așa se explică faptul că, de cele mai multe ori, funcția de transfer a regulatorului PID apare în literatura de specialitate în forma improprie (26). În această formă, proprietățile și rolul componentei derivate sunt relativ ușor de înțeles și de interpretat, inclusiv de către personalul din domeniu fără înaltă calificare.

4°. La sistemele simplu proprii de tip proporțional și cu răspuns indicial  $h(t)$  care tinde la o valoare finită și nenulă, definim *factorul de magnitudine*  $f_m$  ca fiind raportul dintre valoarea inițială și valoarea finală a răspunsului indicial, adică

$$f_m = \frac{h(0_+)}{h(\infty)}. \quad (28)$$

Din (20), (23) și (28), rezultă

$$f_m = \frac{G(\infty)}{G(0)}. \quad (29)$$

Regulatorul pur proporțional, cu funcția de transfer  $G_R(s) = K_R$ , are factorul de magnitudine egal cu 1, iar regulatorul de tip proporțional-derivativ cu funcția de transfer

$$G_R(s) = K_R \left( 1 + \frac{T_d s}{T_1 s + 1} \right) \quad (30)$$

are factorul de magnitudine supraunitar

$$f_m = 1 + T_d / T_1.$$

În practică, factorul de magnitudine al regulatorului de tip proporțional-derivativ (sau PID) nu trebuie să depășească valoarea 20, deoarece o valoare mare a acestuia produce un semnal de comandă agresiv (tip impuls), amplificarea ridicată a zgomotului, uzură mare a instalației comandate, consum sporit de energie și combustibil etc. În cazul regulatorului cu componentă derivativă improprie (cu  $T_1 = 0$ ), factorul de magnitudine are valoarea infinită.

### 5°. Modelul operațional

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

permite confirmarea imediată a *teoremei de echivalență intrare-ieșire*, conform căreia două sisteme liniare continue sunt echivalente I-E (adică au același răspuns la orice intrare de tip original comună) dacă și numai dacă funcțiile de transfer ale sistemelor sunt egale, deci reductibile la aceeași expresie.

De asemenea, modelul operațional permite confirmarea imediată a *teoremei de minimalitate*, conform căreia un sistem liniar monovariabil este minimal (adică nu există un alt sistem echivalent intrare-ieșire de ordin mai mic) dacă și numai dacă forma primară (17) a funcției de transfer este ireductibilă (are polinoamele de la numărător și numitor coprime, adică fără rădăcini comune). Aducerea unui sistem neminimal la forma minimală se face prin simplificarea funcției de transfer până când numărătorul și numitorul funcției de transfer devin polinoame coprime.



6°. În conformitate cu proprietatea de translație în real (11), dacă sistemului cu funcția de transfer rațională  $G(s)$  i se asociază timpul mort  $\tau$ , sistemul cu timp mort obținut are funcția de transfer

$$G_m(s) = e^{-\tau s} G(s). \quad (31)$$

### 5.3. MATRICEA DE TRANSFER

În conformitate cu principiul superpoziției, pentru un sistem continuu liniar multivariabil cu  $m$  intrări și  $p$  ieșiri, dependența ieșirii  $Y_i(s)$  în raport cu intrările  $U_1(s), U_2(s), \dots, U_m(s)$  este dată de relația

$$Y_i(s) = G_{i1}(s)U_1(s) + G_{i2}(s)U_2(s) + \dots + G_{im}(s)U_m(s), \quad (32)$$

unde  $G_{ij}(s)$  este funcția de transfer a canalului cu ieșirea  $Y_i$  și intrarea  $U_j$ . Relațiile (32) pot fi scrise pentru toate ieșirile sistemului sub forma vectorial-matriceală

$$Y(s) = \mathbf{G}(s)U(s), \quad (33)$$

echivalentă cu

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1m} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{p1} & G_{p2} & \dots & G_{pm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_m \end{bmatrix}. \quad (34)$$

Funcția matriceală  $\mathbf{G}(s)$  este de tipul  $p \times m$  și reprezintă *matricea de transfer* a sistemului. Relația  $Y(s) = \mathbf{G}(s)U(s)$  exprimă faptul că, în complex, vectorul  $Y$  al mărimilor de ieșire este egal cu produsul dintre matricea de transfer  $\mathbf{G}$  a sistemului și vectorul  $U$  al mărimilor de intrare. Între ieșirea  $Y_i(s)$  și intrarea  $U_j(s)$  există relația operațională

$$Y_i(s) = G_{ij}(s)U_j(s). \quad (35)$$

În cazul sistemelor proprii, matricea de transfer  $\mathbf{G}(s)$  poate fi reprezentată și sub forma

$$\mathbf{G}(s) = \frac{\mathbf{K}_n s^n + \mathbf{K}_{n-1} s^{n-1} + \dots + \mathbf{K}_1 s + \mathbf{K}_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}, \quad (36)$$

unde  $\mathbf{K}_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) sunt matrice constante de tipul  $p \times m$ , iar polinomul de la numitorul matricei de transfer este cel mai mic multiplu comun al

polinoamelor de la numitorul tuturor funcțiilor de transfer  $G_{ij}(s)$ . Dacă toate funcțiilor de transfer  $G_{ij}(s)$  sunt ireductibile (minimale), atunci polinomul de la numitor este chiar *polinomul polilor matricei de transfer* (având gradul egal cu numărul total al polilor matricei de transfer).

**Observații. 1°.** Fie  $\Sigma(A,B,C,D)$  un sistem de tip I-S-E liniar, continuu, de ordinul  $n$ , monovariabil sau multivariabil. Aplicând transformarea Laplace ecuațiilor de stare și de ieșire

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \\ Y(t) = CX(t) + DU(t) \end{cases},$$

obținem

$$\begin{cases} X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}.$$

Mai departe, înlocuind vectorul de stare  $X(s)$  din ecuația stării în ecuația ieșirii, rezultă matricea de transfer a sistemului, sub forma

$$\mathbf{G}(s) = C(sI - A)^{-1}B + D. \quad (37)$$

Funcția matriceală

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} \quad (38)$$

este de tipul  $n \times n$  și reprezintă transformata Laplace a matricei fundamentale (de tranziție a stării)  $\Phi(t) = e^{At} \cdot 1(t)$ . Intr-adevăr, aplicând transformarea Laplace relației

$$\Phi'(t) = A\Phi(t) + \Phi(0_+)\delta_0(t),$$

unde  $\Phi(0_+) = I$ , obținem

$$s\Phi(s) = A\Phi(s) + I, \quad (sI - A)\Phi(s) = I, \quad \Phi(s) = (sI - A)^{-1}.$$

Așadar, în afara metodelor de calcul al exponențialei matriceală  $e^{At}$  în domeniul timpului (metoda Sylvester și metoda diagonalizării), aceasta mai poate fi calculată cu relația

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]. \quad (39)$$

**2°.** Din relația  $Y(s) = \mathbf{G}(s)U(s)$ , rezultă că două sisteme cu funcțiile/matricele de transfer egale au același răspuns forțat la orice intrare comună de tip original, deci sunt echivalente intrare-ieșire. Acest rezultat constituie o extindere a *teoremei de echivalență intrare-ieșire* la sistemele multivariabile:

*Două sisteme liniare continue sunt echivalente intrare-ieșire dacă și numai dacă au funcțiile/matricile de transfer egale.*

Deoarece două sisteme echivalente I-S-E sunt și echivalente I-E, rezultă că *două sisteme echivalente I-S-E au funcțiile/matricile de transfer egale.* Acest rezultat poate fi obținut și pe baza relațiilor din teorema de echivalență I-S-E. Astfel, dacă sistemele  $\Sigma(A, B, C, D)$  și  $\bar{\Sigma}(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$  sunt S-echivalente ( $X = S\bar{X}$ ), atunci:

$$\begin{aligned}\bar{G}(s) &= \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B} + \bar{D} = CS(sI - S^{-1}AS)^{-1}S^{-1}B + D \\ &= C[S(sI - S^{-1}AS)S^{-1}]^{-1}B + D = C(sI - A)^{-1}B + D = G(s).\end{aligned}$$

Două sisteme cu aceeași funcție/matrice de transfer nu sunt însă, în mod necesar, echivalente I-S-E.

**3°.** Din teorema de minimalitate a sistemelor monovariabile rezultă că un sistem monovariabil de tip I-S-E de ordinul  $n$  (cu dimensiunea vectorului de stare  $X$  egală cu  $n$ ) este minimal atunci când funcția de transfer  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$  este ireductibilă, adică are  $n$  poli.

■ In toolbox-ul **CONTROL** din **MATLAB**, sistemul *stf* cu funcția de transfer (17) se construiește cu funcția *tf* astfel:

$$\text{stf} = \text{tf}(\text{num}, \text{den}),$$

unde argumentele de intrare sunt vectori linie formați cu coeficienții de la numărătorul și numitorul funcției de transfer:

$$\text{num} = [b_n \ b_{n-1} \ \dots \ b_1 \ b_0]; \quad \text{den} = [a_n \ a_{n-1} \ \dots \ a_1 \ a_0];$$

In cazul  $r < n$ , vectorul *num* poate fi introdus și sub forma

$$\text{num} = [b_r \ b_{r-1} \ \dots \ b_1 \ b_0];$$

Alt mod de a construi un sistem în MATLAB constă în definirea prealabilă a variabilei Laplace  $s$ , urmată de scrierea expresiei funcției de transfer cu ajutorul operatorilor uzuali. De exemplu, sistemul *stf* cu funcția de transfer

$$G(s) = \frac{3s + 1}{5s^2 + 4s + 2}$$

poate fi construit astfel:

$$s = \text{tf}('s'); \quad \text{stf} = (3*s + 1)/(5*s^2 + 4*s + 2);$$

In cazul sistemelor multivariabile, construcția se face prin concatenarea subsistemelor monovariabile. De exemplu, sistemul *stf* cu matricea de transfer

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s^2+s+2} & \frac{2s+1}{s^2+3s} \\ \frac{5s+1}{s+2} & \frac{1}{s^2+2} \end{bmatrix},$$

se construiește astfel:

$$\begin{aligned} s11 &= \text{tf}([1 \ 1], [1 \ 1 \ 2]); & s12 &= \text{tf}([2 \ 1], [1 \ 3 \ 0]); \\ s21 &= \text{tf}([5 \ 1], [1 \ 2]); & s22 &= \text{tf}(1, [1 \ 0 \ 2]); \\ \text{stf} &= [s11 \ s12; s21 \ s22]; \end{aligned}$$

sau

$$\begin{aligned} s &= \text{tf}('s '); \\ s11 &= (s+1)/(s^2+s+2); & s12 &= (2*s+1)/(s^2+3*s); \\ s21 &= (5*s+1)/(s+2); & s22 &= 1/(s^2+2); \\ \text{stf} &= [s11 \ s12; s21 \ s22]; \end{aligned}$$

De asemenea, sistemul multivariabil poate fi construit prin crearea a două mulțimi de vectori linie asociați numărătorilor și numitorilor funcțiilor de transfer din componența matricei de transfer:

$$\begin{aligned} \text{Num} &= \{[1 \ 1] \ [2 \ 1]; [5 \ 1] \ 1\}; \\ \text{Den} &= \{[1 \ 1 \ 2] \ [1 \ 3 \ 0]; [1 \ 2] \ [1 \ 0 \ 2]\}; \\ \text{stf} &= \text{tf}(\text{Num}, \text{Den}); \end{aligned}$$

Sistemul de ordinul zero *stf0* cu matricea de transfer  $G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  poate fi construit

astfel:

$$\text{stf0} = \text{tf}([1 \ 2; 3 \ 4]);$$

Cu comanda

$$s1 = \text{stf}(i, j)$$

din sistemul multivariabil *stf* se extrage subsistemul *s1* cu funcția de transfer  $G_{ij}(s)$ .

Sistemul *stf* de tip I-E poate fi transformat în sistemul *sis* de tip I-S-E, astfel:

$$\text{sis} = \text{ss}(\text{stf})$$

Invers, sistemul *sis* de tip I-S-E poate fi transformat în sistemul *stf* de tip I-E, cu comanda:

$$\text{stf} = \text{tf}(\text{sis})$$

#### 5.4. FUNCȚIA DE TRANSFER A SISTEMELOR COMPUSE

La sistemelor compuse alcătuite din subsisteme liniare continue, obținerea modelului matematic în domeniul timpului, pe baza ecuațiilor diferențiale ale subsistemelor componente, este o operație complicată, care presupune eliminarea tuturor variabilelor intermediare și a derivatelor

acestora. În cazul metodei operaționale, operația de determinare a modelului unui sistem liniar compus, echivalentă cu determinarea funcției (matricei) de transfer a acestuia, se realizează pe cale algebrică, ca în cazul studiului unui sistem în regim staționar sau al unui sistem format numai din subsisteme statice (de ordinul zero, cu răspuns instantaneu).

În cazul *conexiunii serie* din fig. 5.1, formată din subsistemul  $\Sigma_1$  cu funcția de transfer  $G_1$  și subsistemul  $\Sigma_2$  cu funcția de transfer  $G_2$ , din modelele operaționale

$$Y(s) = G_2(s)V(s), \quad V(s) = G_1(s)U(s),$$

rezultă  $Y(s) = G_2(s)G_1(s)U(s)$ . Prin urmare, sistemul compus are funcția de transfer  $G(s) = G_2(s)G_1(s)$ . În general, *funcția de transfer a unei conexiuni serie de  $n$  subsisteme monovariabile este egală cu produsul funcțiilor de transfer ale subsistemelor componente, adică:*

$$G = G_1 G_2 \cdots G_n. \quad (40)$$

De regulă, comportamentul dinamic al unei conexiuni serie nu diferă radical de cel al subsistemelor componente, deoarece toți polii conexiunii sunt poli ai subsistemelor componente, iar polii unui sistem determină calitativ forma răspunsului indicial, deci comportamentul dinamic al sistemului (polii fiind rădăcini ale ecuației caracteristice a sistemului). Gradul de inerție (ordinul relativ) al conexiunii serie este egal cu suma gradelor de inerție ale subsistemelor componente.

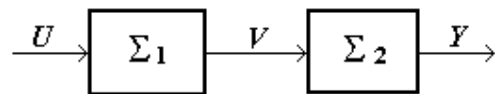


Fig. 5.1. Conexiune serie.

La conectarea în serie a sistemelor *multivariabile* trebuie îndeplinită condiția ca numărul de ieșiri ale unui subsistem să fie egal cu numărul de intrări ale subsistemului următor. *Matricea de transfer a conexiunii este egală cu produsul în ordine inversă a matricelor de transfer ale subsistemelor componente, adică*

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_n \mathbf{G}_{n-1} \cdots \mathbf{G}_1. \quad (41)$$

În cazul *conexiunii paralel* din fig. 5.2, avem

$$Y(s) = V_1(s) + V_2(s) = G_1U(s) + G_2U(s) = (G_1 + G_2)U(s),$$

deci  $G = G_1 + G_2$ . În general, *funcția de transfer a unei conexiuni paralel de  $n$  subsisteme monovariabile este egală cu suma algebrică a funcțiilor de transfer ale subsistemelor componente, adică*

$$G = G_1 + G_2 + \dots + G_n. \quad (42)$$

Ca și în cazul conexiunii serie, toți poliile conexiunii paralel sunt poli ai subsistemelor componente. Prin urmare, comportamentul dinamic al unei conexiuni paralel nu diferă radical de cel al subsistemelor componente.

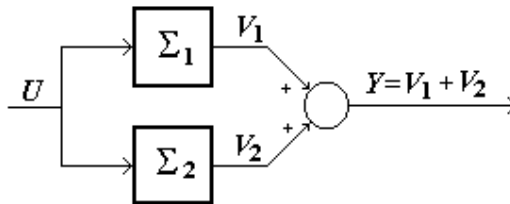


Fig. 5.2. Conexiune paralel.

Sistemele *multivariabile* pot fi conectate în paralel numai dacă au toate același număr de intrări  $m$  și același număr de ieșiri  $p$ . Matricea de transfer a conexiunii este egală cu suma algebrică a matricelor de transfer ale elementelor componente.

În cazul *conexiunii cu reacție negativă* din fig. 5, notând cu  $G_1$  și  $G_2$  funcțiile de transfer ale subsistemelor  $\Sigma_1$  și  $\Sigma_2$ , avem

$$Y = G_1E = G_1(U - V) = G_1(U - G_2Y),$$

deci

$$Y = \frac{G_1}{1 + G_1G_2}U.$$

Prin urmare, funcția de transfer a sistemului este

$$G = \frac{G_1}{1 + G_1G_2}. \quad (43)$$

Deoarece poliile conexiunii închise (cu reacție) sunt diferiți de poliile subsistemelor componente, sistemele închise, spre deosebire de sistemele deschise, pot avea un comportament dinamic radical diferit de cel al subsistemelor componente. ). Gradul de inerție (ordinul relativ) al conexiunii

cu reacție este egal cu gradul de inerție ale subsistemului  $\Sigma_1$  de pe calea directă.

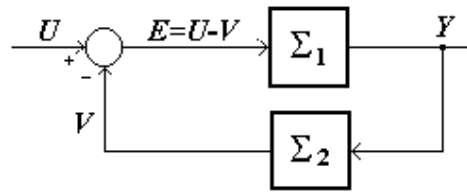


Fig. 5.3. Conexiune cu reacție.

■ In **MATLAB**, pentru construirea conexiunilor *serie*, *paralel* și *cu reacție* se utilizează operatorii “+”, “\*” și “/”:

```
s=sis1*sis2*sis3;
p=sis1+sis2+sis3;
r=sis1/(1+sis1*sis2);
```

Să considerăm acum *sistemul de reglare automată după eroare* (abatere) din fig. 5.4, având ca mărimi de intrare referința  $R$  și perturbația  $V$ . Toate celelalte mărimi ale sistemului ( $Y$ ,  $E$ ,  $C$ ,  $U$  și  $M$ ) sunt de tip efect, deci pot fi considerate mărimi de ieșire.

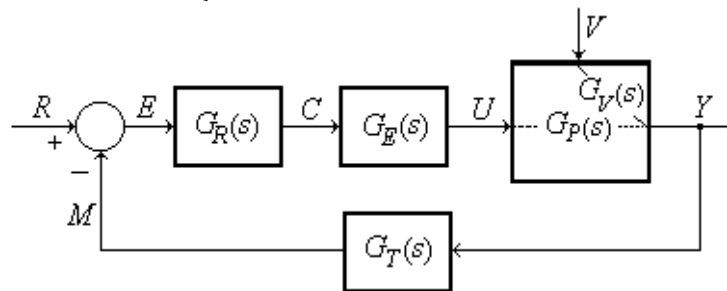


Fig. 5.4. Sistem de reglare automată.

Formula funcției de transfer a fiecăruia din cele zece canale intrare-ieșire ale sistemului de reglare poate fi obținută după următoarea regulă:

- *numărătorul* este produsul funcțiilor de transfer ale elementelor de pe traseul direct intrare-ieșire;
- *numitorul* este același, egal cu suma  $1+G_d(s)$ , unde

$$G_d = G_R G_E G_P G_T \quad (44)$$

reprezintă funcția de transfer a sistemului *deschis* de tip serie (obținut prin întreruperea buclei după traductor), cu intrarea  $E$  și ieșirea  $M$ .

Aplicând această regulă, avem:

$$G_{YR} = \frac{G_R G_E G_P}{1 + G_d}, \quad G_{YV} = \frac{G_V}{1 + G_d}, \quad (45)$$

$$G_{ER} = \frac{1}{1 + G_d}, \quad G_{EV} = \frac{G_V G_T (-1)}{1 + G_d}, \quad (46)$$

$$G_{CR} = \frac{G_R}{1 + G_d}, \quad G_{CV} = \frac{G_V G_T G_R (-1)}{1 + G_d}. \quad (47)$$

Formulele funcțiilor de transfer  $G_{YR}$  și  $G_{YV}$  pot fi deduse procedând astfel: se scriu succesiv relațiile de dependență cauzală ale mărimii  $Y(s)$ , până se ajunge la mărimile de intrare și din nou la mărimea  $Y(s)$ :

$$\begin{aligned} Y(s) &= G_P U(s) + G_V V(s) = G_P G_E C(s) + G_V V(s) = G_P G_E G_R E(s) + G_V V(s) \\ &= G_P G_E G_R [R(s) - M(s)] + G_V V(s) = G_P G_E G_R [R(s) - G_T Y(s)] + G_V V(s), \end{aligned}$$

de unde rezultă

$$(1 + G_P G_E G_R G_T) Y(s) = G_P G_E G_R R(s) + G_V V(s),$$

deci

$$Y(s) = G_{YR} R(s) + G_{YV} V(s),$$

unde  $G_{YR}$  și  $G_{YV}$  au expresiile (45).

Deoarece toate funcțiile de transfer ale sistemului au același numitor, sistemul de reglare are *ecuația polilor*

$$1 + G_d(s) = 0, \quad (48)$$

echivalentă cu

$$1 + G_R(s) G_F(s) = 0, \quad (49)$$

unde

$$G_F = G_E G_P G_T \quad (50)$$

este funcția de transfer a părții fixate.

Un sistem de reglare multivariabil are matricele de transfer:

$$\mathbf{G}_{YR} = (\mathbf{I} + \mathbf{G}_P \mathbf{G}_E \mathbf{G}_R \mathbf{G}_T)^{-1} \mathbf{G}_P \mathbf{G}_E \mathbf{G}_R, \quad \mathbf{G}_{YV} = (\mathbf{I} + \mathbf{G}_P \mathbf{G}_E \mathbf{G}_R \mathbf{G}_T)^{-1}, \quad (51)$$

$$\mathbf{G}_{ER} = (\mathbf{I} + \mathbf{G}_T \mathbf{G}_P \mathbf{G}_E \mathbf{G}_R)^{-1}, \quad \mathbf{G}_{EV} = -(\mathbf{I} + \mathbf{G}_T \mathbf{G}_P \mathbf{G}_E \mathbf{G}_R)^{-1} \mathbf{G}_T. \quad (52)$$

La aceste sisteme, vectorul de referință  $R$ , vectorul de măsurare  $M$ , vectorul de eroare  $E$  și vectorul de ieșire  $Y$  au, de regulă, aceeași dimensiune.



## 5.5. CALCULUL RĂSPUNSULUI SISTEMELOR

Metoda operațională Laplace permite determinarea algebrică a *răspunsului forțat* al unui sistem liniar continuu la funcții de intrare analitice de tip original, atunci când se cunosc ecuațiile diferențiale ale fiecărui subsistem.

Calculul analitic al răspunsului  $y_i(t)$  al unui sistem compus la o funcție de intrare tip original dată  $u_j(t)$  (de tip impuls Dirac, treaptă, rampă, sinusoidal, exponențial etc.) se face după următoarea metodologie:

- se determină transformata Laplace  $U_j(s)$  a funcției de intrare  $u_j(t)$ ;
- se determină funcțiile de transfer ale subsistemelor componente;
- se calculează funcția de transfer  $G_{ij}(s)$  a sistemului compus corespunzătoare intrării  $U_j(s)$  și ieșirii  $Y_i(s)$ , în raport cu funcțiilor de transfer ale subsistemelor componente;
- se calculează transformata Laplace  $Y_i(s)$  a răspunsului sistemului, cu relația

$$Y_i(s) = G_{ij}(s)U_j(s);$$

- se calculează răspunsul sistemului  $y_i(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_i(s)]$ , prin metoda dezvoltării funcției  $Y_i(s)$  în fracții simple.

Calculul funcției pondere  $g_{ij}(t)$  și al funcției indiciale  $h_{ij}(t)$  se face cu relațiile

$$g_{ij}(t) = \mathcal{L}^{-1}[G_{ij}(s)], \quad h_{ij}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}G_{ij}(s)\right]. \quad (53)$$

**Observații. 1<sup>0</sup>.** Numărul de condiții inițiale nule ale răspunsul indicial  $h_{ij}(t)$  este egal cu ordinul relativ al funcției de transfer  $G_{ij}(s)$ . Dacă  $G_{ij}(s)$  este simplu proprie (cu ordinul relativ zero, deci cu  $b_n \neq 0$ ), răspunsul indicial este discontinuu în origine deoarece

$$h_{ij}(0_+) = G_{ij}(\infty) = \frac{b_n}{a_n}, \quad (54)$$

iar dacă  $G_{ij}(s)$  are toți polii situați în stânga axei imaginare, atunci

$$h_{ij}(\infty) = G_{ij}(0). \quad (55)$$

Spre exemplificare, dacă  $G_{ij}(s)$  este de ordinul unu, cu constanta de timp de întârziere (de la numitor)  $T_1 > 0$  și constanta de timp de avans (de la numărător)  $\tau_1$  astfel încât  $T_1 \geq \tau_1 \geq 0$ , adică

$$G_{ij}(s) = K \frac{\tau_1 s + 1}{T_1 s + 1},$$

atunci

$$h_{ij}(0_+) = G_{ij}(\infty) = K \frac{\tau_1}{T_1}, \quad h_{ij}(\infty) = G_{ij}(0) = K, \quad (56)$$

iar durata timpului de stabilizare al răspunsului indicial pentru  $\tau_1 < T_1$  este aproximativ

$$T_{s95} \approx 3(T_1 - \tau_1). \quad (57)$$

Mai general, dacă  $G_{ij}(s)$  are numitorul de forma

$$(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots (T_n s + 1), \quad T_1, T_2, \dots, T_n > 0$$

și numărătorul de forma

$$(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \cdots (\tau_n s + 1), \quad 0 \leq \tau_i < T_i,$$

timpul de stabilizare al răspunsului indicial este aproximativ

$$T_{s95} \approx 3(T_1 + T_2 + \cdots + T_n - \tau_1 - \tau_2 - \cdots - \tau_n). \quad (58)$$

**2<sup>0</sup>.** Să considerăm un sistem continuu având funcția de transfer  $G(s)$  și polinomul polilor

$$P(s) = (s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n),$$

cu toate rădăcinile distincte (reale sau complexe). Transformata Laplace a *răspunsului indicial* are forma descompusă

$$H(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{a}{s} + \frac{a_1}{s - p_1} + \frac{a_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{a_n}{s - p_n}.$$

Din expresia răspunsului indicial

$$h(t) = a + a_1 e^{p_1 t} + a_2 e^{p_2 t} + \cdots + a_n e^{p_n t}, \quad t \geq 0, \quad (59)$$

reiese că acesta este mărginit dacă și numai dacă toți polii sistemului au partea reală negativă sau nulă (*teorema de mărginire a răspunsului indicial*).

## 5.6. RĂSPUNSUL SISTEMELOR ELEMENTARE

În cele ce urmează vor fi calculate, interpretate și analizate răspunsurile indiciale ale sistemelor liniare elementare de ordinul unu și doi.

### 5.6.1. Sistemul pur integral

Sistemul pur integral de ordinul unu, cu factorul de proporționalitate  $K$  și constanta de timp integrală  $T_i$ , are modelul I-E de forma

$$T_i \frac{dy}{dt} = Ku \quad (60)$$

și funcția de transfer

$$G(s) = \frac{K}{T_i s}. \quad (61)$$

Sistemul are răspunsul pondere în formă de treaptă (fig. 5.5):

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{T_i s}\right] = \frac{K}{T_i}, \quad (62)$$

răspunsul indicial în formă de rampă:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{T_i s^2}\right] = \frac{Kt}{T_i} \quad (63)$$

și răspunsul la intrare rampă unitară,  $u=t \cdot 1(t)$ , în formă de parabolă:

$$h_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{T_i s^3}\right] = \frac{Kt^2}{2T_i}. \quad (64)$$

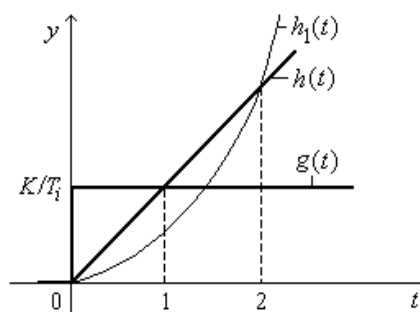


Fig. 5.5. Răspunsurile sistemului pur integral de ordinul unu.

Sistemele fizice pot fi pur integrale pe un domeniu limitat de variație a mărimii de ieșire, care se învecinează întotdeauna, la ambele capete, cu domenii de neliniaritate tip saturație sau blocare. În consecință, răspunsurile la intrare treaptă sau rampă ale sistemelor fizice de tip integral sunt mărginite.

Un sistem fizic constituit dintr-un rezervor cilindric de acumulare a lichidului și având ca mărime de ieșire nivelul din rezervor, iar ca mărimi de intrare debitul de lichid admis și debitul de lichid evacuat, are ambele canale intrare-ieșire de tip pur integral.

**5.6.2. Sistemul de întârziere de ordinul unu**

Sistemul de întârziere de ordinul unu este cel mai simplu sistem dinamic de tip proporțional. Acesta are modelul dinamic

$$T_1 \frac{dy}{dt} + y = Ku, \quad T_1 > 0, \tag{65}$$

modelul staționar

$$y = Ku \tag{66}$$

și funcția de transfer

$$G(s) = \frac{K}{T_1 s + 1}, \tag{67}$$

unde  $K$  este factorul static de proporționalitate, iar  $T_1$  - constanta de timp de întârziere.

Funcția indicială  $h(t)$  are următoarele proprietăți (fig. 5.6):

$$h(0_+) = G(\infty) = 0, \quad h'(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s G(s) = \frac{K}{T_1},$$

$$h(\infty) = G(0) = K, \quad T_{s95} \approx 3T_1.$$

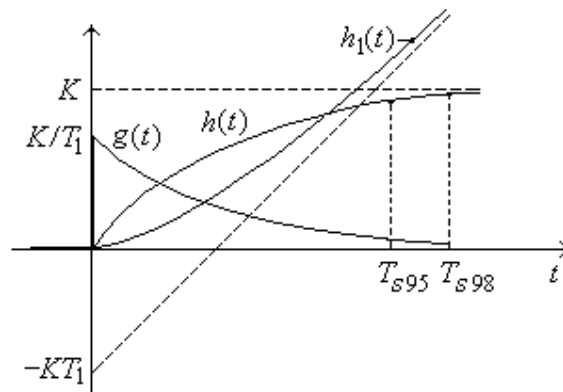


Fig. 5.6. Răspunsurile sistemului de întârziere de ordinul unu.

Funcția pondere  $g(t)$ , funcția indicială  $h(t)$  și răspunsul  $h_1(t)$  la intrare rampă unitară se calculează astfel:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{T_1 s + 1}\right] = \frac{K}{T_1} \cdot e^{-t/T_1}, \quad (68)$$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{s(T_1 s + 1)}\right] = K \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{T_1}{T_1 s + 1}\right] = K(1 - e^{-t/T_1}), \quad (69)$$

$$h_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{s^2(T_1 s + 1)}\right] = K \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2} - \frac{T_1}{s} + \frac{T_1^2}{T_1 s + 1}\right] = K T_1 \left[\frac{t}{T_1} - (1 - e^{-t/T_1})\right]. \quad (70)$$

Funcția indicială  $h(t)$  tinde simplu exponențial și concav spre valoarea finală  $K$ , atingând valorile  $0,95K$  și  $0,98K$  respectiv la momentele de timp  $T_{s,95} \approx 3T_1$  și  $T_{s,98} \approx 3,91T_1$ . Timpii de stabilizare  $T_{s,95}$  și  $T_{s,98}$  caracterizează *durata regimului tranzitoriu* (timpul de răspuns) și permit o *interpretare geometrică* simplă a constantei de timp  $T_1$ . Altă interpretare geometrică a constantei de timp  $T_1$  este ilustrată în fig. 5.7, în care segmentul AC este tangent la exponențiala  $h(t)$  în punctul A situat arbitrar pe exponențială. În cazul  $T_1 < 0$ , răspunsul indicial al sistemului este nemărginit (sistemul este instabil).

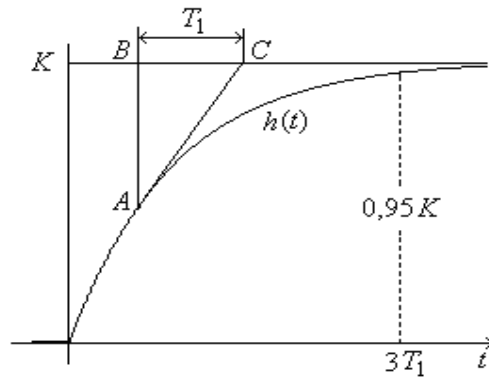


Fig. 5.7. Interpretări geometrice ale constantei de timp  $T_1$ .

Pentru intrarea sinusoidală de tip original  $u = \sin \omega t \cdot 1(t)$ , rezultă

$$Y(s) = \frac{\omega K}{(s^2 + \omega^2)(T_1 s + 1)} = \frac{K}{1 + \omega^2 T_1^2} \left( \frac{\omega T_1^2}{T_1 s + 1} + \frac{\omega - \omega T_1 s}{s^2 + \omega^2} \right),$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{K}{1 + \omega^2 T_1^2} (\omega T_1 e^{-t/T_1} + \sin \omega t - \omega T_1 \cos \omega t) \\ &= M(\omega) [e^{-t/T_1} \sin \alpha + \sin(\omega t - \alpha)], \end{aligned}$$

unde

$$M(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1+\omega^2 T_1^2}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \omega T_1, \quad \alpha \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

În regim *sinusoidal permanent*, răspunsul sistemului (obținut prin eliminarea componentei tranzitorii ce tinde exponențial la zero) are expresia

$$y_p(t) = M(\omega) \sin(\omega t - \alpha).$$

Sub aspect dinamic, traductoarele din componența dispozitivelor de măsurare ale unui proces fizic sunt considerate sisteme de întârziere de ordinul unu dacă valoarea constantei de timp de întârziere a traductorului este relevantă în raport cu cea a procesului (dacă valoarea constantei de timp este neglijabilă, traductorul este considerat de tip static, adică de ordinul zero și cu răspuns instantaneu).

### 5.6.3. Sistemul derivativ de ordinul unu

Sistemul derivativ de ordinul unu are modelul dinamic

$$T_1 \dot{y} + y = K T_d \dot{u}, \quad T_1 > 0, \quad (71)$$

modelul staționar

$$y = 0$$

și funcția de transfer

$$G(s) = K \frac{T_d s}{T_1 s + 1}, \quad (72)$$

unde  $K$  este factorul de proporționalitate,  $T_d$  constanta de timp derivativă și  $T_1$  constanta de timp de întârziere.

Funcția indicială  $h(t)$  are următoarele proprietăți (fig. 5.8):

$$h(0_+) = G(\infty) = K \frac{T_d}{T_1}, \quad h(\infty) = G(0) = 0, \quad T_{s95} \approx 3T_1.$$

Sistemul are *funcția pondere*

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ K \frac{T_d s}{T_1 s + 1} \right] = K \frac{T_d}{T_1} \mathcal{L}^{-1} \left[ 1 - \frac{1}{T_1 s + 1} \right] = K \frac{T_d}{T_1} [\delta_0(t) - \frac{1}{T_1} e^{-t/T_1}],$$

și *funcția indicială*

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[K \frac{T_d}{T_1 s + 1}\right] = K \frac{T_d}{T_1} e^{-t/T_1} . \quad (73)$$

Având răspunsul indicial  $h(t)$  de tip „impuls”, cu valoarea inițială  $K \frac{T_d}{T_1}$  și valoarea finală zero, sistemul derivativ de ordinul unu este frecvent utilizat în practică la generarea semnalelor de comandă cu caracter anticipativ (cazul componentei derivate a algoritmului PID). Timpul de stabilizare  $T_{s95}$  la care  $h(t)$  scade cu 95% din valoarea inițială (exponențiala  $e^{-t/T_1}$  scade de la valoarea inițială 1 la valoarea  $e^{-3} \approx 0,05$ ) este aproximativ egal cu  $3T_1$ .

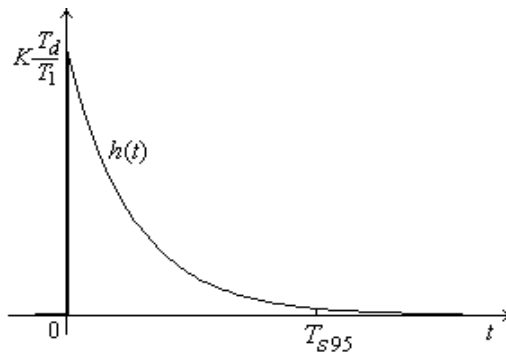


Fig. 5.8. Răspunsul indicial al sistemului derivativ de ordinul unu.

Scriind funcția de transfer sub forma

$$G(s) = K \frac{T_d}{T_1} \left(1 - \frac{1}{T_1 s + 1}\right),$$

rezultă că sistemul derivativ de ordinul unu poate fi obținut prin conectarea paralel-opusă a unui sistem de tip static și a unui sistem de întârziere de ordinul unu, ambele având același factor de proporționalitate.

#### 5.6.4. Sistemul de avans-întârziere de ordinul unu

Sistemul de avans-întârziere de ordinul unu are modelul dinamic

$$T_1 \dot{y} + y = K(\tau \dot{u} + u), \quad T_1 > 0, \quad (74)$$

modelul staționar

$$y = K u$$

și funcția de transfer

$$G(s) = \frac{K(\tau_1 s + 1)}{T_1 s + 1}, \tag{75}$$

unde  $K$  este factorul static de proporționalitate,  $T_1$  - constanta de timp de întârziere, iar  $\tau_1$  - constanta de timp de avans. Efectul de avans este dominant în cazul  $\tau_1 > T_1$ , iar efectul de întârziere este dominant în cazul  $\tau_1 < T_1$ .

Funcția indicială  $h(t)$  are următoarele proprietăți (fig. 5.9):

$$h(0_+) = G(\infty) = K \frac{\tau_1}{T_1}, \quad h(\infty) = G(0) = K,$$

$$T_{s95} \cong \begin{cases} 3|T_1 - \tau_1|, & 0 < \tau_1 \leq 2T_1 \\ 3T_1, & \tau_1 > 2T_1 \end{cases}.$$

Funcția pondere și funcția indicială se calculează astfel:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K(\tau_1 s + 1)}{T_1 s + 1}\right] = \frac{K}{T_1} \mathcal{L}^{-1}\left[\tau_1 + \frac{T_1 - \tau_1}{T_1 s + 1}\right] = \frac{K}{T_1} [T_1 \delta_0(t) + (1 - \frac{\tau_1}{T_1}) e^{-t/T_1}],$$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K(\tau_1 s + 1)}{s(T_1 s + 1)}\right] = K \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{T_1 - \tau_1}{T_1 s + 1}\right] = K \left[1 - (1 - \frac{\tau_1}{T_1}) e^{-t/T_1}\right].$$

În cazul  $\tau_1 < 0$  (zerou pozitiv), când sistemul nu este de fază minimă, din  $h(0_+) = K \tau_1 / T_1 < 0$  și  $h(\infty) = K$ , rezultă că răspunsul indicial are la început o variație bruscă de sens opus față de valoarea finală.

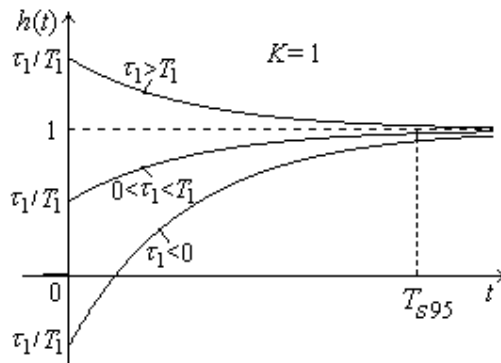


Fig. 5.9. Răspunsul indicial al sistemului de avans-întârziere de ordinul unu.

Sistemul de avans cu  $\tau_1 \gg T_1$  este frecvent utilizat în generarea semnalelor de comandă cu caracter anticipativ, deoarece răspunsul indicial are o valoare



inițială de  $\tau_1/T_1$  ori mai mare decât valoarea finală. Raportul  $\tau_1/T_1$  reprezintă *factorul de magnitudine*. Scriind funcția de transfer sub forma

$$G(s) = K \left[ 1 + \frac{(\tau_1 - T_1)s}{T_1 s + 1} \right],$$

se obține funcția de transfer a unui regulator de tip PD cu constanta de timp derivativă  $T_d = \tau_1 - T_1$ .

Scriind funcția de transfer sub forma

$$G(s) = K \left( \frac{\tau_1}{T_1} - \frac{\tau_1/T_1 - 1}{T_1 s + 1} \right),$$

rezultă că sistemul de avans-întârziere de ordinul unu poate fi obținut prin conectarea paralel-opusă a unui sistem de tip static și a unui sistem de întârziere de ordinul unu.

### 5.6.5. Sistemul de întârziere de ordinul doi

Sistemul de întârziere de ordinul doi are ecuația diferențială

$$\ddot{y} + 2\xi\omega_n\dot{y} + \omega_n^2 y = K\omega_n^2 u, \quad \omega_n > 0, \quad \xi \geq 0, \quad (76)$$

modelul staționar

$$y = Ku$$

și funcția de transfer

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}, \quad (77)$$

unde  $K$  este factorul static de proporționalitate,  $\xi$  factorul de amortizare, iar  $\omega_n$  pulsația naturală.

Deoarece excesul poli-zero-uri este egal cu doi, funcția indicială  $h(t)$  este continuă în origine și tangentă la axa timpului, adică  $h(0_+) = h'(0_+) = 0$ . În plus, avem  $h(\infty) = G(0) = K$ .

Funcția de transfer a sistemului poate fi scrisă și sub forma

$$G(s) = \frac{K}{T_2^2 s^2 + T_1 s + 1},$$

unde  $T_1$  și  $T_2$  sunt constante de timp pozitive. În continuare, vom considera  $K=1$ .

**Cazul**  $0 < \xi < 1$  (*regim oscilant amortizat*). La intrare treaptă unitară, transformata Laplace a răspunsului sistemului are forma

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\xi\omega_n}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{s} - \frac{(s + \xi\omega_n) + \xi\omega_n}{(s + \xi\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1-\xi^2})^2}.$$

Cu notațiile

$$\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = \omega, \quad \xi = \cos\alpha, \quad \alpha \in (0, \frac{\pi}{2}),$$

răspunsul indicial devine astfel:

$$y(t) = 1 - e^{-\xi\omega_n t} \left( \cos\omega t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\omega t \right), \quad (78)$$

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \sin(\omega t + \alpha), \quad (79)$$

fiind de tip *oscilant amortizat* (fig. 5.10), cu pulsația  $\omega < \omega_n$  (cu atât mai mică cu cât factorul de amortizare este mai mare).

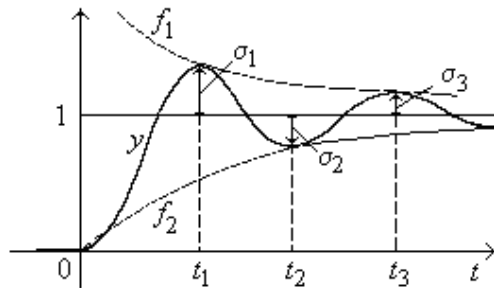


Fig. 5.10. Răspunsul indicial al sistemului de întârziere de ordinul doi pentru  $0 < \xi < 1$ .

Prin anularea derivatei răspunsului indicial

$$\dot{y}(t) = \frac{\omega_n^2}{\omega} e^{-\xi\omega_n t} \sin\omega t,$$

se obțin momentele de extrem

$$t_k = \frac{k\pi}{\omega}, \quad k \in \mathbf{N},$$

și valorile de extrem

$$y(t_k) = 1 - (-1)^k e^{-\xi\omega_n t_k} = 1 - (-1)^k e^{-k\pi \operatorname{ctg}\alpha},$$

din care reiese că punctele de extrem sunt situate pe exponențialele

$$f_{1,2}(t) = 1 \pm e^{-\xi \omega_n t}.$$

Valoarea  $\sigma_k$  a “pulsului”  $k$  este

$$\sigma_k = y(t_k) - 1 = (-1)^{k+1} e^{-k\pi \text{ctg} \alpha} = (-1)^{k+1} \sigma_1^k.$$

Pulsul maxim (depășirea maximă a valorii finale), cu expresia

$$\sigma_1 = e^{-\pi \text{ctg} \alpha} = e^{\frac{-\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}, \quad (80)$$

se numește *suprareglaj* sau *supradepășire*, iar

$$\delta = 1 - \frac{\sigma_3}{\sigma_1} = 1 - \sigma_1^2$$

reprezintă *gradul de amortizare* a oscilațiilor (fig. 5.11).

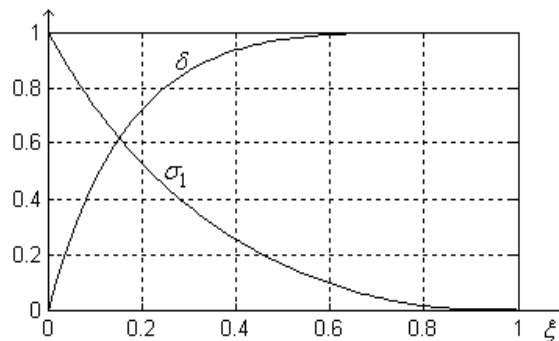


Fig. 5.11. Dependența suprareglajului  $\sigma_1$  și a gradului de amortizare  $\delta$  de factorul  $\xi$ .

**Cazul**  $\xi = 0$  (*regim oscilant întreținut*). Sistemul are răspunsul indicial

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + \omega_n^2)} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \omega_n^2} \right] = 1 - \cos \omega_n t, \quad (81)$$

care este sinusoidal, cu amplitudinea constantă (egală cu 1) și cu pulsația egală cu pulsația naturală  $\omega_n$  (fig. 5.12).

Tinând seama de (9), pentru semnalul de intrare armonic  $u = \cos \omega_n t \cdot 1(t)$ , se obține răspunsul

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\omega_n^2 s}{(s^2 + \omega_n^2)^2} \right] = \frac{1}{2} \omega_n \mathcal{L}^{-1} \left[ \left( \frac{-\omega_n}{s^2 + \omega_n^2} \right)' \right] = \frac{1}{2} \omega_n t \sin \omega_n t,$$

caracterizat prin oscilații sinusoidale cu amplitudinea liniar crescătoare în timp.

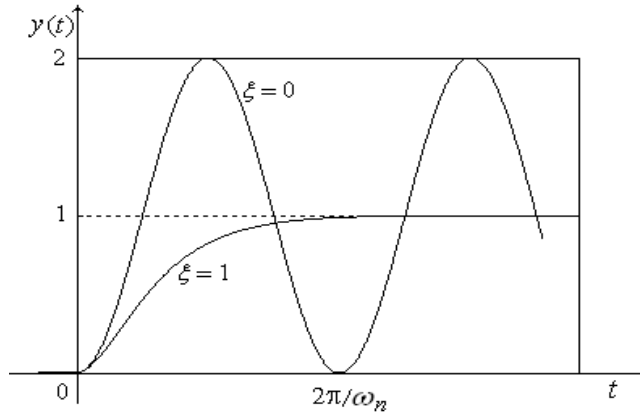


Fig. 5.12. Răspunsul indicial al sistemului de întârziere de ordinul doi, pentru  $\xi=0$  și  $\xi=1$ .

**Cazul  $\xi=1$  (regim critic).** Sistemul are răspunsul indicial

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega_n^2}{s(s+\omega_n)^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\omega_n} - \frac{\omega_n}{(s+\omega_n)^2}\right] = 1 - e^{-\omega_n t}(1 + \omega_n t).$$

Răspunsul indicial este *strict crescător* pentru  $t \geq 0$  (fig. 5.12).

**Cazul  $\xi > 1$  (regim supraamortizat).** Deoarece poli funcției de transfer (77) sunt reali și negativi, aceasta poate fi scrisă sub forma

$$G(s) = \frac{1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}, \quad T_1 \geq T_2 > 0. \tag{82}$$

Sistemul având ordinul relativ doi, răspunsul indicial satisface două condiții inițiale nule, fiind deci continuu și derivabil în origine (tangent la axa timpului). În plus, răspunsului indicial este crescător și are o formă convex-concavă, cu punct de inflexiune (fig. 5.13). Toate aceste proprietăți rezultă intuitiv din reprezentarea sistemului sub forma unei conexiuni serie de două subsisteme de ordinul unu, cu funcțiile de transfer

$$G_1(s) = \frac{1}{T_1 s + 1}, \quad G_2(s) = \frac{1}{T_2 s + 1}.$$

Prin eliminarea termenului de gradul doi de la numitorul funcției de transfer obținem aproximația

$$G(s) \approx \frac{1}{(T_1 + T_2)s + 1},$$

care justifică formula

$$T_{s95} \approx 3(T_1 + T_2)$$

a timpului de stabilizare a răspunsului indicial.

Pentru  $k = T_2/T_1 < 1$ , sistemul are răspunsul indicial

$$y(t) = 1 - \frac{1}{1-k} e^{-t/T_1} + \frac{k}{1-k} e^{-t/T_2} . \quad (83)$$

Între constantele de timp  $T_1$  și  $T_2$  ale sistemului și timpii  $t_0$ ,  $t_1$  și  $T'$  ai răspunsului indicial (fig. 5.13) există următoarea relație de ordonare:

$$t_0 < T_2 \leq t_1 \leq T' - t_1 \leq T_1 < T' - t_0 . \quad (84)$$

Parametrii  $y_1$ ,  $t_0$ ,  $t_1$ ,  $T$  și  $T'$  pot fi determinați experimental din forma grafică a răspunsului indicial. Dacă se cunosc oricare doi dintre acești parametri, atunci se pot calcula constantele de timp  $T_1$  și  $T_2$ .

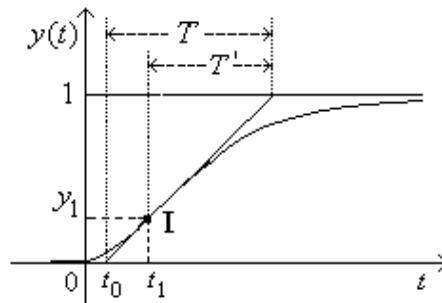


Fig. 5.13. Răspunsul indicial al sistemului de întârziere de ordinul doi pentru  $\xi > 1$ .

**Cazul**  $-1 < \xi < 0$  (*regim oscilant instabil*). Răspunsul indicial al sistemului este dat de relațiile (78) și (79), în care  $\alpha \in (\pi/2, \pi)$ . Răspunsul indicial se caracterizează prin oscilații exponențial crescătoare (fig. 5.14).

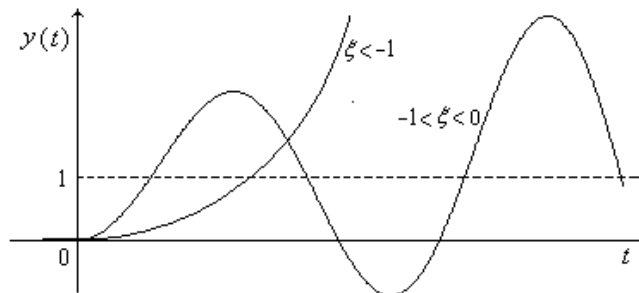


Fig. 5.14. Răspunsul indicial al sistemului de întârziere de ordinul doi pentru  $\xi < 0$ .

**Cazul**  $\xi < -1$  (*regim supraamortizat instabil*). Funcția de transfer poate fi scrisă sub forma

$$G(s) = \frac{1}{(T_1s+1)(T_2s+1)}, \quad T_1 < T_2 < 0.$$

Răspunsul indicial, dat de relația (83), este crescător și nemărginit (fig. 5.14).

### 5.6.6. Sistemul derivativ de ordinul doi

Sistemul derivativ de ordinul doi (cu poli reali negativi) are ecuația

$$T_1T_2\ddot{y} + (T_1+T_2)\dot{y} + y = KT_d\dot{u}, \quad 0 < T_2 \leq T_1, \quad (85)$$

și funcția de transfer

$$G(s) = \frac{KT_d s}{(T_1s+1)(T_2s+1)}, \quad (86)$$

unde  $T_d$  este constanta de timp derivativă, iar  $T_1$  și  $T_2$  sunt constantele de timp de întârziere. De remarcat faptul că pentru  $T_2=0$ , sistemul devine derivativ de ordinul unu.

Funcția indicială  $h(t)$  are următoarele proprietăți:

$$h(0_+) = G(\infty) = 0, \quad h'(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sG(s) = \frac{KT_d}{T_1T_2},$$

$$h(\infty) = G(0) = 0.$$

Ca și sistemul derivativ de ordinul unu, sistemul derivativ de ordinul doi este utilizat în generarea semnalelor de comandă cu caracter anticipativ, răspunsul indicial fiind de tip „impuls”, deoarece crește în primele momente de la zero la o valoare maximă (deci nu instantaneu, ca la sistemul derivativ de ordinul unu), după care coboară spre zero (fig. 5.15). Acest comportament rezultă și din faptul că sistemul derivativ de ordinul doi poate fi obținut prin conectarea în serie a sistemului derivativ de ordinul unu cu funcția de transfer

$$G_1(s) = \frac{KT_d s}{T_1s+1},$$

cu sistemul de întârziere de ordinul unu cu funcția de transfer

$$G_2(s) = \frac{1}{T_2s+1}.$$

În cazul  $T_1 \neq T_2$  și  $K=1$ , răspunsul indicial este dat de relația:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{T_d}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \right] = \frac{T_d}{T_1 - T_2} \cdot \left( e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}} \right). \quad (87)$$

Pentru  $T_1 = T_2$ , răspunsul indicial are expresia

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{T_d}{(T_1 s + 1)^2} \right] = \frac{T_d t}{T_1^2} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}}. \quad (88)$$

Valoarea maximă, atinsă la momentul  $t = T_1$ , este dată de formula

$$h_{\max} = \frac{T_d}{e T_1}. \quad (89)$$

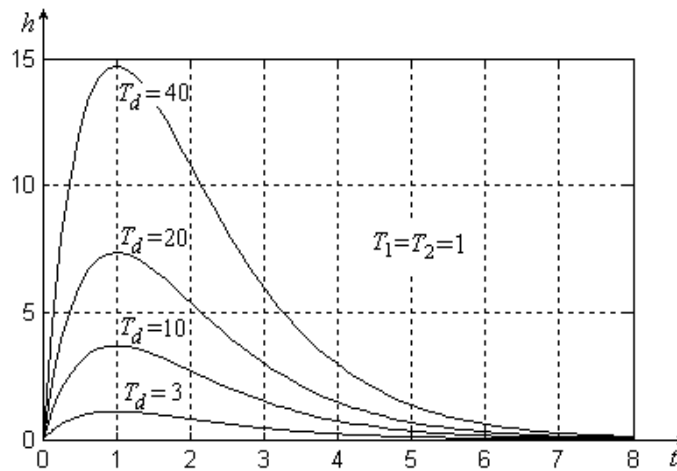


Fig. 5.15. Răspunsul indicial al sistemului derivativ de ordinul doi cu  $K=1$  și  $T_1=T_2=1$ , pentru diferite valori ale constantei de timp derivate  $T_d$ .

### 5.6.7. Sistemul de avans-întârziere de ordinul doi

Sistemul de avans-întârziere de ordinul doi are ecuația

$$T_1 T_2 \ddot{y} + (T_1 + T_2) \dot{y} + y = K(\tau_1 \dot{u} + u), \quad 0 < T_2 \leq T_1, \quad (90)$$

și funcția de transfer

$$G(s) = \frac{K(\tau_1 s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}, \quad (91)$$

unde  $\tau_1$  este constanta de timp de avans, iar  $T_1$  și  $T_2$  sunt constantele de timp de întârziere. Pentru  $\tau_1 = T_2$ , sistemul devine de întârziere de ordinul unu, cu

funcția de transfer  $\frac{K}{T_1 s + 1}$ .

Sistemul de avans-întârziere de ordinul doi poate fi obținut prin conectarea în serie a unui sistem de avans-întârziere de ordinul unu având funcția de transfer

$$G_1(s) = \frac{K(\tau_1 s + 1)}{T_1 s + 1},$$

cu un sistem de întârziere de ordinul unu având funcția de transfer

$$G_2(s) = \frac{1}{T_2 s + 1}.$$

Prin urmare, răspunsul la o intrare dată a sistemului de avans-întârziere de ordinul doi este mai lent decât răspunsul sistemului de avans-întârziere de ordinul unu cu funcția de transfer  $G_1(s)$ . Pentru  $T_2=0$ , sistemul devine de avans-întârziere de ordinul unu.

Funcția indicială  $h(t)$  are următoarele proprietăți (fig. 5.16):

$$h(0_+) = G(\infty) = 0, \quad h'(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s G(s) = \frac{K \tau_1}{T_1 T_2}, \quad h(\infty) = G(0) = K.$$

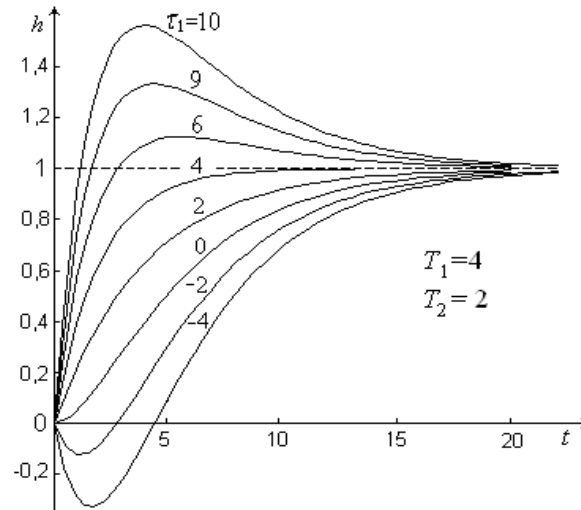


Fig. 5.16. Răspunsul indicial al sistemului de avans-întârziere de ordinul doi cu  $K=1$ , pentru diferite valori ale constantei de timp de avans  $\tau_1$ .

În cazul  $K=1$  și  $T_1 > T_2 > 0$ , răspunsul indicial este dat de relația

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\tau_1 s + 1}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \right] = 1 + \frac{\tau_1 - T_1}{T_1 - T_2} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{\tau_1 - T_2}{T_1 - T_2} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}}.$$



Pentru  $0 \leq \tau_1 \leq \max\{T_1, T_2\}$ , răspunsul indicial este crescător, iar pentru  $\tau_1 > \max\{T_1, T_2\}$ , are suprareglajul (supradepășirea)

$$\sigma = (\tau_1/T_1 - 1)^{\frac{1}{1-T_2/T_1}} \cdot (\tau_1/T_2 - 1)^{\frac{1}{1-T_1/T_2}}. \quad (92)$$

Formula suprareglajului se obține ținând seama că ecuația  $\dot{h}(t)=0$  are soluția  $t_0$  dată de relația

$$t_0 = \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2} \ln \frac{\tau_1/T_2 - 1}{\tau_1/T_1 - 1}. \quad (93)$$

Sistemul de avans de ordinul doi, cu  $\tau_1 > \max\{T_1, T_2\}$ , este utilizat în generarea semnalelor de comandă cu caracter anticipativ, deoarece răspunsul indicial crește în primele momente la o valoare mai mare decât valoarea sa finală. Creșterea este însă mult mai lină decât la sistemele de avans de ordinul unu (unde creșterea este bruscă).

În cazul  $T_1 = T_2$ , răspunsul indicial are expresia

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\tau_1 s + 1}{s(T_1 s + 1)^2}\right] = \frac{1}{s} - \frac{T_1}{T_1 s + 1} + \frac{\tau_1 - T_1}{(T_1 s + 1)^2} = 1 + \left[\left(\frac{\tau_1}{T_1} - 1\right)\frac{t}{T_1} - 1\right] e^{-\frac{t}{T_1}}.$$

Dacă  $\tau_1 > T_1 = T_2$ , atunci din ecuația  $\dot{h}(t)=0$  rezultă soluția

$$t_0 = \frac{x T_1}{x - 1}, \quad x = \frac{\tau_1}{T_1} > 1,$$

și suprareglajul  $\sigma = (x - 1) \cdot e^{\frac{-x}{x-1}}$  (fig. 5.17). Pentru  $x > 4$ , avem  $\sigma \approx 0,8 + \frac{x-4}{2,8}$ .

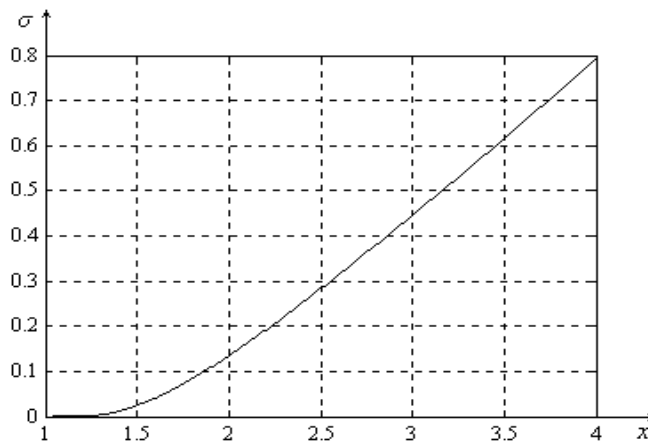


Fig. 5.17. Dependența suprareglajului  $\sigma$  în funcție de raportul  $x = \tau_1/T_1$ , pentru  $T_1 = T_2$ .

### 5.7. SISTEME CU TIMP MORT

Sistemul *continuu pur proporțional cu timp mort* are modelul

$$y(t) = Ku(t - \tau), \quad (94)$$

și funcția de transfer

$$G(s) = K e^{-\tau s}, \quad (95)$$

unde  $K$  este factorul de proporționalitate și  $\tau$  timpul mort ( $\tau > 0$ ). Pentru  $K = 1$ , obținem *sistemul pur timp mort*:

$$G_\tau(s) = e^{-\tau s}. \quad (96)$$

Similar, sistemul *continuu de întârziere de ordinul unu cu timp mort* are modelul

$$T_1 \dot{y}(t) + y(t) = Ku(t - \tau), \quad (97)$$

și funcția de transfer

$$G(s) = \frac{K e^{-\tau s}}{T_1 s + 1}. \quad (98)$$

Sistemele continue cu timp mort sunt sisteme *infinite dimensionale*, funcția de transfer a unui sistem cu timp mort putând fi doar aproximată printr-o funcție rațională de ordin finit. Ținând seama că

$$e^{\tau s} = 1 + \frac{\tau s}{1!} + \frac{\tau^2 s^2}{2!} + \dots,$$

funcția de transfer (96) a sistemului pur timp mort poate fi aproximată cu funcție rațională de tipul  $n+0$

$$G_\tau^{n+0}(s) = \frac{1}{1 + \frac{\tau s}{1!} + \frac{\tau^2 s^2}{2!} + \dots + \frac{\tau^n s^n}{n!}}, \quad (99)$$

având numitorul de gradul  $n$  și numărătorul de gradul 0. Funcția rațională de ordinul  $n$  care aproximează cel mai bine funcția de transfer  $G_\tau(s) = e^{-\tau s}$  este însă una simplu proprie, cu numărătorul și numitorul de gradul  $n$ :

$$G_\tau^{n+n}(s) = \frac{1 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_n s^n}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n}. \quad (100)$$

Coefficienții  $a_i$  și  $b_i$  pot fi determinați pe baza relației

$$\frac{1}{1 + \frac{\tau s}{1!} + \frac{\tau^2 s^2}{2!} + \dots} \approx \frac{1 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_n s^n}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n},$$

astfel încât dezvoltările în jurul originii ale funcțiilor

$$a(s) = 1 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n$$

și

$$b(s) = (1 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_n s^n) \left( 1 + \frac{\tau s}{1!} + \frac{\tau^2 s^2}{2!} + \frac{\tau^3 s^3}{3!} + \dots \right)$$

să coincidă până la ordinul maxim posibil, egal cu  $2n$ ; altfel spus, termenii cu puterile  $s^0, s^1, \dots, s^{2n}$  ai lui  $a(s)$  și  $b(s)$  să fie egali. Procedând astfel, obținem așa numita *aproximație Padé de ordinul  $n$* , cu:

$$a_i = \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-i+1)}{2(2n-1)(2n-2)\dots(2n-i+1)} \cdot \frac{\tau^i}{i!}, \quad b_i = (-1)^i a_i. \quad (101)$$

În particular, avem:

$$G_\tau^{1+1}(s) = \frac{1 - \frac{\tau s}{2}}{1 + \frac{\tau s}{2}}, \quad G_\tau^{2+2}(s) = \frac{1 - \frac{\tau s}{2} + \frac{\tau^2 s^2}{12}}{1 + \frac{\tau s}{2} + \frac{\tau^2 s^2}{12}}, \quad (102)$$

$$G_\tau^{3+3}(s) = \frac{1 - \frac{\tau s}{2} + \frac{\tau^2 s^2}{10} - \frac{\tau^3 s^3}{120}}{1 + \frac{\tau s}{2} + \frac{\tau^2 s^2}{10} + \frac{\tau^3 s^3}{120}}. \quad (103)$$

Precizia de aproximare a timpului mort este cu atât mai ridicată cu cât ordinul  $n$  este mai mare (fig. 5.18 și fig. 5.19). Răspunsul indicial al aproximației Padé de ordinul  $n$  are valoarea inițială

$$h(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} G_\tau^{n+n}(s) = \frac{b_n}{a_n} = (-1)^n. \quad (104)$$

În zona timpului mort (cuprinsă între 0 și  $\tau$ ), răspunsul indicial oscilează în jurul valorii zero, intersectând de  $n$  ori axa timpului. La sistemele dinamice, aceste oscilații sunt puternic atenuate, cu atât mai mult cu cât ordinul aproximației Padé și raportul între constanta de timp de întârziere dominantă și timpul mort au valori mai ridicate (fig. 5.20 și fig. 5.21). În majoritatea

aplicațiilor, ordinul  $n$  al aproximației Padé se alege în gama 4...10. O valoare prea mare a lui  $n$  crește dimensiunea sistemului, deci complexitatea calculului.

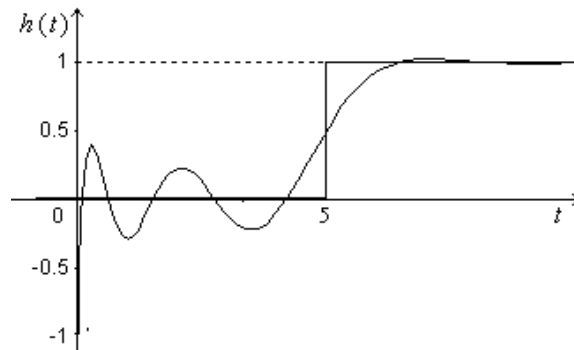


Fig. 5.18. Răspunsurile indiciale ale sistemului cu funcția de transfer  $G(s) = e^{-5s}$  și ale aproximației Padé de ordinul  $n=5$ .

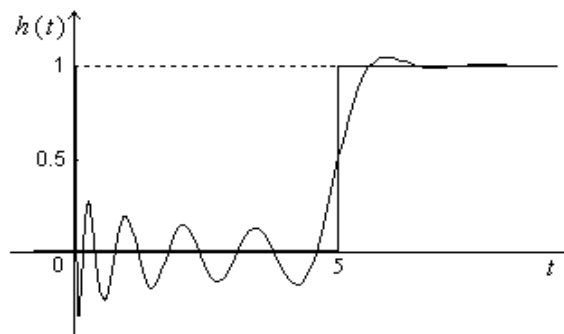


Fig. 5.19. Răspunsurile indiciale ale sistemului cu funcția de transfer  $G(s) = e^{-5s}$  și ale aproximației Padé de ordinul  $n=10$ .

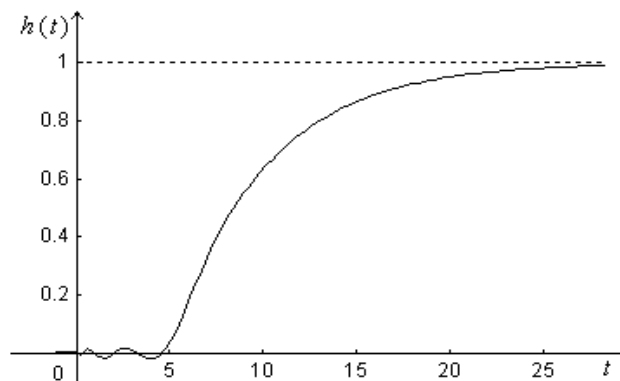


Fig. 5.20. Răspunsul indicial al aproximației Padé de ordinul  $n=5$  a sistemului cu funcția de transfer  $G(s) = \frac{e^{-5s}}{5s+1}$ .

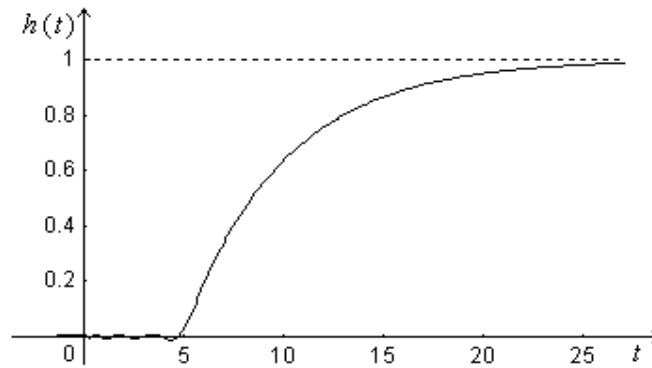


Fig. 5.21. Răspunsul indicial al aproximației Padé de ordinul  $n = 8$   
a sistemului cu funcția de transfer  $G(s) = \frac{e^{-5s}}{5s+1}$ .

■ In MATLAB, introducerea timpului mort  $T$  pentru un sistem  $sis$  deja definit se face astfel:

```
sis.iodelay=T;
```

Apelată sub forma

```
sis1 = pade(sis,n);
```

funcția *pade* returnează sistemul fără timp mort (cu funcția de transfer rațională)  $sis1$  care aproximează sistemul cu timp mort  $sis$ , prin înlocuirea exponențialei  $e^{-Ts}$  a sistemului  $sis$  cu raționala Padé de ordinul  $n$ .

Coefficienții numărătorului și numitorului raționalei Padé de ordinul  $n$  pot fi determinați cu funcția *pade*, apelată sub forma

```
[num, den] = pade(T,n);
```

## 5.8. REDUCEREA SISTEMELOR DE TIP I-E

Metodele de tip operațional pentru reducerea sistemelor sunt mai simple și mai ușor de aplicat decât cele din domeniul timpului.

### 5.8.1. Metoda Padé

*Metoda Padé* (cunoscută și ca *metoda momentului*) este utilizată la reducerea sistemelor stabile, cu și fără timp mort. In cadrul acestei metode, unele cazuri de reducere forțată pot conduce la erori de aproximare semnificative, inclusiv de neconservare a proprietăților de fază minimă sau de stabilitate.

La baza metodei de reducere Padé este idea ca dezvoltările în serie Mac-Laurin (în jurul originii) ale funcției de transfer  $G(s)$  și funcției de transfer reduse  $G_r(s)$  să coincidă până la un ordin  $j$  cât mai mare posibil, adică

$$G^{(i)}(0) = G_r^{(i)}(0), \quad i = \overline{0, j}. \quad (105)$$

Relațiile (105) sunt o consecință a formulei de dezvoltare a unei funcții în serie de puteri:

$$f(s) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} s + \frac{f''(0)}{2!} s^2 + \frac{f'''(0)}{3!} s^3 + \dots$$

Pe de altă parte, *momentul de ordinul  $k$*  al funcției pondere  $g(t)$  are expresia

$$M_k(g) = \int_0^\infty t^k g(t) dt. \quad (106)$$

Din formula transformatei Laplace a funcției pondere, anume

$$G(s) = \int_0^\infty g(t) e^{-st} dt,$$

prin derivarea succesivă a  $G(s)$ , obținem următoarea formulă a momentului de ordinul  $k$ :

$$M_k(g) = (-1)^k G^{(k)}(s) \Big|_{s=0}, \quad (107)$$

valabilă atunci când  $G(s)$  are numitorul hurwitzian. În conformitate cu relațiile (105) și (107), metoda de reducere Padé de ordinul  $j$  asigură egalitatea momentelor  $M_0, M_1, \dots, M_j$  ale funcției pondere a sistemului dat respective cu momentele corespunzătoare ale funcției pondere a sistemului redus.

Atunci când  $G(s)$  și  $G_r(s)$  sunt funcții raționale, adică

$$G(s) = \frac{r(s)}{p(s)}, \quad G_r(s) = \frac{r_1(s)}{p_1(s)},$$

unde  $r(s)$ ,  $p(s)$ ,  $r_1(s)$  și  $p_1(s)$  sunt polinoame, reducerea Padé poate fi realizată punând condiția ca ordinul de coincidență  $j$  al funcțiilor polinomiale

$$f_1(s) = r(s) \cdot p_1(s), \quad f_2(s) = p(s) \cdot r_1(s)$$

să fie maxim. În acest fel, funcția polinomială  $f(s) = f_1(s) - f_2(s)$  va conține numai puteri ale variabilei  $s$  mai mari decât  $s^j$ . Spre exemplificare, funcției de transfer

$$G(s) = \frac{1}{(T_1s+1)(T_2s+1)\cdots(T_ns+1)}, \quad (108)$$

cu ordinul  $n \geq 2$  și cu toate constantele de timp pozitive, i se pot asocia funcțiile de transfer reduse

$$G_{r1} = \frac{1}{S_1s+1}, \quad (109)$$

$$G_{r2}(s) = \frac{1}{S_2s^2 + S_1s + 1}, \quad (110)$$

$$G_{r3}(s) = \frac{1 - (S_2/S_1)s}{(S_1 - S_2/S_1)s + 1}, \quad (111)$$

$$G_{r4}(s) = \frac{1 - (S_3/S_2)s}{(S_2 - S_1S_3/S_2)s^2 + (S_1 - S_3/S_2)s + 1}, \quad (112)$$

unde

$$S_1 = \sum T_i, \quad S_2 = \sum T_i T_j, \quad S_3 = \sum T_i T_j T_k. \quad (113)$$

După cum se observă, funcțiile de transfer reduse  $G_{r3}$  și  $G_{r4}$  au câte un zerou pozitiv, deci nu sunt de fază minimă. În consecință, este preferabil să utilizăm formele reduse  $G_{r1}$  și  $G_{r2}$ .

Tot prin metoda Padé, funcției de transfer

$$G(s) = \frac{\tau_1s+1}{(T_1s+1)(T_2s+1)\cdots(T_ns+1)}, \quad \sum T_i > \tau_1 \geq 0, \quad (114)$$

i se pot asocia funcțiile de transfer reduse

$$G_{r1} = \frac{1}{(S_1 - \tau_1)s + 1}, \quad (115)$$

$$G_{r2}(s) = \frac{1}{(S_2 - \tau_1 S_1 + \tau_1^2)s^2 + (S_1 - \tau_1)s + 1}. \quad (116)$$

La sistemele cu timp mort cu funcțiile de transfer

$$G(s) = \frac{r(s)e^{-\tau s}}{p(s)}, \quad G_r(s) = \frac{r_1(s)e^{-\tau_1 s}}{p_1(s)},$$

reducerea se realizează astfel încât funcțiile

$$f_1(s) = \left[ 1 + \frac{(\tau_1 - \tau)s}{1!} + \frac{(\tau_1 - \tau)^2 s^2}{2!} + \dots \right] \cdot r(s) \cdot p_1(s), \quad f_2(s) = p(s) \cdot r_1(s),$$

să aibă ordinul de coincidență maxim.

**Observații. 1<sup>0</sup>.** De regulă, formele de transfer reduse sunt acceptabile atunci când conservă proprietățile de stabilitate și fază minimă (fără zerouri cu partea reală pozitivă) ale sistemului inițial.

**2<sup>0</sup>** Aproximarea

$$(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \approx (T_1 + T_2)s + 1,$$

care presupune neglijarea termenului în  $s^2$ , este mai bună atunci când una dintre cele două constante de timp este neglijabilă față de cealaltă.

**3<sup>0</sup>.** De regulă, metoda Padé de reducere a sistemelor fără timp mort are un grad de precizie mai ridicat atunci când:

(a) excesul poli-zerouri al funcției de transfer reduse este egal cu cel al funcției de transfer inițiale;

(b) sistemul inițial are cel puțin o constantă de timp de întârziere cu valoarea neglijabilă față de cea a constantei de timp principale.

### 5.8.2. Metoda eliminării părții rapide

Metoda de reducere constă în eliminarea modurilor rapide de tip paralel sau serial. Pentru a descrie aceste metode, vom considera sistemul  $\Sigma$  monovariabil și cu toți polii distincți astfel încât:

$$0 > \text{Rep}_1 \geq \text{Rep}_2 \geq \dots \geq \text{Rep}_n. \quad (117)$$

Mai întâi se aduce funcția de transfer la forma

$$G(s) = \frac{r(s)}{(s-p_1) \cdots (s-p_j)(s-p_{j+1}) \cdots (s-p_n)}, \quad (118)$$

unde  $r(s)$  este un polinom de gradul  $m \leq j$  și  $\text{Rep}_{j+1} \ll \text{Rep}_j$ . Sistemul redus are funcția de transfer

$$G_{r1}(s) = \frac{r(s)}{(s-p_1)(s-p_2) \cdots (s-p_j)} \cdot \frac{1}{(-p_{j+1})(-p_{j+2}) \cdots (-p_n)}, \quad (119)$$

care satisface  $G_{r1}(0) = G(0)$ , deci are același factor static de proporționalitate ca sistemul inițial.



Considerând sistemul inițial ca fiind o *conexiune serie* formată din subsistemul cu funcția de transfer  $G_{r1}(s)$  și subsistemul *filtru rapid* cu funcția de transfer

$$G_{f1}(s) = \frac{(-p_{j+1})(-p_{j+2})\cdots(-p_n)}{(s-p_{j+1})(s-p_{j+2})\cdots(s-p_n)}, \quad (120)$$

care satisface proprietatea  $G_{f1}(0)=1$ , reducerea sistemului echivalează cu eliminarea filtrului  $G_{f1}(s)$ . Metoda de reducere a sistemului prin *eliminarea modurilor rapide de tip serial* asigură conservarea proprietății de fază minimă.

La metoda de reducere a sistemului prin *eliminarea modurilor rapide de tip paralel*, funcția de transfer se scrie sub forma

$$G(s) = d + \frac{a_1}{s-p_1} + \cdots + \frac{a_j}{s-p_j} + \frac{a_{j+1}}{s-p_{j+1}} + \cdots + \frac{a_n}{s-p_n}. \quad (121)$$

Dacă  $Rep_{j+1} \ll Rep_j$ , reducerea sistemului cu funcția de transfer  $G(s)$  se face prin eliminarea ultimelor  $n-j$  moduri rapide, astfel încât cele două sisteme să aibă același factor static de proporționalitate, adică  $G(0) = G_r(0)$ :

$$G_r(s) = d + \frac{a_1}{s-p_1} + \cdots + \frac{a_p}{s-p_j} - \left( \frac{a_{p+1}}{p_{j+1}} + \cdots + \frac{a_n}{p_n} \right). \quad (122)$$

Prin neglijarea dinamicii modurilor rapide de tip paralel este posibil ca un sistem de fază minimă cu funcția de transfer  $G(s)$  să se transforme într-un sistem redus care să nu mai fie de fază minimă, adică  $G_r(s)$  să aibă zerouri cu partea reală pozitivă.

## 5.9. REALIZAREA SISTEMELOR CONTINUE

Se numește **realizare** a unui sistem liniar continuu cu funcția de transfer rațională proprie  $G(s)$  orice sistem monovariabil  $\Sigma(A,B,C,D)$  care are funcția de transfer egală cu  $G(s)$ , adică verifică relația

$$C(sI - A)^{-1}B + D = G(s). \quad (123)$$

Deoarece două sisteme echivalente I-S-E au aceeași funcție de transfer, rezultă că toate sistemele *echivalente* cu  $\Sigma(A,B,C,D)$  sunt, de asemenea, realizări ale lui  $G(s)$ . Unei funcții raționale strict proprii  $G(s)$  îi corespunde o realizare cu  $D = 0$ , care va fi notată  $\Sigma(A,B,C)$ .

Sistemele  $\Sigma(A, B, C)$  și  $\Sigma(A^T, C^T, B^T)$  se numesc *sisteme duale*. Două sisteme duale sunt echivalente I-E, deci sunt realizări ale aceleiași funcții de transfer. Într-adevăr, dacă  $C(sI - A)^{-1}B = G(s)$ , atunci

$$B^T(sI - A^T)^{-1}C^T = [C(sI - A)^{-1}B]^T = G(s)^T = G(s).$$

**Realizarea standard controlabilă.** Funcției raționale

$$G(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} \quad (124)$$

îi corespunde *realizarea standard controlabilă* (RSC)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_{n-1}]. \quad (125)$$

Cu notațiile  $Z(s) = [1 \ s \ \dots \ s^{n-1}]^T$  și

$$p(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0,$$

funcția  $G(s)$  poate fi scrisă sub forma  $G(s) = \frac{C \cdot Z(s)}{p(s)}$ . Pentru a demonstra că

$\Sigma(A, B, C)$  este o realizare a funcției  $G(s)$ , adică  $C(sI - A)^{-1}B = G(s)$ , este suficient să arătăm că  $(sI - A)^{-1}B = \frac{Z(s)}{p(s)}$ , adică

$$p(s)B = (sI - A)Z(s).$$

Într-adevăr, avem

$$(sI - A)Z(s) = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & s + a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{n-2} \\ s^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ p(s) \end{bmatrix} = p(s)B.$$

**Realizarea standard observabilă.** Funcției raționale (124) îi corespunde *realizarea standard observabilă* (RSO)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix}, \quad C = [0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1]. \quad (126)$$

In mod evident, realizarea standard observabilă (126) și realizarea standard controlabilă (125) sunt realizări duale.

**Realizarea modală.** Funcției raționale cu poli simpli (reali sau complexi)

$$G(s) = \frac{c_1}{s-s_1} + \frac{c_2}{s-s_2} + \cdots + \frac{c_n}{s-s_n}, \quad (127)$$

îi corespunde *realizarea modală* (RM)

$$A = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & & 0 \\ 0 & s_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & s_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_n]. \quad (128)$$

Realizarea modală poate fi obținută scriind relația intrare-ieșire sub forma

$$Y(s) = \frac{c_1 U(s)}{s-s_1} + \frac{c_2 U(s)}{s-s_2} + \cdots + \frac{c_n U(s)}{s-s_n}$$

și introducând stările

$$X_i(s) = \frac{U(s)}{s-s_i}, \quad i=1,2,\dots,n.$$

Rezultă

$$sX_i(s) = s_i X_i(s) + U(s), \quad i=1,2,\dots,n$$

$$Y(s) = c_1 X_1(s) + c_2 X_2(s) + \cdots + c_n X_n(s),$$

iar prin aplicarea transformării inverse Laplace, obținem

$$\dot{x}_i = s_i x_i + u, \quad i=1,2,\dots,n$$

$$y = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n,$$

adică

$$\dot{X} = AX + Bu, \quad y = CX,$$

cu  $A$ ,  $B$ ,  $C$  de forma (128).

Dacă polii  $s_1, s_2$  și coeficienții  $c_1, c_2$  sunt *numere complex conjugate*, adică

$$s_{1,2} = a \pm jb, \quad c_{1,2} = c \pm jd,$$

atunci blocurile asociate celor doi poli în matricele  $A, B, C$  cu forma (128) pot fi înlocuite astfel:

$$A: \begin{bmatrix} a+jb & 0 \\ 0 & a-jb \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, \quad B: \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C: [c+jd \quad c-jd] \leftarrow [c \quad d].$$

Alegând stările

$$X_i(s) = \frac{c_i U(s)}{s - s_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

obținem *forma modală duală*

$$A = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & & 0 \\ 0 & s_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & s_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 1 \ \dots \ 1]. \quad (129)$$

**Realizarea serială.** Funcției raționale

$$G(s) = \frac{b_0}{(s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_n)} \quad (130)$$

îi corespunde *realizarea serială* (RS)

$$A = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & s_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & s_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ b_0]. \quad (131)$$

Realizarea se obține pe baza următoarelor relații de definiție a variabilelor de stare

$$X_1(s) = \frac{U(s)}{s-s_1}, \quad X_2(s) = \frac{X_1(s)}{s-s_2}, \quad \dots, \quad X_n(s) = \frac{X_{n-1}(s)}{s-s_n}. \quad (132)$$

Prin înmulțirea relațiilor (132), rezultă

$$X_n(s) = \frac{U(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)} = \frac{G(s)U(s)}{b_0},$$

deci

$$Y(s) = G(s)U(s) = b_0 X_n(s).$$

Realizarea serială (132) își menține forma și în cazul polilor multipli. Dacă polii  $s_1$  și  $s_2$  sunt *complex-conjugați*, adică

$$s_{1,2} = a \pm jb,$$

atunci celulele corespunzătoare din matricele  $A$  și  $B$  pot fi înlocuite astfel:

$$\begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 1 & s_2 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} 2a & -a^2-b^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \frac{1}{a^2+b^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (133)$$

**Observații 1<sup>0</sup>.** Dacă  $G(s)$  este o funcție de transfer de ordinul  $n$  ireductibilă, atunci orice realizare de ordinul  $n$  este o *realizare minimală* (nu există o altă realizare de ordin mai mic). Toate realizările minimale ale funcției  $G(s)$  sunt *echivalente I-S-E*, iar toate realizările funcției  $G(s)$  sunt *echivalente I-E* (deoarece au aceeași funcție de transfer, deci același răspuns forțat la o intrare comună de tip original). Sistemul monovariabil de tip I-S-E cu ecuațiile

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + Bu \\ y = CX \end{cases},$$

este minimal dacă și numai dacă funcția de transfer  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$  este ireductibilă.

**2<sup>0</sup>.** În cazul unui *sistem multivariabil strict propriu* cu  $m$  intrări și  $p$  ieșiri, matricea de transfer poate fi scrisă sub forma (36). Matricei de transfer  $G(s)$  i se poate asocia *realizarea standard controlabilă* cu dimensiunea  $mn$

$$A = \begin{bmatrix} 0_m & I_m & 0_m & \cdots & 0_m \\ 0_m & 0_m & I_m & \cdots & 0_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_m & 0_m & 0_m & \cdots & I_m \\ -a_0 I_m & -a_1 I_m & -a_2 I_m & \cdots & -a_{n-1} I_m \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0_m \\ 0_m \\ \vdots \\ 0_m \\ I_m \end{bmatrix}, \quad C = [K_0 \ K_1 \ \cdots \ K_{n-1}],$$

cu  $A, B, C$  respectiv de tipul  $mn \times mn, mn \times m, p \times mn$ .

De asemenea, matricei de transfer  $G(s)$  i se poate asocia *realizarea standard observabilă* cu dimensiunea  $pn$

$$A = \begin{bmatrix} 0_p & 0_p & \cdots & 0_p & -a_0 I_p \\ I_p & 0_p & \cdots & 0_p & -a_1 I_p \\ 0_p & I_p & \cdots & 0_p & -a_2 I_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_p & 0_p & \cdots & I_p & -a_{n-1} I_p \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} K_0 \\ K_1 \\ K_2 \\ \vdots \\ K_{n-1} \end{bmatrix}, \quad C = [0_p \ 0_p \ \cdots \ 0_p \ I_p],$$

cu  $A, B, C$  respectiv de tipul  $pn \times pn, pn \times m, p \times pn$ .

Ca și la sistemele monovariabile, toate realizările matricei de transfer  $G(s)$  sunt echivalente I-E, iar realizările minimale sunt echivalente I-S-E.

**Observația 3<sup>0</sup>.** In cazul unui sistem multivariabil (MIMO) de tip I-S-E, matricea

$$C_n = [B \ AB \ \cdots \ A^{n-1}B] \quad (134)$$

este *matricea de controlabilitate* (de tipul  $n \times mn$ ), iar matricea

$$Q_n = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (135)$$

este *matricea de observabilitate* (de tipul  $pn \times n$ ). In conformitate cu **teorema de minimalitate a sistemelor de tip I-S-E**, un sistem  $\Sigma(A, B, C, D)$  de ordinul  $n$  este minimal dacă și numai dacă matricele de controlabilitate și de observabilitate au rangul  $n$ .

Pentru aducerea la *forma minimală* a unui sistem neminimal  $\Sigma(A, B, C, D)$ , se poate proceda astfel:

- se verifică faptul că cel puțin una dintre matricele  $C_n$  și  $Q_n$  are rangul mai mic decât  $n$ ;
- se calculează funcția (matricea) de transfer și se aduce la forma ireductibilă;
- se determină o realizare minimală.

■ In MATLAB, matricele de controlabilitate și de observabilitate se obțin cu funcțiile *ctrb* și *obsv* astfel:

$$Cn=ctrb(A,B); \quad Qn=obsv(A,C);$$

Rangul  $r$  al matricei de controlabilitate (egal cu ordinul maxim al minorilor matricei) se poate afla cu funcția  $rank(Cn)$ . Partea controlabilă  $\Sigma_c(A_c, B_c, C_c)$  a sistemului  $\Sigma(A, B, C)$  se obține cu funcția *ctrbf* aplicată astfel:

$$[A1, B1, C1]=ctrbf(A, B, C);$$

Sistemul  $\Sigma_1(A1, B1, C1)$ , echivalent I-S-E cu sistemul  $\Sigma(A, B, C)$ , are parametrii matriceali sub forma

$$A1 = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_c \end{bmatrix}, \quad B1 = \begin{bmatrix} 0 \\ B_c \end{bmatrix}, \quad C1 = [C_1 \quad C_c].$$

Matricele  $A_c$ ,  $B_c$  și  $C_c$  se pot obține respectiv din matricele  $A1$ ,  $B1$ ,  $C1$ , astfel:

$$A_c = A1(n-r+1:n, n-r+1:n);$$

$$B_c = B1(n-r+1:n, :);$$

$$C_c = C1(:, n-r+1:n);$$

Pentru aducerea unui sistem *sis* la forma minimală *sism* se utilizează funcția *minreal*:

$$sism = \mathbf{minreal}(sis).$$

## 5.10. SISTEME CONTINUE MONOTONICE

Conform *teoremei fundamentale a sistemelor monotone* (paragraful 3.5), un sistem liniar, invariant și monovariabil este C-monotonic dacă și numai dacă are funcția pondere  $g(t) \geq 0$  pentru  $t \geq 0$ , sau, echivalent, dacă și numai dacă are funcția indicială  $h(t)$  crescătoare.

In continuare, ne vom referi numai la *sistemele continue liniare*. In mod evident, dacă un sistem cu funcția de transfer  $G(s)$  este C-monotonic, atunci sistemul cu funcția de transfer  $-G(s)$  este D-monotonic.

***Teorema 1 de conservare a monotonității.*** *Un sistem liniar continuu monotonic își conservă proprietatea de monotonicitate prin:*

- a) micșorarea unei constante de timp de avans pozitive<sup>2</sup>;
- b) mărirea unei constante de timp de întârziere pozitive<sup>3</sup>.

<sup>2</sup> Micșorarea unei constante de timp de avans  $T_1$  constă în înlocuirea factorului  $T_1s+1$  de la numărătorul funcției de transfer cu  $T_2s+1$ , unde  $0 \leq T_2 < T_1$ .

<sup>3</sup> Mărirea unei constante de timp de întârziere  $T_2$  constă în înlocuirea factorului  $T_2s+1$  de la numitorul funcției de transfer cu  $T_1s+1$ , unde  $T_1 > T_2 \geq 0$ .

Pentru demonstrarea teoremei, considerăm un sistem  $\Sigma$  de tip C-monotonic, cu funcția de transfer  $G(s)$  și constanta de timp de avans  $T_1$ ,  $T_1 > 0$ . Prin înlocuirea constantei de timp  $T_1$  cu  $T_2$  ( $0 \leq T_2 < T_1$ ), obținem sistemul  $\bar{\Sigma}$  cu funcția de transfer

$$\bar{G}(s) = \frac{T_2 s + 1}{T_1 s + 1} G(s), \quad 0 \leq T_2 < T_1. \quad (136)$$

Similar, presupunând că  $G(s)$  are constanta de timp de întârziere  $T_2$  ( $T_2 \geq 0$ ), prin înlocuirea ei cu  $T_1$  ( $T_1 > T_2$ ), obținem sistemul  $\bar{\Sigma}$  cu funcția de transfer (136). Astfel, demonstrarea Teoremei 1 de conservare a monotonității se reduce la a arăta că sistemul  $\bar{\Sigma}$  cu funcția de transfer  $\bar{G}(s)$  este monotonic. Acest lucru este adevărat deoarece sistemul  $\bar{\Sigma}$  este o conexiune serie de două subsisteme C-monotonice: subsistemul de avans-întârziere de ordinul unu cu funcția de transfer

$$G_0(s) = \frac{T_2 s + 1}{T_1 s + 1}$$

și subsistemul  $\Sigma$  cu funcția de transfer  $G(s)$ .

**Teorema 2 de conservare a monotonității.** *Un sistem liniar continuu monotonic își conservă proprietatea de monotonicitate prin:*

- a) *contractarea inversă*<sup>4</sup> a două constante de timp de avans pozitive;
- b) *dispersarea inversă*<sup>5</sup> a două constante de timp de întârziere pozitive.

Pentru demonstrarea teoremei, considerăm un sistem  $\Sigma$  de tip C-monotonic, cu funcția de transfer  $G(s)$ . Presupunem că  $G(s)$  are constantele de timp de avans  $\tau_1$  și  $\tau_2$  ( $\tau_1 > \tau_2 > 0$ ). Prin contractarea inversă a celor două constante de timp de avans  $\tau_1$  și  $\tau_2$ , obținem sistemul  $\bar{\Sigma}$  cu funcția de transfer

$$\bar{G}(s) = \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} G(s), \quad (137)$$

unde

<sup>4</sup> Prin *contractarea inversă* a două numere pozitive  $a$  și  $b$  ( $a > b$ ) se înțelege înlocuirea acestora cu numerele pozitive  $c$  și  $d$  astfel încât  $a > c \geq d > b$  și  $a^{-1} + b^{-1} = c^{-1} + d^{-1}$ .

<sup>5</sup> Prin *dispersarea inversă* a două numere pozitive  $c$  și  $d$  ( $c \geq d$ ) se înțelege înlocuirea acestora cu numerele pozitive  $a$  și  $b$  astfel încât  $a > c \geq d > b$  și  $a^{-1} + b^{-1} = c^{-1} + d^{-1}$ .



$$\tau_1 > T_1 \geq T_2 > \tau_2 > 0, \quad T_1^{-1} + T_2^{-1} = \tau_1^{-1} + \tau_2^{-1}.$$

De asemenea, presupunând că  $G(s)$  are constantele de timp de întârziere  $T_1$  și  $T_2$  ( $T_1 \geq T_2 > 0$ ), prin dispersarea inversă a acestora obținem sistemul  $\bar{\Sigma}$  cu funcția de transfer (137). Astfel, demonstrarea Teoremei 2 de conservare a monotonicității se reduce la a arăta că sistemul  $\bar{\Sigma}$  cu funcția de transfer  $\bar{G}(s)$  este monoton. Acest lucru este adevărat deoarece sistemul  $\bar{\Sigma}$  este o conexiune serie de două subsisteme C-monotonice: subsistemul de avans-întârziere de ordinul doi cu funcția de transfer

$$G_0(s) = \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \quad (138)$$

și subsistemul  $\Sigma$  cu funcția de transfer  $G(s)$ . Primul subsistem este C-monoton deoarece

$$T_1^{-1} T_2^{-1} G_0(s) = \tau_1^{-1} \tau_2^{-1} + \frac{T_1^{-1} T_2^{-1} - \tau_1^{-1} \tau_2^{-1}}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

și

$$T_1^{-1} T_2^{-1} - \tau_1^{-1} \tau_2^{-1} = T_1^{-1} T_2^{-1} - \tau_1^{-1} (T_1^{-1} + T_2^{-1} - \tau_1^{-1}) = (T_1^{-1} - \tau_1^{-1})(T_2^{-1} - \tau_1^{-1}) > 0.$$

**Observații 1<sup>0</sup>.** Sistemul cu funcția de transfer

$$G(s) = \frac{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \cdots (\tau_n s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots (T_n s + 1)}, \quad (139)$$

este C-monoton dacă

$$T_i \geq \tau_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Această proprietate este adevărată deoarece sistemul poate fi reprezentat ca o conexiune serie de  $n$  subsisteme C-monotonice cu funcțiile de transfer

$$G_i(s) = \frac{\tau_i s + 1}{T_i s + 1}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

**2<sup>0</sup>.** Sistemul cu funcția de transfer (139) și toate constantele de timp pozitive este un sistem *nemonoton* în cazul în care *cea mai mare constantă de timp este una de avans*. Pentru a demonstra această proprietate în cazul constantelor de timp distincte, să considerăm

$$\tau_1 > T_1 > T_2 > \dots > T_n > 0$$

și să presupunem, prin reducere la absurd, că sistemul este monoton. În conformitate cu Teorema 1 de conservare a monotonității, sistemul cu funcția de transfer

$$G_1(s) = \frac{\tau_1 s + 1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots (T_n s + 1)}$$

este, de asemenea, C-monoton. Din descompunerea în fracții simple

$$G_1(s) = \frac{T_1 C_1}{T_1 s + 1} + \frac{T_2 C_2}{T_2 s + 1} + \dots + \frac{T_n C_n}{T_n s + 1},$$

rezultă că funcția pondere are expresia

$$g_1(t) = C_1 e^{-t/T_1} + C_2 e^{-t/T_2} + \dots + C_n e^{-t/T_n},$$

care satisface proprietatea

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{t/T_1} g_1(t) = C_1 = \frac{\frac{1}{T_1} (1 - \frac{\tau_1}{T_1})}{(1 - \frac{T_2}{T_1}) \dots (1 - \frac{T_n}{T_1})} < 0.$$

Deoarece funcția pondere nu satisface proprietatea  $g_1(t) \geq 0$  pentru orice  $t \geq 0$ , sistemul cu funcția de transfer  $G_1(s)$  nu este C-monoton, ceea ce reprezintă o contradicție.

**3<sup>0</sup>.** Pe baza Teoremei 2 de conservare a monotonității, putem demonstra prin metoda inducției următoarea propoziție:

**Propoziția 1.** *Dacă*

$$\tau_1 \geq \tau_2 \geq \dots \geq \tau_r > 0, \quad T_1 \geq T_2 \geq \dots \geq T_n > 0$$

și

$$\tau_1^{-1} \geq T_1^{-1},$$

$$\tau_1^{-1} + \tau_2^{-1} \geq T_1^{-1} + T_2^{-1},$$

.....

$$\tau_1^{-1} + \tau_2^{-1} + \dots + \tau_r^{-1} \geq T_1^{-1} + T_2^{-1} + \dots + T_r^{-1},$$

atunci sistemul cu funcția de transfer

$$G(s) = \frac{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \cdots (\tau_r s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots (T_n s + 1)}, \quad r \leq n, \quad (140)$$

este *C-monotonic*.

Propoziția 1 poate fi reformulată după cum urmează:

**Propoziția 1'.** Dacă  $a_1, a_2, \dots, a_n$  și  $b_1, b_2, \dots, b_r$  ( $r \leq n$ ) sunt numere reale astfel încât

$$0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n, \quad 0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_r,$$

și

$$\sum_{i=1}^k a_i \leq \sum_{i=1}^k b_i, \quad k=1, 2, \dots, r,$$

atunci sistemul cu funcția de transfer

$$G(s) = \frac{(s+b_1)(s+b_2) \cdots (s+b_r)}{(s+a_1)(s+a_2) \cdots (s+a_n)}, \quad r \leq n, \quad (141)$$

este *C-monotonic*.

## 5.11. APLICAȚII REZOLVATE

♦ **Aplicația 5.1.** Să se calculeze funcția de transfer, răspunsul indicial și răspunsul pondere ale sistemului cu modelul

$$8\ddot{y} + 6\dot{y} + y = 8\dot{u} + 2u.$$

Este sistemul minimal?

**Soluție.** Sistemul are funcția de transfer

$$G(s) = \frac{2(4s+1)}{8s^2 + 6s + 1} = \frac{2(4s+1)}{(2s+1)(4s+1)} = \frac{2}{2s+1},$$

deci nu este minimal. Sistemul minimal are ecuația diferențială

$$2\dot{y} + y = 2u.$$

Scriem transformata Laplace a răspunsului indicial sub forma

$$H(s) = \frac{1}{s} G(s) = \frac{2}{s(2s+1)} = 2 \left( \frac{1}{s} - \frac{2}{2s+1} \right) = 2 \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1/2} \right).$$

Prin urmare, sistemul are răspunsul indicial

$$h(t) = 2(1 - e^{-t/2}), \quad t \geq 0$$

și răspunsul pondere

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = e^{-t/2}, \quad t \geq 0.$$

♦ **Aplicația 5.2.** Să se calculeze funcția de transfer, răspunsul indicial și răspunsul pondere ale sistemului cu modelul

$$8\ddot{y} + 6\dot{y} + y = \dot{u} + u.$$

**Soluție.** Sistemul are funcția de transfer

$$G(s) = \frac{s+1}{8s^2 + 6s + 1} = \frac{s+1}{(2s+1)(4s+1)},$$

transformata Laplace a funcției indiciale

$$H(s) = \frac{1}{s}G(s) = \frac{s+1}{s(2s+1)(4s+1)} = \frac{1}{s} + \frac{1}{2s+1} - \frac{6}{4s+1} = \frac{1}{s} + \frac{1/2}{s+1/2} - \frac{3/2}{s+1/4},$$

funcția indicială

$$h(t) = 1 + \frac{1}{2}e^{-t/2} - \frac{3}{2}e^{-t/4}, \quad t \geq 0$$

și funcția pondere

$$g(t) = h'(t) = -\frac{1}{4}e^{-t/2} + \frac{3}{8}e^{-t/4}, \quad t \geq 0.$$

Funcția pondere poate fi calculată și astfel:

$$G(s) = \frac{1}{2} \left( \frac{-1}{2s+1} + \frac{3}{4s+1} \right) = \frac{-1}{4(s+1/2)} + \frac{3}{8(s+1/4)},$$

deci

$$g(t) = -\frac{1}{4}e^{-t/2} + \frac{3}{8}e^{-t/4}, \quad t \geq 0.$$

♦ **Aplicația 5.3.** Să se calculeze funcția de transfer, răspunsul indicial și răspunsul pondere ale sistemului cu modelul

$$5\ddot{y} + 4\dot{y} + y = \dot{u} + u.$$

Este sistemul minimal?

**Soluție.** Sistemul are funcția de transfer ireductibilă

$$G(s) = \frac{s+1}{5s^2 + 4s + 1},$$

deci este minimal. Sistemul are transformata Laplace a răspunsului indicial

$$H(s) = \frac{1}{s} G(s) = \frac{s+1}{s(5s^2+4s+1)} = \frac{1}{s} \frac{5s+3}{5s^2+4s+1} = \frac{1}{s} \frac{s+3/5}{(s+2/5)^2+(1/5)^2}$$

$$= \frac{1}{s} \frac{(s+2/5)+1/5}{(s+2/5)^2+(1/5)^2},$$

funcția indicială

$$h(t) = 1 - e^{-2t/5} (\cos t/5 + \sin t/5), \quad t \geq 0,$$

transformata Laplace a funcției pondere

$$G(s) = \frac{1}{5} \frac{s+1}{s^2+4/5s+1/5} = \frac{1}{5} \frac{s+1}{(s+2/5)^2+(1/5)^2}$$

$$= \frac{1}{5} \frac{(s+2/5)+3 \cdot (1/5)}{(s+2/5)^2+(1/5)^2}$$

și funcția pondere

$$g(t) = \frac{1}{5} e^{-2t/5} (\cos t/5 + 3 \sin t/5), \quad t \geq 0.$$

♦ **Aplicația 5.4.** Să se arate că sistemul monovariabil cu ecuația diferențială

$$y''' + 3y'' + 3y' + 2y = 3u''' + 4u'' + 4u' + u$$

nu este minimal. Să se afle apoi răspunsul indicial.

**Soluție.** Sistemul are funcția de transfer

$$G(s) = \frac{3s^3 + 4s^2 + 4s + 1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 2}.$$

Deoarece

$$s^3 + 3s^2 + 3s + 2 = (s+2)(s^2 + s + 1)$$

și

$$3s^3 + 4s^2 + 4s + 1 = (3s+1)(s^2 + s + 1),$$

rezultă

$$G(s) = \frac{3s+1}{s+2}.$$

Sistemul inițial nu este minimal deoarece forma primară a funcției de transfer (cu numărătorul și numitorul de gradul trei) este reductibilă. Sistemul minimal este de ordinul unu și are ecuația diferențială

$$y' + 2y = 3u' + u.$$

Răspunsul indicial are transformata Laplace

$$H(s) = \frac{1}{s}G(s) = \frac{3s+1}{s(s+2)} = \frac{1}{2s} + \frac{5}{2(s+2)},$$

deci are expresia

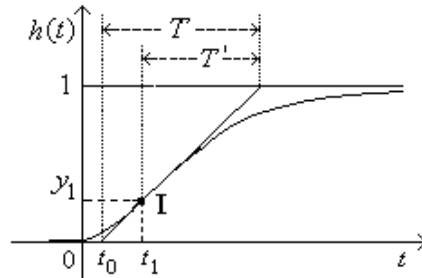
$$h(t) = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}e^{-2t}, \quad t \geq 0.$$

◆ **Aplicația 5.5.** Răspunsul indicial  $h(t)$  al sistemului continuu cu funcția de transfer

$$G(s) = \frac{1}{(T_1s+1)(T_2s+1)}, \quad T_1 > T_2 > 0,$$

are punctul de inflexiune I. Să se arate că între constantele de timp  $T_1$  și  $T_2$  ale sistemului și timpii  $t_0$ ,  $t_1$  și  $T'$  ai răspunsului indicial din figura alăturată (definiți prin intermediul tangentei la grafic în punctul de inflexiune I) există următoarea relație de ordonare:

$$0 < t_0 < T_2 < t_1 < T' - t_1 < T_1 < T' - t_0.$$



**Soluție.** Fie  $k = T_2/T_1 < 1$  și

$$z = k^{\frac{k}{1-k}} \in (e^{-1}, 1).$$

Din formula (83) a răspunsului indicial,

$$h(t) = 1 - \frac{1}{1-k}e^{-t/T_1} + \frac{k}{1-k}e^{-t/T_2},$$

obținem următoarele relații care exprimă parametrii asociați *punctului de inflexiune I* în raport cu constantele de timp  $T_1$  și  $T_2$ :

$$\frac{t_1}{T_1} = -\ln z, \quad \frac{T'}{T_1} = 1+k, \quad \frac{T}{T_1} = \frac{1}{z}, \quad \frac{t_0}{T_1} = 1+k - \frac{1}{z} - \ln z, \quad y_1 = 1 - (1+k)z.$$

Ținând seama că

$$T' = (1+k)T_1 = T_1 + T_2,$$

inegalitățile  $T' - t_1 < T_1$  și  $T_1 < T' - t_0$  se reduc la  $T_2 < t_1$ , respectiv  $t_0 < T_2$ . Rămâne astfel de arătat că

$$t_0 < T_2 < t_1 < T' - t_1.$$

In acest scop, observăm că funcția

$$f(x) = e^x - 1 - x,$$

cu derivata  $f'(x) = e^x - 1$ , este strict descrescătoare pe  $(-\infty, 0]$  și strict crescătoare pe  $[0, \infty)$ .

Inegalitatea  $t_0 < T_2$  este echivalentă cu  $\frac{1}{z} > 1 + \ln \frac{1}{z}$ , deci cu  $f(x) > 0$ , unde  
 $x = -\ln z$ ,  $0 < x < 1$ .

Deoarece funcția  $f$  este strict crescătoare pe  $[0, \infty)$ , rezultă  $f(x) > f(0) = 0$ .

Inegalitatea  $T_2 < t_1$  este echivalentă cu  $k > 1 + \ln k$ , deci cu  $f(x) > 0$ , unde  
 $x = \ln k$ ,  $x < 0$ .

Deoarece funcția  $f$  este strict descrescătoare pe  $(-\infty, 0]$ , rezultă  $f(x) > f(0) = 0$ .

Inegalitatea  $t_1 < T' - t_1$ , adică  $T' > 2t_1$ , este echivalentă cu  $\frac{1}{k} - k + 2 \ln k > 0$ ,  $k \in (0, 1)$ .

Deoarece funcția  $f_1(k) = \frac{1}{k} - k + 2 \ln k$  are derivata  $f_1'(k) = -(\frac{1}{k} - 1)^2 < 0$ ,  $f_1$  este strict descrescătoare pe  $(0, 1]$ , deci  $f_1(k) > f_1(1) = 0$ .

*Observație.* În cazul particular  $T_1 = T_2$ , deci  $k = 1$  și  $z = e^{-1}$ , relația de ordonare devine astfel:

$$t_0 < T_2 = t_1 = T' - t_1 = T_1 < T' - t_0.$$

♦ **Aplicația 5.6.** Fie sistemul monovariabil  $\Sigma(A, B, C, D)$  cu

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 2], \quad D = 0.$$

Să se afle:

- transformata Laplace a matricei fundamentale și funcția de transfer a sistemului;
- funcția pondere și funcția indicială.

**Soluție.** a) Avem

$$\det(sI - A) = s^2 + 5s + 4,$$

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 + 5s + 4} \begin{bmatrix} s + 3 & 1 \\ 2 & s + 2 \end{bmatrix},$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{9}{s^2 + 5s + 4}.$$

Deoarece funcția de transfer  $G(s)$  este ireductibilă, sistemul  $\Sigma(A, B, C, D)$  este minimal.

b) Prin descompunerea în fracții simple a funcției de transfer,

$$G(s) = \frac{3}{s+1} - \frac{3}{s+4},$$

obținem funcția pondere

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = 3(e^{-t} - e^{-4t})$$

și funcția indicială

$$h(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau = \frac{3}{4}(3 - 4e^{-t} + e^{-4t}).$$

Funcția indicială poate fi calculată direct astfel:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{9}{s^2 + 5s + 4} \cdot \frac{1}{s}\right) = \frac{3}{4} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{s} - \frac{4}{s+1} + \frac{1}{s+4}\right) = \frac{3}{4}(3 - 4e^{-t} + e^{-4t}).$$

♦ **Aplicația 5.7.** Fie sistemul monovariabil  $\Sigma(A, B, C, D)$  cu

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 1], \quad D = 1.$$

Să se afle:

- funcția de transfer  $G(s)$ ;
- răspunsul sistemului la intrarea  $u = t \cdot 1(t)$ ;
- răspunsul sistemului la intrarea  $u = \sin 3t \cdot 1(t)$ ;
- matricea fundamentală  $\Phi(t)$ ;
- răspunsul liber din starea inițială  $X_0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ ;
- răspunsul la intrarea  $u = t$  din starea inițială  $X_0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ .

**Soluție.** a) Avem

$$\det(sI - A) = s^2 + 5s + 4, \quad \Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 + 5s + 4} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}.$$

$$G(s) = C\Phi(s)B + D = \frac{s+1}{s^2 + 5s + 4} + 1 = \frac{s+3}{s+2}.$$

Deoarece funcția de transfer  $G(s)$  este reductibilă la una de ordinul unu, sistemul de ordinul doi  $\Sigma(A, B, C, D)$  nu este minimal. Sistemul minimal are modelul primar I-E

$$y' + 2y = u' + 3u$$

și modelul secundar

$$w' + 2w = u, \quad y = w' + 3w.$$

Cu notația  $x_1 = w$ , obținem modelul I-S-E

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + u, \quad y = x_1 + u,$$

cu

$$A = -2, \quad B = 1, \quad C = 1, \quad D = 1.$$

b) Ținând seama că  $U(s) = \frac{1}{s^2}$ , obținem

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)U(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+3}{s+2} \cdot \frac{1}{s^2}\right) = \frac{1}{4} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{6}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+2}\right) = \frac{1}{4}(6t - 1 + e^{-2t}).$$



c) Deoarece  $U(s) = \frac{3}{s^2 + 9}$ , rezultă

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[G(s)U(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+3}{s+2} \cdot \frac{1}{s^2+9}\right) = \frac{1}{13} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+2} - \frac{s-15}{s^2+9}\right) \\ &= \frac{1}{13}(e^{-2t} - \cos 3t + 5 \sin 3t). \end{aligned}$$

În regim sinusoidal permanent, răspunsul sistemului este

$$y_p(t) = \frac{1}{13}(-\cos 3t + 5 \sin 3t).$$

d) Avem

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= (sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \\ \frac{-2}{s+1} + \frac{2}{s+2} & \frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s+2} \end{bmatrix}, \\ \Phi(t) &= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

e) Starea evoluează liber astfel:

$$X_I(t) = \Phi(t)X_0 = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12e^{-t} - 7e^{-2t} \\ -12e^{-t} + 14e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Răspunsul liber al sistemului este

$$y_I(t) = x_{1I}(t) + x_{2I}(t) = 7e^{-2t}.$$

f) Avem

$$y(t) = y_I(t) + y_f(t),$$

unde  $y_I(t) = 7e^{-2t}$  - punctul e), iar  $y_f(t) = \frac{1}{4}(6t - 1 + e^{-2t})$  - punctul b). Rezultă

$$y(t) = \frac{1}{4}(6t - 1 + 29e^{-2t}).$$

♦ **Aplicația 5.8.** Să se afle matricea de transfer a sistemului multivariabil cu parametrii matriciali

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Soluție.** Avem

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 + 4s + 1} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ 2 & s+1 \end{bmatrix},$$

$$G(s) = C\Phi(s)B + D = \frac{1}{s^2 + 4s + 1} \begin{bmatrix} -s+1 & s+1 \\ s+5 & s+3 \end{bmatrix}.$$

Matricea de transfer  $G(s)$  este de ordinul doi. Ea poate fi scrisă și sub forma:

$$G(s) = \frac{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}}{s^2 + 4s + 1}.$$

♦ **Aplicația 5.9.** Să se studieze minimalitatea următoarelor sisteme:

a)  $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ ,  $C = [1 \ 2]$ ,  $D = 0$ ;

b)  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $C = [1 \ 1]$ ,  $D = 1$ ;

**Soluție.** a) Sistemul este minimal, deoarece funcția de transfer

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{9}{s^2 + 5s + 4}$$

este ireductibilă (are doi poli, deci are ordinul 2, egal cu cel al sistemului  $\Sigma(A, B, C, D)$  de tip I-S-E).

b) Sistemul nu este minimal, deoarece funcția de transfer

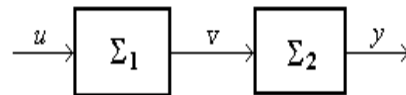
$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{s+1}{s^2 + 3s + 2} + 1 = \frac{(s+1)(s+3)}{(s+1)(s+2)}$$

este reductibilă la  $G(s) = \frac{s+3}{s+2}$ , de ordinul 1.

♦ **Aplicația 5.10.** Fie conexiunea serie alăturată, formată din subsistemele:

( $\Sigma_1$ )  $2\dot{v} + v = \dot{u} + u$ ,

( $\Sigma_2$ )  $4\dot{y} + y = 2v$ .



Să se afle răspunsul sistemului pentru:

a)  $u = \delta_0(t)$ ; b)  $u = 1(t)$ ;

c)  $u = t \cdot 1(t)$ ; d)  $u = \sin t \cdot 1(t)$ .

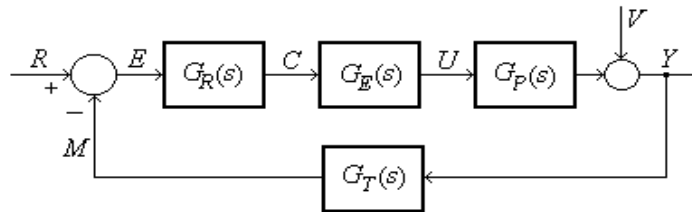
**Soluție.** Avem:

$$G_1(s) = \frac{s+1}{2s+1}, \quad G_2(s) = \frac{2}{4s+1}, \quad G(s) = G_1(s)G_2(s) = \frac{2(s+1)}{(2s+1)(4s+1)}.$$

- a)  $Y(s) = \frac{2(s+1)}{(2s+1)(4s+1)} = \frac{-1}{2s+1} + \frac{3}{4s+1}$ ,  $y(t) = -0,5e^{-t/2} + 0,75e^{-t/4}$ ;
- b)  $Y(s) = \frac{2(s+1)}{s(2s+1)(4s+1)} = \frac{2}{s} + \frac{2}{2s+1} - \frac{12}{4s+1}$ ,  $y(t) = 2 + e^{-t/2} - 3e^{-t/4}$ ;
- c)  $Y(s) = \frac{2(s+1)}{s^2(2s+1)(4s+1)} = \frac{2}{s^2} - \frac{10}{s} - \frac{4}{2s+1} + \frac{48}{4s+1}$ ,  
 $y(t) = 2t - 10 - 2e^{-t/2} + 12e^{-t/4}$ ;
- d)  $Y(s) = \frac{2(s+1)}{(2s+1)(4s+1)(s^2+1)} = \frac{-4}{5(2s+1)} + \frac{48}{17(4s+1)} - \frac{26s+2}{85(s^2+1)}$ ,  
 $y(t) = -\frac{2}{5}e^{-t/2} + \frac{12}{17}e^{-t/4} - \frac{26}{85}\cos t - \frac{2}{85}\sin t$ .

◆ **Aplicația 5.11.** Elementele sistemului de reglare automată de mai jos au următoarele funcții de transfer:

$$G_R = k > 0; \quad G_E = 2; \quad G_P = \frac{0,5}{5s+1}; \quad G_T = \frac{1}{s+1}.$$



În ipoteza  $k=1$ , să se afle răspunsul  $y(t)$  pentru:

- a)  $r = \delta_0(t)$ , b)  $r = 1(t)$ , c)  $r = t \cdot 1(t)$ ,

precum și răspunsul  $e(t)$  pentru:

- d)  $v = \delta_0(t)$ , e)  $v = 1(t)$ , f)  $v = t \cdot 1(t)$ .

**Soluție.** Deoarece perturbația  $V$  este aditivă la ieșirea procesului, funcția de transfer a canalului perturbator al procesului este  $G_V(s) = 1$ . În conformitate cu (45) și (46), obținem:

$$G_{YR} = \frac{k(s+1)}{5s^2 + 6s + k + 1}, \quad G_{YV} = \frac{(s+1)(5s+1)}{5s^2 + 6s + k + 1},$$

$$G_{ER} = \frac{(s+1)(5s+1)}{5s^2 + 6s + k + 1}, \quad G_{EV} = \frac{-(5s+1)}{5s^2 + 6s + k + 1}.$$

a) Avem

$$Y(s) = G_{YR}(s) = \frac{s+1}{5s^2 + 6s + 2} = \frac{(s+0,6) + 2 \cdot 0,2}{5[(s+0,6)^2 + 0,2^2]},$$

$$y(t) = 0,2e^{-0,6t}(\cos 0,2t + 2\sin 0,2t).$$

b) Avem

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s} G_{YR}(s) = \frac{s+1}{s(5s^2+6s+2)} = \frac{1}{2s} - \frac{5s+4}{2(5s^2+6s+2)} \\ &= \frac{0,5}{s} - \frac{0,5(s+0,6) + 0,5 \cdot 0,2}{(s+0,6)^2 + 0,2^2}, \\ y(t) &= 0,5 - 0,5e^{-0,6t}(\cos 0,2t + \sin 0,2t). \end{aligned}$$

c) Avem

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s^2} G_{YR}(s) = \frac{s+1}{s^2(5s^2+6s+2)} = \frac{1}{2s^2} - \frac{1}{s} + \frac{10s+7}{2(5s^2+6s+2)} \\ &= \frac{0,5}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{(s+0,6) + 0,5 \cdot 0,2}{(s+0,6)^2 + 0,2^2}, \\ y(t) &= 0,5t - 1 + e^{-0,6t}(\cos 0,2t + 0,5\sin 0,2t). \end{aligned}$$

d) Avem

$$\begin{aligned} E(s) &= G_{EV}(s) = \frac{-(5s+1)}{5s^2+6s+2} = -\frac{(s+0,6) - 2 \cdot 0,2}{(s+0,6)^2 + 0,2^2}, \\ e(t) &= -e^{-0,6t}(\cos 0,2t - 2\sin 0,2t). \end{aligned}$$

e) Avem

$$\begin{aligned} E(s) &= \frac{1}{s} G_{EV}(s) = \frac{-(5s+1)}{s(5s^2+6s+2)} = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{s} - \frac{5s-4}{5s^2+6s+2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{s} - \frac{(s+0,6) - 7 \cdot 0,2}{(s+0,6)^2 + 0,2^2} \right], \\ e(t) &= -0,5 + 0,5e^{-0,6t}(\cos 0,2t - 7\sin 0,2t). \end{aligned}$$

f) Avem

$$\begin{aligned} E(s) &= \frac{1}{s^2} G_{EV}(s) = \frac{-(5s+1)}{s^2(5s^2+6s+2)} = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s} - \frac{10s+17}{5s^2+6s+2} \right) \\ &= \frac{-0,5}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{(s+0,6) + 5,5 \cdot 0,2}{(s+0,6)^2 + 0,2^2}, \\ e(t) &= -0,5t - 1 + e^{-0,6t}(\cos 0,2t + 5,5\sin 0,2t). \end{aligned}$$

**Remarcă.** Ținând seama de proprietatea valorii finale, eroarea staționară (finală) pentru  $v=l(t)$  este

$$e_{st} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sG_{EV}(s)V(s) = \lim_{s \rightarrow 0} G_{EV}(s) = \frac{-1}{k+1}.$$

De asemenea, pentru  $r=l(t)$ , avem

$$e_{st} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} G_{ER}(s) = \frac{1}{k+1}.$$

În ambele cazuri, eroarea staționară este nenulă, dar cu atât mai mică cu cât factorul de proporționalitate al regulatorului este mai mare.

♦ **Aplicația 5.12.** Să se arate că răspunsul indicial  $h(t)$  al sistemului cu funcția de transfer

$$G(s) = \frac{kT_1^2 s^2 + 2T_1 s + 1}{(T_1 s + 1)^2}, \quad T_1 > 0,$$

trece printr-un punct fix în raport cu parametrul  $k$  real.

**Soluție.** Răspunsul indicial  $h(t)$  se determină astfel:

$$H(s) = \frac{1}{s} G(s) = \frac{1}{s} + (k-1) \left[ \frac{T_1}{T_1 s + 1} - \frac{T_1}{(T_1 s + 1)^2} \right],$$

$$h(t) = 1 + (k-1)(1-t/T_1)e^{-t/T_1}.$$

Deoarece  $h(T_1) = 1$ , toate răspunsurile indiciale ale sistemului trec prin punctul fix de coordonate  $(T_1, 1)$  indiferent de valoarea factorului  $k$  (fig. 5.22).

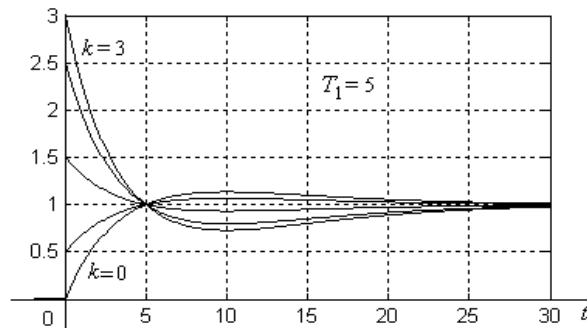


Fig. 5.22. Răspunsuri indiciale pentru  $T_1 = 5$  și diferite valori ale lui  $k$ :  
 $k = 0$ ;  $k = 0,5$ ;  $k = 1,5$ ;  $k = 2,5$ ;  $k = 3$ .

♦ **Aplicația 5.13.** Fie sistemul cu funcția de transfer

$$G(s) = \frac{1}{(2s+1)(3s+1)(5s+1)}.$$

Utilizând metoda Padé, să se reducă sistemul la formele

a)  $G_{r1}(s) = \frac{k}{T_1 s + 1};$

b)  $G_{r2}(s) = \frac{k}{a_2 s^2 + a_1 s + 1}.$

**Soluție.** a) Deoarece funcția de transfer redusă are  $q=2$  parametri nedeterminați, funcțiile polinomiale  $f_1(s)=T_1s+1$  și  $f_2(s)=k(2s+1)(3s+1)(5s+1)$  au ordinul maxim de coincidență egal cu  $q-1$ , adică cu 1. Prin egalarea coeficienților termenilor în  $s^0$  și în  $s$  ai funcțiilor  $f_1(s)$  și  $f_2(s)$  rezultă  $k=1$  și  $T_1=10$ ; așadar,

$$G_{r1}(s) = \frac{1}{10s+1}.$$

b) Deoarece funcția de transfer redusă are  $q=3$  parametri nedeterminați, funcțiile polinomiale  $f_1(s)=a_2s^2+a_1s+1$  și  $f_2(s)=k(2s+1)(3s+1)(5s+1)$  au ordinul maxim de coincidență egal cu  $q-1=2$ . Prin egalarea coeficienților termenilor în  $s^0$ , în  $s$  și în  $s^2$  ai funcțiilor  $f_1(s)$  și  $f_2(s)$  rezultă  $k=1$ ,  $a_1=10$  și  $a_2=31$ ; așadar,

$$G_{r2}(s) = \frac{1}{31s^2+10s+1}.$$

Rezultate identice pot fi obținute pe baza relațiilor (109) și (110).

Scriind funcția de transfer a sistemului dat sub forma

$$G(s) = \frac{1}{30s^3+31s^2+10s+1},$$

se observă că cele două funcții de transfer reduse se obțin prin eliminarea termenilor de grad superior de la numitorul funcției de transfer  $G(s)$ .

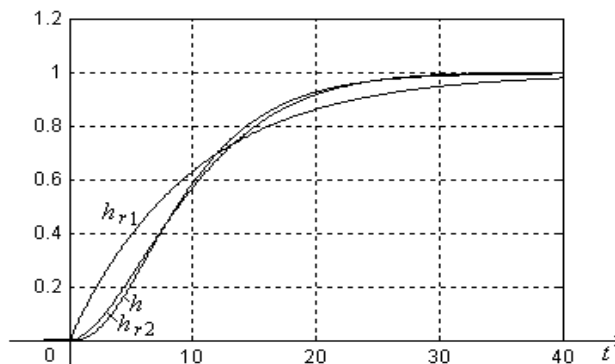


Fig. 5.23. Răspunsurile indiciale ale sistemelor cu funcțiile de transfer  $G$ ,  $G_{r1}$  și  $G_{r2}$ .

◆ **Aplicația 5.14.** Fie sistemul cu funcția de transfer

$$G(s) = \frac{3s+1}{(2s+1)(4s+1)(6s+1)}.$$

Utilizând metoda Padé, să se reducă sistemul la formele

a)  $G_{r1}(s) = \frac{k}{T_1s+1};$

b)  $G_{r2}(s) = \frac{k}{a_2s^2+a_1s+1}.$

**Soluție.** a) Deoarece funcția de transfer redusă are  $q = 2$  parametri nedeterminați, funcțiile polinomiale

$$f_1(s) = (T_1s + 1)(3s + 1), \quad f_2(s) = k(2s + 1)(4s + 1)(6s + 1)$$

au ordinul maxim de coincidență egal cu  $q - 1$ , adică cu 1. Prin egalarea coeficienților termenilor în  $s^0$  și în  $s$  ai funcțiilor  $f_1(s)$  și  $f_2(s)$  rezultă  $k = 1$  și  $T_1 = 9$ ; așadar,

$$G_{r1}(s) = \frac{1}{9s + 1}.$$

b) Deoarece funcția de transfer redusă are  $q = 3$  parametri nedeterminați, funcțiile polinomiale

$$f_1(s) = (a_2s^2 + a_1s + 1)(3s + 1), \quad f_2(s) = k(2s + 1)(4s + 1)(6s + 1)$$

au ordinul maxim de coincidență egal cu  $q - 1 = 2$ . Prin egalarea coeficienților termenilor în  $s^0$ , în  $s$  și în  $s^2$  ai funcțiilor  $f_1(s)$  și  $f_2(s)$  rezultă  $k = 1$ ,  $a_1 = 9$  și  $a_2 = 17$ ; așadar,

$$G_{r2}(s) = \frac{1}{17s^2 + 9s + 1}.$$

**Observație.** Rezultate identice se obțin pe baza relațiilor (115) și (116).

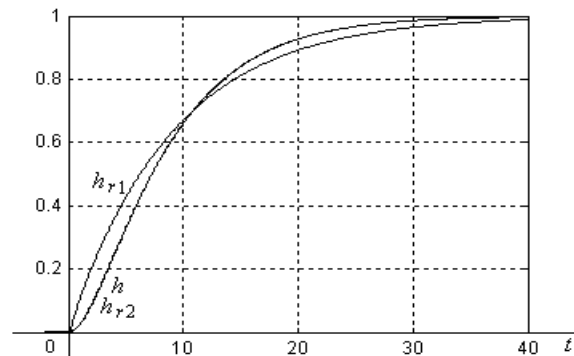


Fig. 5.24. Răspunsul indicial al sistemelor cu funcțiile de transfer  $G$ ,  $G_{r1}$  și  $G_{r2}$ .

◆ **Aplicația 5.15.** Utilizând metoda Padé, să se reducă sistemul cu funcția de transfer

$$G(s) = \frac{6s + 1}{(2s + 1)(3s + 1)}.$$

**Soluție.** Procedând ca la problema precedentă, obținem următoarele forme reduse:

$$G_{r1}(s) = \frac{1}{-s + 1}, \quad G_{r2}(s) = \frac{1}{12s^2 - s + 1}, \quad G_{r3}(s) = \frac{12s + 1}{11s + 1}.$$

Formele reduse  $G_{r1}(s)$  și  $G_{r2}(s)$  sunt instabile, deci inacceptabile pentru aproximarea lui  $G(s)$ .

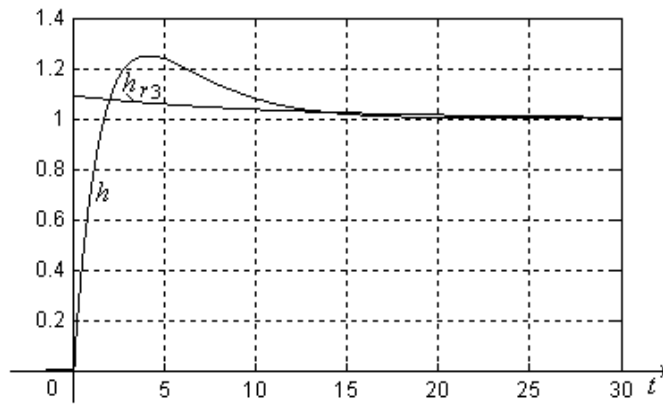


Fig. 5.25. Răspunsul indicial al sistemelor cu funcțiile de transfer  $G$  și  $G_{r3}$ .

♦ **Aplicația 5.16.** Să se reducă funcția de transfer

$$G(s) = \frac{e^{-\tau_1 s}}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

la forma

$$G_r(s) = \frac{e^{-\tau s}}{T s + 1}.$$

**Soluție.** Punem condiția ca funcțiile

$$f_1(s) = (T s + 1) \left[ 1 + \frac{(\tau - \tau_1) s}{1!} + \frac{(\tau - \tau_1)^2 s^2}{2!} + \dots \right]$$

și

$$f_2(s) = (T_1 s + 1)(T_2 s + 1),$$

care au același termen liber (egal cu 1), să aibă și termenii în  $s$  și  $s^2$  egali. Rezultă ecuațiile

$$\tau - \tau_1 = T_1 + T_2 - T,$$

$$(\tau - \tau_1)^2 + 2T(\tau - \tau_1) = 2T_1 T_2,$$

din care obținem

$$T = \sqrt{T_1^2 + T_2^2},$$

$$\tau = \tau_1 + T_1 + T_2 - \sqrt{T_1^2 + T_2^2}.$$

De exemplu, funcției de transfer

$$G(s) = \frac{e^{-3s}}{(3s + 1)(4s + 1)}$$

îi corespunde forma redusă

$$G_r(s) = \frac{e^{-5s}}{5s + 1}.$$



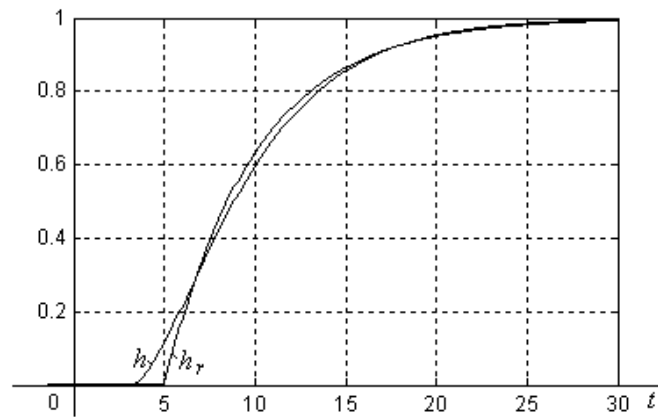


Fig. 5.26. Răspunsul indicial al sistemelor cu funcțiile de transfer  $G(s)$  și  $G_r(s)$ .

◆ **Aplicația 5.17.** Utilizând metoda Padé și metoda eliminării modurilor rapide de tip serial, să se reducă sistemul de ordinal trei cu modelul I-S-E:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -0,005x_1 - 0,155x_2 - 1,15x_3 + u \\ y = 0,01x_1 + 0,005x_2 \end{cases}$$

la unul de ordinal doi.

**Soluție.** Sistemul are funcția de transfer

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{s + 2}{(20s + 1)(10s + 1)(s + 1)}$$

*Metoda Padé.* Vom reduce sistemul la forma

$$G_{r1}(s) = \frac{b_0}{a_2s^2 + a_1s + 1}$$

Funcțiile polinomiale

$$f_1(s) = (s + 2)(a_2s^2 + a_1s + 1), \quad f_2(s) = b_0(20s + 1)(10s + 1)(s + 1)$$

au ordinalul maxim de coincidență egal cu 2. Prin egalarea coeficienților termenilor în  $s^0$ , în  $s^1$  și în  $s^2$  ai funcțiilor  $f_1(s)$  și  $f_2(s)$  rezultă  $b_0 = 2$ ,  $a_1 = 30,5$  și  $a_2 = 214,75$ ; așadar,

$$G_{r1}(s) = \frac{2}{214,75s^2 + 30,5s + 1}$$

Să reducem acum sistemul la forma

$$G_{r2}(s) = \frac{b_0}{a_1 s + 1}.$$

Funcțiile polinomiale  $f_1(s) = (s+2)(a_1 s + 1)$  și  $f_2(s) = b_0(20s+1)(10s+1)(s+1)$  au ordinul maxim de coincidență egal cu 1. Prin egalarea coeficienților termenilor în  $s^0$  și în  $s$  ai funcțiilor  $f_1(s)$  și  $f_2(s)$ , rezultă  $b_0 = 2$  și  $a_1 = 30,5$ ; așadar,

$$G_{r2}(s) = \frac{2}{30,5s+1}.$$

*Metoda eliminării modurilor rapide de tip serial.* Sistemul are polii  $p_1 = -1/20$ ,  $p_2 = -1/10$  și  $p_3 = -1$  astfel încât  $p_1 > p_2 > p_3$ . Deoarece  $p_2 \gg p_3$  ( $p_3 = 10p_2 < 0$ ), prin eliminarea modului serial asociat polului  $p_3$  - relația (119), rezultă

$$G_{r3}(s) = \frac{s+2}{(20s+1)(10s+1)}.$$

♦ **Aplicația 5.18.** Să se studieze minimalitatea sistemului:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Soluție.** Sistemul este minimal deoarece matricea de controlabilitate

$$C_n = [B \ AB] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

și matricea de observabilitate

$$Q_n = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

au rangul doi.

♦ **Aplicația 5.19.** Să se aducă sistemul

$$6\ddot{y} + 5\dot{y} + y = 9\dot{u} + 4u$$

la forma I-S-E modală.

**Soluție.** Scriem funcția de transfer a sistemului sub forma

$$G(s) = \frac{9s+4}{6s^2+5s+1} = \frac{1}{2s+1} + \frac{3}{3s+1}.$$

Ținând seama de (129), obținem realizarea modală

$$A = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1/2 \ 1],$$

echivalentă cu

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{1}{2}x_1 + u \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{3}x_2 + u \end{cases}, \quad y = \frac{1}{2}x_1 + x_2$$

♦ **Aplicația 5.20.** Să se aducă sistemul

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 1],$$

la forma modală minimală.

**Soluție.** Sistemul are funcția de transfer simplificată

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{s+1}{s^2+3s+1} = \frac{1}{s+2},$$

din care se obține imediat realizarea modală minimală  $\Sigma(A, B, C) = \Sigma(-2, 1, 1)$ , adică

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 + u, \\ y_1 &= x_1. \end{aligned}$$

♦ **Aplicația 5.21.** Să se arate că sistemul

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 0 \quad 1],$$

este neminimal și să se aducă la o formă minimală.

**Soluție.** Calculăm matricele de controlabilitate și de observabilitate

$$C_3 = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -6 & -6 & 12 & 18 \\ 4 & 3 & -8 & -9 & 16 & 27 \\ 1 & 1 & -2 & -3 & 4 & 9 \end{bmatrix}, \quad Q_3 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 25 \end{bmatrix}.$$

Deoarece  $\text{rang } C_3 = 2 < n = 3$  (ultima linie este egală cu diferența celorlalte două), sistemul nu este minimal. Matricea de transfer are forma primară

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{\begin{bmatrix} s^2+4s+3 & s^2+3s+2 \end{bmatrix}}{s^3+6s^2+11s+6}$$

reductibilă. Prin simplificare, obținem forma ireductibilă de ordinul doi

$$G_0(s) = \frac{\begin{bmatrix} s+3 & s+2 \end{bmatrix}}{s^2+5s+6} = \frac{[1 \quad 1]s + [3 \quad 2]}{s^2+5s+6},$$

căreia îi corespunde realizarea standard observabilă de ordinul doi:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 1 & -5 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C = [0 \quad 1].$$

Realizarea este minimală deoarece

$$\text{rang } C_2 = \text{rang} [B \quad AB] = \text{rang} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -6 & -6 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = 2$$

și

$$\text{rang } Q_2 = \text{rang} \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} = 2.$$

De menționat faptul că realizarea standard controlabilă a matricei de transfer ireductibile  $G_0(s)$  are ordinul 4 și nu este minimală.

♦ **Aplicația 5.22.** Să se afle o realizare minimală a matricei de transfer

$$G(s) = \frac{\begin{bmatrix} 2s+1 \\ (s+1)(s+2) \\ 3 \\ (s+1)(s+3) \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} (s+1)(s+3) \end{bmatrix}}.$$

**Soluție.** Funcția  $G(s)$  poate fi scrisă sub forma

$$G(s) = \frac{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} s^2 + \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}.$$

Realizarea standard controlabilă a funcției  $G(s)$  are dimensiunea  $mn=1 \cdot 3=3$ , iar realizarea standard observabilă are dimensiunea  $pn=2 \cdot 3=6$ .

Realizarea standard controlabilă are parametrii matriceali

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 6 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Realizarea este minimală deoarece matricele  $C_3$  și  $Q_3$  au rangul 3:

$$C_3 = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 24 \end{bmatrix}, \quad Q_3 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 6 & 3 & 0 \\ -12 & -19 & -5 \\ 0 & 6 & 3 \\ 30 & 43 & 11 \\ -18 & -33 & -12 \end{bmatrix}.$$

♦ **Aplicația 5.23.** Să se studieze minimalitatea realizărilor standard ale matricei de transfer

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{2s+1}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{s+3} & \frac{3}{(s+1)(s+3)} \end{bmatrix}$$

și să se determine o realizare modală minimală.

**Soluție.** Scriem pe  $G(s)$  sub forma

$$G(s) = \frac{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} s^2 + \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}.$$

Formăm realizarea standard controlabilă

$$A = \begin{bmatrix} 0_2 & I_2 & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 & I_2 \\ -6I_2 & -11I_2 & -6I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & -11 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & -11 & 0 & -6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0_2 \\ 0_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C = [K_0 \quad K_1 \quad K_2] = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 3 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

și realizarea standard observabilă

$$A = \begin{bmatrix} 0_2 & 0_2 & -6I_2 \\ I_2 & 0_2 & -11I_2 \\ 0_2 & I_2 & -6I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -11 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} K_0 \\ K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 6 \\ 7 & 5 \\ 3 & 3 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = [0_2 \quad 0_2 \quad I_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ambele realizări au dimensiunea 6. În MATLAB se poate verifica ușor că în primul caz avem  $\text{rang } C_6=6$  și  $\text{rang } Q_6=4$ , iar în al doilea caz avem  $\text{rang } C_6=4$  și  $\text{rang } Q_6=6$ . Conform teoremei de minimalitate, ambele reprezentări sunt neminimale. Cu funcția *minreal* se poate găsi forma minimală, care are dimensiunea 4.

În continuare vom determina o *realizare modală minimală* a funcției matriceale  $G(s)$ .

Din forma descompusă în fracții simple a matricei de transfer,

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{3}{s+2} - \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{s+3} & \frac{3}{2(s+1)} - \frac{3}{2(s+3)} \end{bmatrix},$$

relațiile directe intrare-ieșire pot fi scrise astfel

$$Y_1(s) = \frac{3U_1(s)}{s+2} - \frac{U_1(s)}{s+1} + \frac{U_2(s)}{s+1}, \quad Y_2(s) = \frac{U_1(s)}{s+3} - \frac{3U_2(s)}{2(s+3)} + \frac{3U_2(s)}{2(s+1)}.$$

Prin alegerea variabilelor de stare

$$X_1(s) = \frac{3U_1(s)}{s+2}, \quad X_2(s) = \frac{-U_1(s) + U_2(s)}{s+1},$$

$$X_3(s) = \frac{U_1(s) - 1,5U_2(s)}{s+3}, \quad X_4(s) = \frac{1,5U_2(s)}{s+1},$$

obținem următoarea formă modală de reprezentare I-S-E

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1,5 \\ 0 & 1,5 \end{bmatrix} U, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} X.$$

Reprezentarea este minimală, deși are dimensiunea mai mare decât ordinul matricei de transfer  $G(s)$ , care este trei, deoarece polinomul polilor  $P(s) = (s+1)(s+2)(s+3)$  este de gradul trei.

♦ **Aplicația 5.24.** Să se arate că un sistem liniar continuu nemonotonic  $\Sigma$  își conservă proprietatea de nemonotonicitate prin:

- mărirea unei constante de timp de avans pozitive;
- micșorarea unei constante de timp de întârziere pozitive.

**Soluție.** Vom utiliza metoda reducerii la absurd.

a) Presupunem că sistemul  $\bar{\Sigma}$  obținut prin mărirea constante de timp de avans este monotonic. Prin readucerea (micșorarea) acestei constante de timp la valoarea inițială, reobținem sistemul  $\Sigma$  care, conform Teoremei 1 de conservare a monotonicității – punctul a), este monotonic, ceea ce este fals.

b) Presupunem că sistemul  $\bar{\Sigma}$  obținut prin micșorarea constante de timp de avans este monotonic. Prin readucerea (mărirea) acestei constante de timp la valoarea inițială, reobținem sistemul  $\Sigma$  care, conform Teoremei 1 de conservare a monotonicității – punctul b), este monotonic, ceea ce este fals.

♦ **Aplicația 5.25.** Fie  $\Sigma_1$  un sistem C-monotonic cu funcția de transfer  $G_1(s)$  și constanta de timp de întârziere  $T_1 > 0$ , iar  $\Sigma_2$  sistemul C-monotonic cu funcția de transfer  $G_2(s)$  obținută din  $G_1(s)$  prin înlocuirea constantei de timp  $T_1$  cu  $T_2$ ,  $T_2 > T_1$ . Să se arate că între funcțiile indiciale ale celor două sisteme există inegalitatea

$$h_1(t) \geq h_2(t), \quad t \geq 0.$$

**Soluție.** Intre funcțiile de transfer  $G_1(s)$  și  $G_2(s)$  ale sistemelor  $\Sigma_1$  și  $\Sigma_2$  există corelația

$$G_2(s) = \frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1} G_1(s).$$

Rezultă

$$H_1(s) - H_2(s) = \frac{1}{s} [G_1(s) - G_2(s)] = \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) \frac{T_2}{T_2 s + 1} G_1(s).$$

Transformatei Laplace  $\frac{T_2}{T_2 s + 1}$  îi corespunde funcția original  $e^{-t/T_2}$ . În consecință, din proprietatea produsului de convoluție, rezultă

$$H_1(s) - H_2(s) = \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) \mathcal{L}\left[\int_0^t e^{-(t-\tau)/T_2} g_1(\tau) d\tau\right],$$

$$h_1(t) - h_2(t) = \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) \int_0^t e^{-(t-\tau)/T_2} g_1(\tau) d\tau.$$

Deoarece  $g_1(\tau) \geq 0$  pentru  $\tau \in [0, t]$  (din teorema fundamentală a sistemelor monotone), rezultă

$$h_1(t) - h_2(t) \geq 0, \quad t \geq 0.$$

♦ **Aplicația 5.26.** Să se arate că sistemul  $\Sigma$  cu funcția de transfer

$$G(s) = \frac{1}{(T_1 s + 1)[(T s + 1)^2 + f^2]}, \quad f > 0, T > 0, T_1 > 0.$$

este C-monotonic dacă și numai dacă  $T_1 \geq T$ .

**Soluție.** Fie  $\Sigma_0$  sistemul cu funcția de transfer

$$G_0(s) = \frac{1}{(Ts+1)[(Ts+1)^2 + f^2]}.$$

*Suficiența.* Trebuie să arătăm că sistemul  $\Sigma$  este C-monotonic pentru  $T_1 \geq T$ . Ținând seama de punctul b) al Teoremei 1 de conservare a monotonicității, este suficient să arătăm că sistemul  $\Sigma_0$  este C-monotonic, adică să arătăm că  $g_0(t) \geq 0$  pentru orice  $t \geq 0$  (teorema fundamentală a sistemelor monotone). Într-adevăr, avem

$$f^2 G_0(s) = \frac{1}{Ts+1} - \frac{Ts+1}{(Ts+1)^2 + f^2},$$

deci

$$f^2 g_0(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T} (1 - \cos f \frac{t}{T}) \geq 0.$$

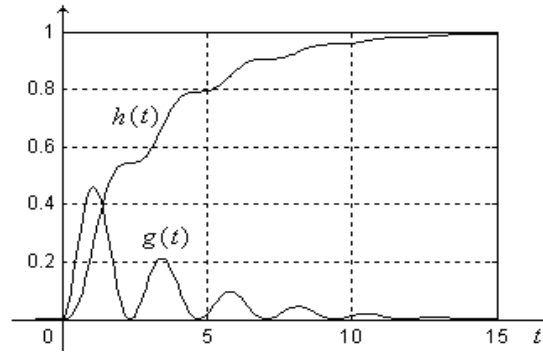


Fig. 5.27. Răspunsul indicial și răspunsul pondere pentru sistemul cu funcția de transfer

$$G_0(s) = \frac{65}{(3s+1)[(3s+1)^2 + 64]}.$$

*Necesitatea.* Trebuie arătat că dacă sistemul  $\Sigma$  este C-monotonic, adică  $g(t) \geq 0$  pentru orice  $t \geq 0$ , atunci  $T_1 \geq T$ . Presupunem, prin absurd, că  $T_1 < T$ . Avem

$$G(s) = \frac{Ts+1}{T_1s+1} G_0(s) = \frac{T}{T_1} G_0(s) - (\frac{T}{T_1} - 1) \frac{G_0(s)}{T_1s+1},$$

deci

$$g(t) = \frac{T}{T_1} g_0(t) - \frac{1}{T_1} (\frac{T}{T_1} - 1) g_1(t), \quad g_1(t) = \int_0^t g_0(t-\tau) e^{-\tau/T_1} d\tau.$$

Deoarece  $g_0(t-\tau) \geq 0$  pentru orice  $\tau \in [0, t]$ , avem  $g_1(t) > 0$  pentru  $t > 0$ . Ținând seama că  $g_0(\frac{2\pi T}{f}) = 0$  și  $T_1 < T$ , obținem

$$g(\frac{2\pi T}{f}) = -\frac{1}{T_1} (\frac{T}{T_1} - 1) g_1(\frac{2\pi T}{f}) < 0,$$



ceea ce contrazice ipoteza  $g(t) \geq 0$ .

◆ **Aplicația 5.27.** Fie

$$G(s) = \frac{(Ts+1)^2 + k^2}{(T_1s+1)^3}, \quad T, T_1 > 0, \quad k \geq 0.$$

Să se arate că sistemul cu funcția de transfer  $G(s)$  este C-monotonic pentru

$$T_1 \geq \frac{T}{1+k}.$$

**Soluție.** Cu notația  $a = \frac{T}{T_1}$ , condiția  $T_1 \geq \frac{T}{1+k}$  devine

$$1+k \geq a.$$

Descompunem funcția de transfer în fracții simple:

$$G(s) = \frac{A}{(T_1s+1)^3} + \frac{B}{(T_1s+1)^2} + \frac{C}{T_1s+1},$$

unde

$$A = (1-a)^2 + k^2 \geq 0,$$

$$B = 2a(1-a),$$

$$C = a^2 > 0.$$

Sistemul are funcția pondere

$$g(t) = \frac{1}{T_1} \left( \frac{At^2}{2T_1^2} + \frac{Bt}{T_1} + C \right) e^{-\frac{t}{T_1}}.$$

În cazul  $0 < a \leq 1$ , sistemul este C-monotonic deoarece  $B \geq 0$  și deci  $g(t) > 0$  pentru orice  $t \geq 0$ .

În cazul  $a > 1$ , care implică  $A > 0$  și  $B < 0$ , scriem funcția pondere sub forma

$$2T_1 Ag(t) = \left[ \left( \frac{At}{T_1} + B \right)^2 + 2AC - B^2 \right] e^{-\frac{t}{T_1}}.$$

Dacă  $2AC - B^2 \geq 0$ , avem  $g(t) \geq 0$ , deci sistemul este C-monotonic. Într-adevăr, avem:

$$2AC - B^2 = 2a^2(k+1-a)(k-1+a) \geq 0.$$

*Caz particular.* Sistemul cu funcția de transfer

$$G(s) = \frac{(4s+1)^2 + 1}{(T_1s+1)^3}$$

este C-monotonic pentru  $T_1 \geq 2$  și este nemonotonic pentru  $0 < T_1 < 2$ .

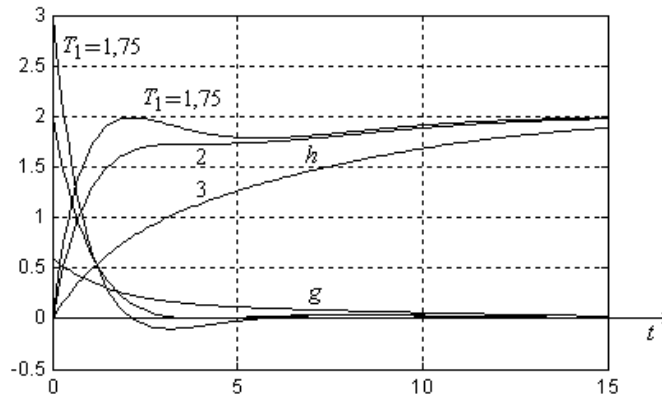


Fig. 5.28. Răspunsurile indiciale și pondere ale sistemului cu  $G(s) = \frac{(4s+1)^2 + 1}{(T_1s+1)^3}$  pentru  $T_1=1,75$ ,  $T_1=2$  și  $T_1=3$

Răspunsurile din fig. 5.28 au fost obținute cu programul MATLAB:

```
t1=[1.75 2 3]; t=0:0.1:15;
s=tf('s'); hold on;
for i=1:3
    sis=((4*s+1)^2+1)/(t1(i)*s+1)^3;
    step(sis,t);
    impulse(sis,t);
end;
grid on
```

♦ **Aplicația 5.28.** Fie sistemul cu funcția de transfer

$$G(s) = \frac{K(\tau_1s+1)(\tau_2s+1)\cdots(\tau_ns+1)}{(T_1s+1)(T_2s+1)\cdots(T_ns+1)},$$

unde  $K > 0$  și  $T_1 > \tau_1 > T_2 > \tau_2 > \cdots > T_n > \tau_n \geq 0$ . Să se arate că sistemul închis cu funcția de transfer

$$G_0(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$

este C-monotonic.

**Soluție.** Cu notațiile

$$P(s) = (T_1s+1)(T_2s+1)\cdots(T_ns+1),$$

$$Z(s) = (\tau_1s+1)(\tau_2s+1)\cdots(\tau_ns+1),$$

avem

$$G(s) = K \frac{Z(s)}{P(s)},$$

deci

$$G_0(s) = \frac{Z(s)}{Q(s)},$$

unde

$$Q(s) = Z(s) + K^{-1}P(s).$$

Fie  $z_i = \frac{-1}{\tau_i}$  rădăcinile polinomului  $Z(s)$ , iar  $p_i = \frac{-1}{T_i}$  rădăcinile polinomului  $P(s)$ . Rezultă  $p_1 > z_1 > p_2 > z_2 > \dots > p_n > z_n$ . Pentru orice  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , avem  $Q(p_i) = Z(p_i)$  și  $Q(z_i) = K^{-1}P(z_i)$ , deci  $Q(p_i)Q(z_i) = K^{-1}Z(p_i)P(z_i)$ . Deoarece  $(-1)^{i-1}Z(p_i) > 0$  și  $(-1)^i P(z_i) > 0$ , rezultă  $Z(p_i)P(z_i) < 0$ , deci  $Q(p_i)Q(z_i) < 0$  pentru orice  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Prin urmare, toate rădăcinile  $\tilde{p}_i$  ale polinomului  $Q(s)$ , adică toți poli funcției de transfer  $G_0(s)$ , sunt numere reale situate între zerourile și poli funcției de transfer  $G(s)$ , adică  $z_i < \tilde{p}_i < p_i$  pentru  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Cu notațiile  $\tilde{p}_i = \frac{-1}{\tilde{T}_i}$  pentru  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , relațiile  $z_i < \tilde{p}_i < p_i$  devin

$$\tau_i < \tilde{T}_i < T_i.$$

Deoarece

$$Q(0) = 1 + K^{-1},$$

avem

$$Q(s) = (1 + K^{-1})(\tilde{T}_1 s + 1)(\tilde{T}_2 s + 1) \cdots (\tilde{T}_n s + 1).$$

Așadar, putem rescrie funcția de transfer  $G_0(s)$  sub forma

$$G_0(s) = \frac{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \cdots (\tau_n s + 1)}{(1 + K^{-1})(\tilde{T}_1 s + 1)(\tilde{T}_2 s + 1) \cdots (\tilde{T}_n s + 1)} = \frac{1}{1 + K^{-1}} G_1(s) G_2(s) \cdots G_n(s),$$

unde

$$G_i(s) = \frac{\tau_i s + 1}{\tilde{T}_i s + 1}, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Fiind o conexiune serie de subsisteme C-monotonice, sistemul închis cu funcția de transfer  $G_0(s)$  este C-monotonic.

♦ **Aplicația 5.29.** Să se arate că sistemul cu funcția de transfer

$$G(s) = \frac{(\tau s + 1)^n}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots (T_n s + 1)},$$

cu  $\tau > 0$  și  $T_i > 0$  pentru  $i = 1, 2, \dots, n$ , este C-monotonic dacă și numai dacă

$$n\tau^{-1} \geq T_1^{-1} + T_2^{-1} + \cdots + T_n^{-1}.$$

**Soluție.** Necesitatea rezultă din condiția ca răspunsul indicial să fie crescător la momentul  $t=0_+$ , adică  $h'(0_+) \geq 0$ . În conformitate cu (22), avem

$$h'(0_+) = \frac{b_{n-1}}{a_n} - \frac{a_{n-1}b_n}{a_n^2} = \frac{\tau^n}{T_1 T_2 \cdots T_n} (n\tau^{-1} - T_1^{-1} - T_2^{-1} - \cdots - T_n^{-1}),$$

iar din  $h'(0_+) \geq 0$  obținem

$$n\tau^{-1} \geq T_1^{-1} + T_2^{-1} + \cdots + T_n^{-1}.$$

Pentru a demonstra *suficiența*, în conformitate cu Teorema 1 de conservare a monotonicității, este suficient să luăm în considerație cazul

$$n\tau^{-1} = T_1^{-1} + T_2^{-1} + \cdots + T_n^{-1}.$$

Așadar, trebuie să arătăm că sistemul este C-monotonic. Vom utiliza metoda inducției.

Pentru  $n=1$ , avem  $G(s)=1$ , deci sistemul este C-monotonic. De asemenea, pentru  $n=2$ , avem

$$G(s) = \frac{(\tau s + 1)^2}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}, \quad \tau = \frac{2T_1 T_2}{T_1 + T_2},$$

iar sistemul este C-monotonic deoarece

$$T_1 T_2 G(s) = \tau^2 + \frac{T_1 T_2 - \tau^2}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} = \tau^2 + \frac{T_1 T_2 (T_1 - T_2)^2}{(T_1 + T_2)^2 (T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}.$$

În continuare vom presupune proprietatea adevărată pentru  $n-1$ , și vom arăta că aceasta rămâne adevărată și pentru  $n$ . Presupunem, fără a pierde din generalitate, că

$$T_1 \geq T_2 \geq \cdots \geq T_n,$$

$$T_{k+1} < \tau < T_k.$$

Fie  $\tilde{G}(s)$  funcția de transfer obținută din  $G(s)$  prin contracția inversă a constantelor de timp de întârziere  $T_k$  și  $T_{k+1}$ , care constă în înlocuirea produsului

$$(T_k s + 1)(T_{k+1} s + 1)$$

de la numitorul funcției  $G(s)$  cu produsul

$$(\tilde{T}_k s + 1)(\tilde{T}_{k+1} s + 1),$$

unde constantele de timp  $\tilde{T}_k$  și  $\tilde{T}_{k+1}$  satisfac condițiile

$$T_k > \tilde{T}_k \geq \tilde{T}_{k+1} > T_{k+1},$$

$$\tilde{T}_k^{-1} + \tilde{T}_{k+1}^{-1} = T_k^{-1} + T_{k+1}^{-1}.$$

În conformitate cu Teorema 2 de conservare a monotonicității, este suficient să demonstrăm monotonicitatea sistemului cu funcția de transfer  $\tilde{G}(s)$ . Din mulțimea infinită de perechi  $(\tilde{T}_k, \tilde{T}_{k+1})$  care satisfac condițiile de contracție, alegem perechea în care una dintre constantele de timp  $\tilde{T}_k$  și  $\tilde{T}_{k+1}$  este egală cu  $\tau$ , caz în care, prin simplificare, numărătorul și numitorul funcției de transfer  $\tilde{G}(s)$  sunt polinoame de gradul  $n-1$ . Conform ipotezei de inducție, sistemul cu funcția de transfer  $\tilde{G}(s)$  este C-monotonic.

*Caz particular.* Sistemul cu funcția de transfer

$$G(s) = \frac{(\tau s + 1)^3}{(6s + 1)(3s + 1)(s + 1)}$$

este C-monotonic pentru  $0 \leq \tau \leq 2$  și este nemonotonic pentru  $\tau > 2$  (fig. 5.29).

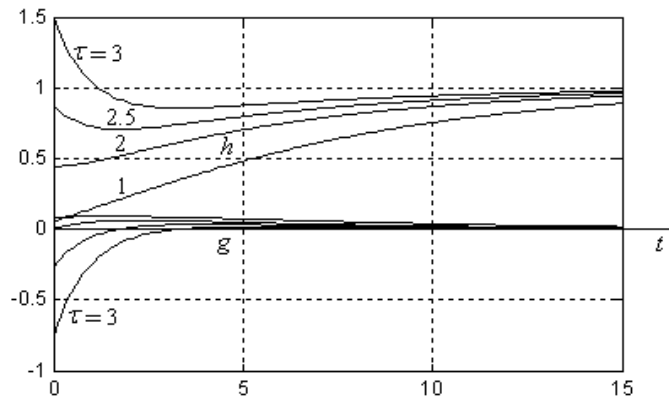


Fig. 5.29. Răspunsurile indiciale și pondere pentru  $\tau=1; 2; 2,5; 3$  ale sistemului cu

$$G(s) = \frac{(\tau s + 1)^3}{(6s + 1)(3s + 1)(s + 1)}$$

## 5.12. APLICAȚII DE AUTOCONTROL

◆ **C5.1.** Să se calculeze funcția de transfer și răspunsul sistemului cu ecuația diferențială

$$7\dot{y} + y = 2\dot{u} + u$$

la următoarele intrări:

a)  $u=1(t)$ ; b)  $u=\delta_0(t)$ ; c)  $u=t \cdot 1(t)$ ; d)  $u=\sin \frac{t}{2} \cdot 1(t)$ .

◆ **C5.2.** Să se calculeze răspunsul indicial și răspunsul pondere ale sistemului

$$6\ddot{y} + 5\dot{y} + y = 6\dot{u} + 2u$$

Să se scrie apoi ecuația sistemului echivalent minimal.

◆ C5.3. Să se calculeze răspunsul indicial al sistemului continuu

$$3\ddot{y} + 4\dot{y} + 2y = 3\dot{u} + u.$$

◆ C5.4. Fie  $h(t)$  răspunsul indicial al sistemului continuu

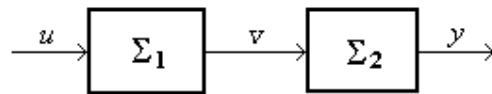
$$4\ddot{y} + 4\dot{y} + 5y + 2y = 4\ddot{u} + 3\dot{u} + u.$$

Să se afle:

a)  $h(0_+)$ ; b)  $h'(0_+)$ ; c)  $h(\infty)$ .

◆ C5.5. Fie conexiunea serie formată din subsistemele:

$$\Sigma_1: 4\dot{v} + v = 3\dot{u} + u, \quad \Sigma_2: 5\dot{y} + y = 2v.$$



a) Să se calculeze funcția de transfer  $G(s)$  a sistemului;

b) Pentru  $u=1(t)$ , să se afle  $v(t)$ ;

c) Pentru  $u=1(t)$ , să se afle  $y(t)$ ;

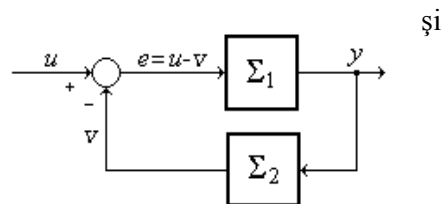
◆ C5.6. Fie conexiunea cu reacție formată din subsistemele:

$$\Sigma_1: 4\dot{y} + y = e,$$

$$\Sigma_2: 2\dot{v} + v = y.$$

a) Să se afle funcția de transfer  $G(s)$  ecuația sistemului;

b) Pentru  $u=1(t)$ , să se calculeze apoi  $y(t)$ .



și

$Y(s)$ ,

◆ C5.7. Fie conexiunea cu reacție de problema precedentă în care

la

$$\Sigma_1: 10\ddot{y} + \dot{y} = \frac{1}{T_1}(4\dot{e} + e);$$

$$\Sigma_2: 4\dot{v} + v = 2\dot{y} + y.$$

Să se afle răspunsul  $y(t)$  pentru  $u=1(t)$ , în cazurile:

a)  $T_1=36$ ;

b)  $T_1=2$ .

◆ **C5.8.** Fie sistemul  $\Sigma(A,B,C,D)$  cu

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C = [2 \quad -p], \quad D = 0,$$

unde  $p \in \mathbf{R}$ .

- Să se afle funcția de transfer  $G(s)$  și funcția indicială  $h(t)$ ;
- Să se arate că sistemul nu este minimal.

◆ **C5.9.** Fie sistemul  $\Sigma(A,B,C,D)$  cu

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = 0.$$

- Să se afle matricea de transfer  $G(s)$ ;
- Să se afle răspunsul  $y_1(t)$  la intrarea  $u_2(t)=1(t)$ .

◆ **C5.10.** Fie sistemul  $\Sigma(A,B,C,D)$  cu

$$A = \begin{bmatrix} -1 & p \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad -1], \quad D = 2,$$

unde  $p \in \mathbf{R}$ . Pentru ce valori ale parametrului  $p$  sistemul este minimal ?

◆ **C5.11.** Se dă sistemul cu funcția de transfer

$$G(s) = \frac{\tau s + 1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}.$$

Dacă  $\tau, T_1, T_2 > 0$  și  $\frac{1}{\tau} > \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}$ , atunci răspunsul indicial al sistemului are un punct de inflexiune la  $t > 0$ .

◆ **C5.12.** Fie  $h(t)$  răspunsul indicial al sistemului cu funcția de transfer

$$G(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1s + a_0}, \quad a_n > 0, \quad b_{n-1} > 0.$$

Să se arate că răspunsul indicial are forma convexă în vecinătatea originii dacă și numai dacă  $\frac{b_{n-2}}{b_{n-1}} > \frac{a_{n-1}}{a_n}$ . Să se arate că din C5.12 reiese imediat C5.11.

- ♦ **C5.13.** Să se afle răspunsul  $y(t)$  al sistemului cu

$$G(s) = \frac{2}{2s+1},$$

la intrarea de tip original

$$u(t) = \begin{cases} 3, & t=0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}.$$

- ♦ **C5.14.** Să se afle valoarea inițială  $y(0_+)$  și valoarea finală  $y(\infty)$  ale răspunsului sistemului cu funcția de transfer

$$G(s) = \frac{s+1}{(2s+1)(Ts+1)}, \quad T > 0,$$

la intrarea de tip original

$$u(t) = \begin{cases} t+1, & 0 \leq t \leq 5 \\ 8, & 5 < t \leq 9 \\ 0, & t > 9 \end{cases}.$$

- ♦ **C5.15.** Fie sistemul cu funcția de transfer

$$G(s) = \frac{(s+1)(s+2)}{(2s+1)(3s+1)(5s+1)}.$$

Utilizând metoda Padé, să se reducă sistemul la formele

$$\text{a) } G_{r1}(s) = \frac{k}{T_1s+1}; \quad \text{b) } G_{r2}(s) = \frac{k(b_1s+1)}{a_2s^2+a_1s+1}.$$

- ♦ **C5.16.** Să se reducă sistemul cu funcția de transfer

$$G(s) = \frac{s+3}{(15s+1)(4s+3)},$$

prin metoda eliminării modurilor rapide de tip serial.

- ♦ **C5.17.** Să se reducă sistemul cu funcția de transfer

$$G(s) = \frac{2}{(16s+1)(2s+1)(s+1)},$$

prin metoda eliminării modurilor rapide de tip serial.

- ♦ **C5.18.** Să se reducă sistemul cu funcția de transfer

$$G(s) = \frac{e^{-\tau s}}{Ts+1}, \quad T, \tau > 0,$$



la forma

$$G_r(s) = \frac{1}{(T_1s+1)(T_2s+1)}.$$

♦ **C5.19.** Să se reducă sistemul cu funcția de transfer

$$G(s) = \frac{e^{-\tau s}}{Ts + e^{-\tau s}}, \quad T, \tau > 0$$

la forma

$$G_r(s) = \frac{1}{(T_1s+1)(T_2s+1)}.$$

♦ **C5.20.** Să se arate că sistemul cu funcția de transfer

$$G(s) = \frac{(\tau s + 1)^2 + k^2}{(T_1s + 1)[(T_1s + 1)^2 + k_1^2]}, \quad \tau, k, T_1, k_1 > 0.$$

este C-monotonic pentru

$$k^2 \geq \frac{\tau^2}{2T_1^2} k_1^2 + \left(\frac{\tau}{T_1} - 1\right)^2.$$

♦ **C5.21.** Să se arate că sistemul cu funcția de transfer

$$G(s) = \frac{(s+4)(s+6)(s+7)}{(s+3)(s+5)(s+9)}$$

este C-monotonic.

# 6

---

## METODA OPERAȚIONALĂ Z

---

Acest capitol este axat pe studiul *sistemelor liniare discrete de tip intrare-ieșire* (I-E) cu ajutorul formalismului operațional Z.

Ca și în cazul metodei operaționale Laplace, caracteristica principală a metodei operaționale Z este dată de forma simplă de descriere matematică a corelației dinamice între mărimile de intrare și de ieșire ale unui sistem liniar discret. Modelul operațional dinamic al unui sistem discret are aceeași formă cu cea a modelului operațional dinamic al unui sistem continuu, similară formei modelului staționar, la care ieșirea  $y$  se obține prin multiplicarea intrării  $u$  cu un factor constant de proporționalitate  $K$ , adică

$$y = Ku. \quad (1)$$

Ca și în cazul metodei operaționale Laplace, *simplificarea formalismului matematic* în cadrul procedurilor de analiză și sinteză a sistemelor se realizează prin *creșterea gradului de abstractizare*, care presupune trecerea de la studiul sistemului în domeniul timpului la studiul în domeniul complex. Astfel, obținerea modelului dinamic de tip I-E al unui sistem cu structură închisă din modelele dinamice ale subsistemelor componente este o operație relativ complicată în domeniul timpului, care presupune eliminarea tuturor variabilelor intermediare.

În cazul unui sistem liniar discret monovariabil, cu perioada de discretizare  $T=1$  și cu variabile de tip original (nule pentru timp negativ), modelul matematic intrare-ieșire în domeniul timpului are forma *ecuației cu diferențe*

$$a_0 y(t) + a_1 y(t-1) + \dots + a_n y(t-n) = b_0 u(t) + b_1 u(t-1) + \dots + b_r u(t-r), \quad a_0 \neq 0. \quad (2)$$

În regim staționar, modelul dinamic (2) capătă forma algebrică (1), unde

$$K = \frac{b_0 + b_1 + \dots + b_r}{a_0 + a_1 + \dots + a_n}. \quad (3)$$

Sistemele liniare discrete cu variabile de tip original pot fi descrise și cu ajutorul *modelului de convoluție*

$$y(t) = \sum_{i=0}^t g(t-i)u(i), \quad (4)$$

unde funcția pondere  $g(t)$ , egală cu răspunsul sistemului la intrare impuls unitar, conține toate caracteristicile dinamice ale sistemului. Răspunsul forțat al sistemului la o intrare dată  $u(t)$  de tip original depinde de toate valorile semnalului de intrare  $u(t)$  și ale funcției pondere  $g(t)$  pe intervalul  $[0, t]$ , adică la momentele de timp  $0, 1, \dots, t$ . În acest mod, valoarea curentă a ieșirii  $y(t)$  cumulează efectele produse de semnalul de intrare  $u$  la momentele de timp anterioare.

Modelul de convoluție are o mare relevanță teoretică, deoarece forma sa simplă sugerează posibilitatea găsirii unui model dinamic având forma și mai simplă, prin înlocuirea produsului de convoluție cu unul algebric. Acest lucru este realizabil cu ajutorul transformării  $\mathcal{Z}$ , care permite transformarea modelului de convoluție (4) în varianta algebrică

$$Y(z) = G(z) \cdot U(z), \quad (5)$$

unde  $z$  este o variabilă complexă, iar  $Y(z)$ ,  $G(z)$  și  $U(z)$  sunt respectiv transformatele complexe  $\mathcal{Z}$  ale funcțiilor de timp  $y(t)$ ,  $g(t)$  și  $u(t)$ .

*Modelul operațional* (5) este un model abstract (în domeniul complex), care exprimă însă într-o formă algebrică simplă, faptul că ieșirea complexă  $Y(z)$  este produsul dintre funcția complexă  $G(z)$  asociată caracteristicilor dinamice ale sistemului și intrarea complexă  $U(z)$ .

Determinarea modelului operațional al unui sistem liniar compus din modelele operaționale ale subsistemelor componente este o operație mult mai simplă decât cea de obținere a ecuației cu diferențe din ecuațiile cu diferențe ale subsistemelor interconectate.

## 6.1. TRANSFORMAREA Z

O funcție de variabilă discretă  $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}$  sau de variabilă continuă  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  este  $\mathbf{Z}$ -transformabilă dacă satisface proprietățile:

- este de tip original, adică  $f(t)=0$  pentru  $t < 0$ ;
- are un ritm de creștere cel mult exponențial, adică  $\lim_{t \rightarrow \infty} |f(t)|^{1/t} < \infty$ .

La sistemele liniare discrete, prima proprietate este satisfăcută în virtutea convenției de a considera că regimul este staționar pentru  $t < 0$ , iar variabilele sistemice sunt variațiile mărimilor respective față de valorile lor inițiale. Referitor la proprietatea b), aceasta este satisfăcută de funcția exponențială  $f(t)=e^{at}$  pentru orice  $a$  real.

*Transformata Z* a funcției  $f(t)$  cu perioada (pasul) de discretizare  $T$  este notată și definită astfel:

$$F(z) = \mathbf{Z}[f(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k}, \quad (6)$$

unde  $z$  este o variabilă complexă cu modulul suficient de mare pentru a asigura convergența seriei.

Pe baza definiției, putem determina ușor că *funcția impuls unitar*

$$\delta^0(t) = \begin{cases} 0, & t \in \mathbf{Z} \setminus \{0\} \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$

are transformata

$$\mathbf{Z}[\delta^0(t)] = 1, \quad (7)$$

iar *funcția treaptă unitară*

$$1^0(t) = \begin{cases} 0, & t = -1, -2, \dots \\ 1, & t = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

are transformata

$$\mathbf{Z}[1^0(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} z^{-k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-z^{-n}}{1-z^{-1}} = \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad |z| > 1. \quad (8)$$

Dintre *proprietățile transformării Z*, menționăm:

- *proprietatea de liniaritate*

$$\mathcal{Z}[k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)] = k_1 \mathcal{Z}[f_1(t)] + k_2 \mathcal{Z}[f_2(t)], \quad k_1, k_2 \in \mathbf{R}; \quad (9)$$

- *proprietatea deplasării argumentului real*

$$\mathcal{Z}[f(t - kT)] = z^{-k} \mathcal{Z}[f(t)], \quad k \in \mathbf{Z}; \quad (10)$$

- *proprietatea multiplicării argumentului complex*

$$\mathcal{Z}[\rho^{-t/T} f(t)] = F(\rho z); \quad (11)$$

- *proprietatea derivării în complex*

$$\mathcal{Z}\left[\frac{t}{T} f(t)\right] = -z F'(z); \quad (12)$$

- *proprietatea valorii finale<sup>1</sup>*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) F(z), \quad (13)$$

valabilă atunci când produsul  $(1 - z^{-1})F(z)$  are toți polii cu modulul subunitar;

- *proprietatea valorii inițiale*

$$f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z), \quad (14)$$

valabilă atunci când limita din dreapta semnelui egal există și este finită;

- *proprietatea produsului de convoluție<sup>2</sup>*

$$\mathcal{Z}\left[\sum_{i=0}^t g(t-i)u(i)\right] = G(z)U(z), \quad T=1. \quad (15)$$

<sup>1</sup>  $(1 - z^{-1})F(z) = \mathcal{Z}[f(t)] - \mathcal{Z}[f(t-1)] = \sum_{k=0}^{\infty} (f_k - f_{k-1})z^{-k}$   
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (f_k - f_{k-1})z^{-k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f_k(z^{-k} - z^{-k-1}) + f_n z^{-n},$

$\lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})F(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \sum_{k=0}^{n-1} f_k(z^{-k} - z^{-k-1}) + f_n z^{-n} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n.$

<sup>2</sup>  $\mathcal{Z}\left[\sum_{i=0}^t g(t-i)u(i)\right] = \mathcal{Z}\left[\sum_{i=0}^{\infty} g(t-i)u(i)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \sum_{i=0}^{\infty} g(k-i)u(i) \right] z^{-k} = \sum_{i=0}^{\infty} u(i) \sum_{k=0}^{\infty} g(k-i)z^{-k}$   
 $= \sum_{i=0}^{\infty} u(i)z^{-i} \sum_{k=0}^{\infty} g(k-i)z^{-(k-i)} = \left[ \sum_{i=0}^{\infty} u(i)z^{-i} \right] \left[ \sum_{j=0}^{\infty} g(j)z^{-j} \right] = U(z)G(z).$

În cazul în care pasul de discretizare  $T$  are valoarea  $T=1$ , relațiile (10), (11) și (12) au forma

$$\mathcal{Z}[f(t-j)] = z^{-j} \mathcal{Z}[f(t)], \quad \mathcal{Z}[\rho^{-t} f(t)] = F(\rho z), \quad \mathcal{Z}[t f(t)] = -z F'(z),$$

În unele cazuri, pentru sugestivitate, transformata  $\mathcal{Z}$  a funcției de timp continuu  $f(t)$  cu transformata Laplace  $F(s)$  este notată  $\mathcal{Z}[F(s)]$ , adică

$$\mathcal{Z}[F(s)] = \mathcal{Z}[f(t)]. \quad (16)$$

Cu aceste notații, relația (10) care exprimă proprietatea deplasării argumentului real capătă forma

$$\mathcal{Z}[e^{-kTs} F(s)] = z^{-k} \mathcal{Z}[F(s)].$$

Transformata  $\mathcal{Z}$  a unei funcții analitice de timp poate fi calculată *direct*, cu relația de definiție (6). În plus, transformata  $\mathcal{Z}$  a unei funcții de timp continuu  $f(t)$  poate fi determinată și *indirect*, din transformata Laplace  $F(s)$  a funcției  $f(t)$ .

**Metoda directă** de calcul a transformatei  $\mathcal{Z}$  a fost deja utilizată în cazul funcțiilor impuls unitar și treaptă unitară – relațiile (7) și (8). În continuare, vom calcula transformatele  $\mathcal{Z}$  ale funcțiilor

$$f_1(t) = \frac{t}{T} \cdot 1^0(t), \quad f_2(t) = \rho^{t/T} \cdot 1^0(t),$$

unde  $\rho$  este o constantă reală sau complexă. Astfel pentru  $|z| > 1$ , avem

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[f_1(t)] &= 0 + z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \dots \\ &= (z^{-1} + z^{-2} + \dots)(1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots) = z^{-1}(1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots)^2 = \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}, \end{aligned}$$

iar pentru  $|z| > |\rho|$ , avem

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[f_2(t)] &= 1 + \rho z^{-1} + \rho^2 z^{-2} + \rho^3 z^{-3} + \dots = 1 + \frac{\rho}{z} + \left(\frac{\rho}{z}\right)^2 + \left(\frac{\rho}{z}\right)^3 + \dots \\ &= \frac{1}{1 - \frac{\rho}{z}} = \frac{1}{1 - \rho z^{-1}} \end{aligned}$$

Pe baza proprietății derivării în complex, din ultima relație obținem

$$\mathcal{Z}\left[\frac{t}{T}\rho^{t/T}\right] = \frac{\rho z^{-1}}{(1-\rho z^{-1})^2}.$$

Așadar,

$$\mathcal{Z}[\delta^0(t)] = 1, \quad \mathcal{Z}[1^0(t)] = \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad \mathcal{Z}\left[\frac{t}{T}\cdot 1^0(t)\right] = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}, \quad (17)$$

$$\mathcal{Z}\left[\rho^{\frac{t}{T}}\cdot 1^0(t)\right] = \frac{1}{1-\rho z^{-1}}, \quad \mathcal{Z}\left[\frac{t}{T}\rho^{\frac{t}{T}}\cdot 1^0(t)\right] = \frac{\rho z^{-1}}{(1-\rho z^{-1})^2}. \quad (18)$$

Relațiile (18) sunt valide și în cazul în care  $\rho$  este o constantă complexă.

**Metoda indirectă** de calcul al transformatei  $\mathcal{Z}$  cu perioada  $T$  a funcției de timp continuu  $f(t)$  cu transformata Laplace strict proprie  $F(s)$  se efectuează cu *formula*<sup>3</sup>

$$F(z) = \mathcal{Z}[F(s)] = \sum_{s_i} \operatorname{rez} z \frac{F(s)}{1 - e^{Ts} z^{-1}}, \quad (19)$$

unde  $s_1, s_2, \dots, s_n$  sunt polii funcției  $F(s)$ . Într-adevăr, ținând seama de formula transformatei inverse Laplace,

$$f(kT) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{kTs} ds,$$

avem

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k} = \frac{1}{2\pi j} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{kTs} z^{-k} ds \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) \left[ \sum_{k=0}^{\infty} (e^{Ts} z^{-1})^k \right] ds \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{F(s)}{1 - e^{Ts} z^{-1}} ds = \sum_{s_i} \operatorname{rez} z \frac{F(s)}{1 - e^{Ts} z^{-1}}. \end{aligned}$$

<sup>3</sup> Reziuul funcției  $F(s)$  relativ la polul  $p$  cu ordinul de multiplicitate  $m$ , este dat de relația

$$\operatorname{rez}_p F(s) = \frac{1}{(m-1)!} [(s-p)^m F(s)]^{(m-1)} \Big|_{s=p}.$$

Pentru  $m=1$ , avem

$$\operatorname{rez}_p F(s) = (s-p)F(s) \Big|_{s=p}$$

În relația (19), transformata  $F(z)$  și transformata Laplace  $F(s)$  sunt funcții diferite, atât ca semnificație, cât și ca expresie. Dacă  $s_i$  este pol al funcției  $F(s)$ , atunci

$$z_i = e^{Ts_i}$$

este pol al funcției  $F(z)$ . Prin urmare, dacă  $F(s)$  are un pol în origine, atunci  $F(z)$  are un pol egal cu 1.

Să aplicăm acum relația (19) pentru a determina transformata  $Z$  cu pasul  $T$  a funcției  $f(t) = e^{\alpha t} \sin \omega t$ , care are transformata Laplace  $F(s) = \frac{\omega}{(s-\alpha)^2 + \omega^2}$ .

Avem

$$\begin{aligned} F(z) = Z[F(s)] &= rez \frac{F(s)}{1 - e^{Ts} z^{-1}} \Big|_{s=\alpha+j\omega} + rez \frac{F(s)}{1 - e^{Ts} z^{-1}} \Big|_{s=\alpha-j\omega} \\ &= \frac{\omega}{s-\alpha+j\omega} \cdot \frac{1}{1 - e^{Ts} z^{-1}} \Big|_{s=\alpha+j\omega} + \frac{\omega}{s-\alpha-j\omega} \cdot \frac{1}{1 - e^{Ts} z^{-1}} \Big|_{s=\alpha-j\omega} \\ &= \frac{1}{2j} \left[ \frac{1}{1 - e^{(\alpha+j\omega)T} z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{(\alpha-j\omega)T} z^{-1}} \right]. \end{aligned}$$

Mai departe, cu substituția  $e^{\alpha T} = \rho$ , echivalentă cu  $e^{\alpha t} = \rho^{\frac{t}{T}}$ , rezultă

$$Z[\rho^{\frac{t}{T}} \sin \omega t] = \frac{bz^{-1}}{1 - 2az^{-1} + \rho^2 z^{-2}}, \quad (20)$$

unde

$$a = \rho \cos \omega T, \quad b = \rho \sin \omega T.$$

Procedând similar, obținem

$$Z[\rho^{\frac{t}{T}} \cos \omega t] = \frac{1 - az^{-1}}{1 - 2az^{-1} + \rho^2 z^{-2}}. \quad (21)$$

Pentru  $\rho=1$ , rezultă

$$Z[\sin \omega t] = \frac{(\sin \omega T)z^{-1}}{1 - 2(\cos \omega T)z^{-1} + z^{-2}}, \quad (22)$$

$$Z[\cos \omega t] = \frac{1 - (\cos \omega T)z^{-1}}{1 - 2(\cos \omega T)z^{-1} + z^{-2}}. \quad (23)$$



Dacă, în plus,  $\omega T = \pi/3$ , avem

$$\mathcal{Z}\left[\sin\frac{\pi t}{3T}\right] = \frac{\sqrt{3}z^{-1}}{2(1-z^{-1}+z^{-2})}, \quad (22')$$

$$\mathcal{Z}\left[\cos\frac{\pi t}{3T}\right] = \frac{2-z^{-1}}{2(1-z^{-1}+z^{-2})}. \quad (23')$$

Relațiile (20) și (21) pot fi obținute pe o cale mai simplă observând că

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[\rho^{\frac{t}{T}} \cos \omega t + j\rho^{\frac{t}{T}} \sin \omega t] &= \mathcal{Z}[(\rho e^{j\omega T})^{\frac{t}{T}}] = \frac{1}{1 - \rho e^{j\omega T} z^{-1}} \\ &= \frac{1}{1 - (a + jb)z^{-1}} = \frac{1 - az^{-1} + jbz^{-1}}{(1 - az^{-1})^2 + b^2 z^{-2}} = \frac{1 - az^{-1} + jbz^{-1}}{1 - 2az^{-1} + \rho^2 z^{-2}}. \end{aligned}$$

Fiind dată transformata  $\mathcal{Z}$  directă  $F(z)$ , prin transformarea inversă  $\mathcal{Z}^{-1}$  se obține funcția discretă  $f(t)$  la momentele de timp  $t_k = kT$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Transformarea inversă se poate realiza prin metoda dezvoltării în fracții simple, prin metoda formulei de inversiune sau prin metoda seriilor de puteri.

**Metoda dezvoltării în fracții simple** este similară celei de la transformarea Laplace. Utilizând notația  $k = t/T$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , transformatele  $\mathcal{Z}$  inverse ale principalelor fracții simple sunt următoarele:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{1-z^{-1}}\right] &= 1, \quad \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}\right] = \frac{t}{T} = k, \\ \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{1-\rho z^{-1}}\right] &= \rho^{\frac{t}{T}} = \rho^k, \quad \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{\rho z^{-1}}{(1-\rho z^{-1})^2}\right] = \frac{t}{T} \rho^{\frac{t}{T}} = k \rho^k, \\ \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1-az^{-1}}{1-2az^{-1}+\rho^2 z^{-2}}\right] &= \rho^{\frac{t}{T}} \cos \omega t = \rho^k \cos k\omega T, \\ \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{bz^{-1}}{1-2az^{-1}+\rho^2 z^{-2}}\right] &= \rho^{\frac{t}{T}} \sin \omega t = \rho^k \sin k\omega T, \end{aligned}$$

unde, în ultimele două relații,  $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $\operatorname{tg} \omega T = \frac{b}{a}$ .

**Metoda formulei de inversiune** are la bază relația

$$f(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} z^{k-1} F(z) dz,$$

unde  $\gamma$  este un cerc ce conține toți polii funcției  $z^{k-1}F(z)$ . Pentru determinarea valorii  $f(kT)$  se utilizează *relația practică*

$$f(kT) = \sum_{z_i} \operatorname{rez} z^{k-1} F(z), \quad (24)$$

unde  $z_i$  sunt polii funcției  $z^{k-1}F(z)$ .

De exemplu, în cazul transformatorilor

$$F_1(z) = \frac{z^{-1}}{(1-az^{-1})(1-bz^{-1})}, \quad F_2(z) = \frac{z^{-m}}{(1-az^{-1})(1-bz^{-1})},$$

pentru  $a \neq b$  rezultă:

$$f_1(kT) = \operatorname{rez}_{z=a} \frac{z^k}{(z-a)(z-b)} + \operatorname{rez}_{z=b} \frac{z^k}{(z-a)(z-b)} = \frac{a^k}{a-b} + \frac{b^k}{b-a} = \frac{a^k - b^k}{a-b},$$

$$f_2(kT) = \operatorname{rez}_{z=a} \frac{z^{k-m+1}}{(z-a)(z-b)} + \operatorname{rez}_{z=b} \frac{z^{k-m+1}}{(z-a)(z-b)} = \frac{a^{k-m+1} - b^{k-m+1}}{a-b}.$$

**Metoda seriilor de puteri** constă în aducerea funcției  $F(z)$  la forma

$$F(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_r z^{-r}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}}$$

și efectuarea împărțirii, în vederea dezvoltării lui  $F(z)$  în serie de puteri negative, adică

$$F(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots$$

În conformitate cu relația (6) de definire a transformatei  $Z$ , rezultă  $f(kT) = c_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

## 6.2. FUNCȚIA DE TRANSFER

Prin definiție, *funcția de transfer*  $G(z)$  a unui sistem liniar discret monovariabil este transformata  $Z$  a funcției pondere  $g(t)$  a sistemului.

Dacă la intrarea unui sistem liniar discret cu perioada de discretizare  $T=1$  și funcția pondere  $g(t)$  se aplică un semnal arbitrar de tip original  $u(t)$ , răspunsul sistemului este dat de relația de convoluție

$$y(t) = u(0)g(t) + u(1)g(t-1) + \dots + u(t)g(0) = \sum_{i=0}^t g(t-i)u(i). \quad (25)$$

Aplicând transformarea  $\mathcal{Z}$  relației de convoluție și ținând seama de proprietatea produsului de convoluție (15), se obține *modelul operațional* intrare-ieșire

$$Y(z)=G(z)U(z), \quad (26)$$

unde  $U(z)$  este transformata  $\mathcal{Z}$  a funcției de intrare  $u(t)$ , iar  $Y(z)$  este transformata  $\mathcal{Z}$  a funcției de ieșire  $y(t)$ . Modelul operațional dinamic al unui sistem liniar discret are o formă simplă, similară modelului staționar, dar este un model abstract, deoarece operează cu transformatele  $\mathcal{Z}$  complexe ale mărimilor respective. Scriind modelul operațional sub forma

$$G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)},$$

rezultă

**Teorema funcției de transfer.** *Funcția de transfer a unui sistem liniar discret monovariabil este egală cu raportul dintre transformata  $\mathcal{Z}$  a răspunsului sistemului la o funcție de intrare de tip original și transformata  $\mathcal{Z}$  a funcției de intrare.*

In cazul *sistemului discret liniar de tip I-E* cu modelul

$$a_0y(t)+a_1y(t-1)+\dots+a_ny(t-n)=b_0u(t)+b_1u(t-1)+\dots+b_ru(t-r), \quad a_0 \neq 0, \quad (27)$$

aplicând transformarea  $\mathcal{Z}$  ambilor membri ai ecuației cu diferențe și utilizând proprietatea de liniaritate și proprietatea deplasării argumentului real, obținem funcția de transfer

$$G(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\dots+b_rz^{-r}}{a_0+a_1z^{-1}+\dots+a_nz^{-n}}. \quad (28)$$

Pentru  $b_0 \neq 0$ , sistemul este simplu propriu, iar pentru  $b_0=0$  este strict propriu.

Pentru  $z=1$ , funcția de transfer este egală cu factorul static de proporționalitate al sistemului:

$$G(1)=\frac{b_0+b_1+\dots+b_n}{a_0+a_1+\dots+a_n}=K. \quad (29)$$

La sistemele de tip proporțional, factorul static de proporționalitate  $K$  este finit și nenul. Prin urmare, un sistem este de tip proporțional atunci când

$$a_0 + a_1 + \dots + a_n \neq 0, \quad b_0 + b_1 + \dots + b_n \neq 0.$$

La sistemele de tip integral (sau integrator), factorul static de proporționalitate  $K$  este infinit. Prin urmare, un sistem este de tip integral atunci când

$$a_0 + a_1 + \dots + a_n = 0, \quad b_0 + b_1 + \dots + b_n \neq 0,$$

adică atunci când funcția de transfer  $G(z)$  are polul  $z=1$ . Regulatorul de tip PI (proporțional-integral) are ecuația cu diferențe

$$y(t) - y(t-T) = K_R \left[ u(t) - u(t-T) + \frac{T}{T_i} u(t) \right]$$

și funcția de transfer

$$G(z) = \frac{K_R(1 - z^{-1} + T/T_i)}{1 - z^{-1}} = K_R \left( 1 + \frac{T}{T_i} \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}} \right),$$

unde  $K_R$  este factorul de proporționalitate, iar  $T_i$  constanta de timp integrală.

La sistemele de tip derivativ (sau derivator), factorul static de proporționalitate  $K$  este egal cu zero. Prin urmare, un sistem este de tip derivativ atunci când

$$a_0 + a_1 + \dots + a_n \neq 0, \quad b_0 + b_1 + \dots + b_n = 0,$$

adică atunci când funcția de transfer  $G(z)$  are zeroul  $z=1$ . Sistemul pur derivativ cu ecuația în domeniul timpului

$$y(t) - p y(t-T) = K_d [u(t) - u(t-T)], \quad p \neq 1$$

are funcția de transfer

$$G(z) = \frac{K_d(1 - z^{-1})}{1 - pz^{-1}}.$$

În cazul sistemului discret de tip I-S-E cu modelul

$$X(t+1) = AX(t) + BU(t), \quad Y(t) = CX(t) + DU(t),$$

aplicând transformarea Z ambelor ecuații și utilizând proprietatea de liniaritate și proprietatea deplasării argumentului real, obținem matricea de transfer

$$\mathbf{G}(z) = C(zI - A)^{-1}B + D. \quad (30)$$

Pe canalul intrare-stare, sistemul are matricea de transfer

$$G_X(z) = (zI - A)^{-1}B. \quad (31)$$

**Observații. 1°.** Deoarece modelele operaționale ale sistemelor liniare continue și discrete au aceeași formă, regulile și formulele de calcul pentru funcțiile de transfer ale sistemelor discrete compuse (serie, paralel, cu reacție, mixte) sunt similare celor de la sistemele continue. Astfel, funcția de transfer a unei conexiuni serie este egală cu produsul funcțiilor de transfer ale subsistemelor componente, funcția de transfer a unei conexiuni paralel este egală cu suma algebrică a funcțiilor de transfer ale subsistemelor componente, iar funcția de transfer a unei conexiuni cu reacție negativă, cu subsistemul  $\Sigma_1$  pe calea directă și subsistemul  $\Sigma_2$  pe calea de reacție, are expresia

$$G(z) = \frac{G_1(z)}{1 + G_1(z)G_2(z)}.$$

Formulele de calcul al funcțiilor de transfer ale unui sistem liniar discret de reglare după abatere cu structura celui din fig. 5.4 respectă regula de la sistemele continue:

- *numărătorul* este produsul funcțiilor de transfer ale elementelor de pe traseul direct intrare-ieșire;

- *numitorul* este același, egal cu suma  $1 + G_d(z)$ , unde

$$G_d(z) = G_R(z)G_E(z)G_P(z)G_T(z) \quad (32)$$

reprezintă funcția de transfer a sistemului *deschis*.

**2°.** Din ecuația operațională intrare-ieșire  $Y(z) = G(z)U(z)$ , rezultă că transformata  $\mathcal{Z}$  a *răspunsului indicial*  $h(t)$  al sistemului (pentru intrare treaptă unitară) are expresia

$$H(z) = \frac{G(z)}{1 - z^{-1}}, \quad (33)$$

iar din relația  $G(z) = H(z) - z^{-1}H(z)$ , regăsim ecuația de corelație între funcția indicială  $h(t)$  și funcția pondere  $g(t)$ , anume

$$g(t) = h(t) - h(t - T). \quad (34)$$

**3°.** În cadrul observației **2°** de la paragraful 3.2, am arătat că dacă  $b_0 = b_1 = \dots = b_{i-1} = 0$ , atunci răspunsul indicial  $h(t)$  și răspunsul pondere  $g(t)$

satisfac  $i$  condiții inițiale nule. În consecință, dacă funcția de transfer (28) are forma

$$G(z) = \frac{z^{-i}(b_1 + b_{i+1}z^{-1} + \dots + b_r z^{-r+i})}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}, \quad (35)$$

atunci

$$h(0) = h(1) = \dots = h(i-1) = 0, \quad g(0) = g(1) = \dots = g(i-1) = 0.$$

În plus, avem

$$h(\infty) = g(\infty) = \frac{b_0}{a_0} = G(\infty). \quad (36)$$

La sistemele strict proprii (cu  $b_0=0$ ), avem  $h(0)=0$ , deci răspunsul indicial este strict întârziat în raport cu intrarea. La sistemele simplu proprii (cu  $b_0 \neq 0$ ), avem  $h(0) \neq 0$ , deci răspunsul sistemului are o componentă care urmărește fără întârziere (instantaneu) variația în timp a mărimii de intrare.

Din proprietatea valorii finale rezultă că răspunsul indicial are valoarea finală

$$h(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})H(z) = \lim_{z \rightarrow 1} G(z) = G(1). \quad (37)$$

deci

$$h(\infty) = \frac{b_0 + b_1 + \dots + b_r}{a_0 + a_1 + \dots + a_n} = K. \quad (38)$$

Acest rezultat, valabil numai în cazul unui sistem cu răspuns indicial convergent, este în concordanță cu ecuația  $y=Ku$  ce caracterizează starea de regim staționar a sistemului. Într-adevăr, dacă răspunsul indicial este convergent, atunci putem evidenția două regimuri staționare, unul trivial pentru  $t < 0$ , celălalt pentru  $t \rightarrow \infty$ ; în ultimul caz,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = K \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = K.$$

**4°.** Ecuația operațională intrare-ieșire  $Y(z)=G(z)U(z)$  confirmă imediat *teorema de echivalență intrare-ieșire*, conform căreia două sisteme liniare monovariabile sunt echivalente intrare-ieșire (adică au răspunsuri identice la orice intrare original comună) dacă și numai dacă au funcțiile de transfer egale (reductibile la forme identice).

De asemenea, modelul operațional  $Y(z)=G(z)U(z)$  permite confirmarea imediată a *teoremei de minimalitate*, conform căreia un sistem liniar

monovariabil este minimal (nu există un alt sistem echivalent intrare-ieșire de ordin mai mic) dacă și numai dacă forma primară a funcției de transfer este ireductibilă (are polinoamele de la numărător și numitor coprime, adică fără rădăcini comune). Aducerea unui sistem neminimal la forma minimală se face prin simplificarea funcției de transfer.

5°. În conformitate cu proprietatea deplasării argumentului real (11), dacă sistemului cu funcția de transfer  $G(z)$  i se adaugă timpul mort  $\tau = kT$ , sistemul cu timp mort obținut are funcția de transfer

$$G_m(z) = z^{-k}G(z). \quad (39)$$

### 6.3. CALCULUL RĂSPUNSULUI ÎN TIMP

Metoda operațională  $\mathcal{Z}$  permite calculul răspunsului forțat al unui sistem liniar discret, simplu sau compus, pentru o funcție de intrare tip original dată, atunci când se cunosc ecuațiile cu diferențe ale subsistemelor interconectate. În cazul funcțiilor de intrare de tip analitic, calculul răspunsului unui sistem compus se face după o metodologie similară celei de la sistemele continue. Deoarece modelul operațional dinamic  $Y(z)=G(z)U(z)$  al unui sistem liniar discret are aceeași formă cu modelul operațional dinamic  $Y(s)=G(s)U(s)$  al unui sistem liniar continuu, formulele de calcul ale funcțiilor de transfer ale sistemelor compuse (tip serie, paralel, cu reacție etc.) sunt identice cu cele de la sistemele continue.

Metodologia de calcul al răspunsului  $y(t)$  la o intrare discretă dată  $u(t)$  este următoarea:

- se determină funcțiile de transfer  $G_i(z)$  ale subsistemelor interconectate;
- se calculează funcția de transfer  $G(z)$  a sistemului compus cu intrarea  $U(z)$  și ieșirea  $Y(z)$ ;
- se determină transformata  $U(z)$  a mărimii de intrare date  $u(t)$ ;
- se calculează transformata  $\mathcal{Z}$  a răspunsului  $y(t)$  al sistemului, cu relația

$$Y(z)=G(z)U(z);$$

- se calculează răspunsul sistemului  $y(t)=\mathcal{Z}^{-1}[Y(z)]$ , de obicei prin metoda descompunerii lui  $Y(z)$  în fracții simple.

**Observație.** Considerăm un sistem discret cu  $T=1$ , funcția de transfer  $G(z)$  și polinomul polilor

$$P(z)=(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_n).$$

În conformitate cu (33), dacă  $r \leq n$  și toți polii sistemului (reali sau complexi) sunt distincți, atunci transformata  $\mathcal{Z}$  a răspunsului indicial are forma descompusă

$$H(z)=\frac{a}{1-z^{-1}}+\frac{a_1}{1-p_1z^{-1}}+\frac{a_2}{1-p_2z^{-1}}+\cdots+\frac{a_n}{1-p_nz^{-1}}.$$

Din expresia răspunsului indicial

$$h(t)=a+a_1p_1^t+a_2p_2^t+\cdots+a_np_n^t, \quad t \geq 0,$$

reiese că acesta este mărginit dacă și numai dacă toți polii sistemului (distincți) au modulul mai mic sau egal cu 1 (*teorema de mărginire a răspunsului indicial*).

#### 6.4. DISCRETIZATUL UNUI SISTEM CONTINUU

Reamintim că un semnal de timp continuu și un semnal de timp discret cu perioada  $T$  sunt  $T$ -echivalente atunci când cele două semnale au aceleași valori la momentele de timp  $t_k = kT$ . Dacă, în plus, semnalul continuu este de tip  $T$ -scară (constant pe fiecare interval de timp  $T$ ), cele două semnale sunt  $T$ -echivalente de ordinul zero. Sistemul discret  $\Sigma^0$  este discretizatului  $I-E$  sau echivalentul discret  $I-E$  cu perioada  $T$  al sistemului continuu  $\Sigma$  dacă ieșirile celor două sisteme sunt  $T$ -echivalente pentru orice intrări de tip original  $T$ -echivalente de ordinul zero.

Deoarece semnalul continuu tip treaptă unitară  $1(t)$  și semnalul discret tip treaptă unitară  $1^0(t)$  sunt  $T$ -echivalente de ordinul zero (semnalul continuu  $1(t)$  fiind de tip  $T$ -scară), răspunsul indicial  $h(t)$  al sistemului continuu  $\Sigma$  și răspunsul indicial  $h^0(t)$  al discretizatului acestuia  $\Sigma^0$  sunt  $T$ -echivalente. Semnalele de tip rampă  $t \cdot 1(t)$  și  $t \cdot 1^0(t)$  sunt  $T$ -echivalente, dar nu sunt  $T$ -echivalente de ordinul zero. Prin urmare, răspunsurile la aceste semnale de intrare ale sistemelor  $\Sigma$  și  $\Sigma^0$  nu sunt  $T$ -echivalente. În general, valorile la momentele  $t_k = kT$  ale răspunsurilor sistemului continuu  $\Sigma$  și discretizatului



$\Sigma^0$  la semnale  $T$ -echivalente sunt cu atât mai apropiate cu cât perioada  $T$  de discretizare a timpului este mai mică. Pe de altă parte, perioada  $T$  nu trebuie aleasă nici foarte mică în raport cu timpul de stabilizare a răspunsului indicial, din cauza creșterii considerabile a volumului de calcul și a erorilor cumulate în urma operațiilor de trunchiere și rotunjire.

Discretizatul  $\Sigma^0$  al unui sistem continuu  $\Sigma$  se obține formal prin conectarea unui convertor numeric-analogic  $C_{N-A}$  la intrarea sistemului continuu și a unui convertor analog-numeric  $C_{A-N}$  la ieșirea acestuia (fig. 6.1). Convertorul numeric-analogic  $C_{N-A}$  transformă, prin extrapolare de ordinul zero, semnalul de timp discret (numeric)  $u^0$  în semnalul de timp continuu (analogic) tip  $T$ -scară  $u$ , iar convertorul analog-numeric  $C_{A-N}$  transformă semnalul de timp continuu (analogic)  $y$  în semnalul de timp discret (numeric)  $y^0$ , cu perioada  $T$ .

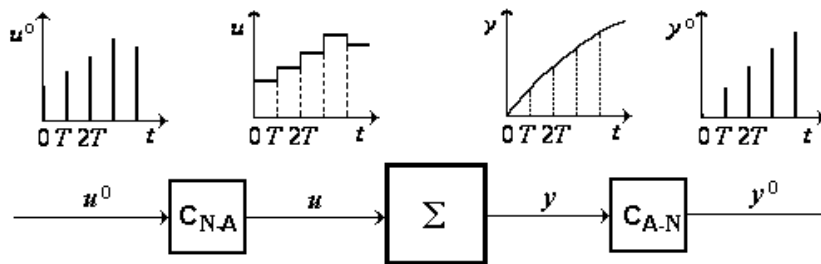


Fig. 6.1. Schema discretizatăului  $\Sigma^0$  al sistemului continuu  $\Sigma$ .

Eșantionarea cu perioada  $T$  este operația de conversie a unui semnal fizic analogic într-un semnal discret (numeric). Teoretic, operația de eșantionare este realizată fără pierdere de informație de către convertorul analog-numeric  $C_{A-N}$  numai dacă frecvența de eșantionare  $f_s=1/T$  este mai mare decât dublul frecvenței maxime  $f_M$  a semnalului analogic de eșantionat (teorema de eșantionare a lui Shannon). Un exemplu de nerespectare (la limită) a teoremei lui Shannon îl constituie eșantionarea cu frecvența  $f_s=1/T$  a semnalului analogic sinusoidal

$$y=A+B\sin \pi t/T,$$

caracterizat prin frecvența maximă

$$f_{\max}=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{\pi/T}{2\pi}=\frac{1}{2T}=\frac{f_s}{2}.$$

Prin eșantionare, se obține un semnal discret periodic cu două valori distincte, din care nu se poate reconstitui semnalul sinusoidal continuu. În aplicațiile practice, frecvența de eșantionare se alege de cel puțin  $5 \cdot 10$  ori mai mare decât frecvența maximă  $f_{\max}$  a semnalului analogic de eșantionat. În plus, pentru ca semnalul analogic eșantionat să nu fie afectat de perturbațiile cu frecvența mai mare decât  $f_{\max}$ , în fața convertorului analog-numeric trebuie amplasat un *filtru trece-jos* care să blocheze semnalele perturbatoare cu frecvența ridicată.

În continuare, vom demonstra că funcția de transfer  $G^o(z)$  a discretizatului de tip I-E cu perioada  $T$  al sistemului continuu cu funcția de transfer  $G(s)$  este dată de relația

$$G^o(z) = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right], \quad (40)$$

unde, în conformitate cu (19),

$$\mathcal{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right] = \sum_{s_i} \operatorname{rez}_{s_i} \frac{G(s)}{s(1-e^{Ts}z^{-1})}, \quad (41)$$

$s_i$  fiind polii funcției  $G(s)/s$ . În acest scop, vom ține seama de faptul că funcțiile indiciale  $h^o(t)$  și  $h(t)$  ale celor două sisteme sunt  $T$ -echivalente, deci au aceeași transformată  $\mathcal{Z}$ :

$$\mathcal{Z}[h^o(t)] = \mathcal{Z}[h(t)].$$

Ținând seama că

$$\mathcal{Z}[h^o(t)] = \frac{G^o(z)}{1-z^{-1}}, \quad \mathcal{Z}[h(t)] = \mathcal{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right],$$

rezultă

$$G^o(z) = (1-z^{-1}) \mathcal{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right] = (1-z^{-1}) \sum_{s_i} \operatorname{rez}_{s_i} \frac{G(s)}{s(1-e^{Ts}z^{-1})}.$$

Între funcțiile de transfer  $G^o(z)$  și  $G(s)$  ale discretizatului  $\Sigma^o$  și sistemului continuu  $\Sigma$  există următoarele corelații:

$$G^o(1) = G(0), \quad (42)$$

$$G^o(\infty) = G(\infty), \quad (43)$$

$$G(s_1) = \infty \Rightarrow G^o(e^{Ts_1}) = \infty. \quad (44)$$

Relația (42) exprimă egalitatea valorilor finale ale răspunsurilor indiciale  $h^0(t)$  și  $h(t)$ , deci egalitatea factorilor statici de proporționalitate ai sistemelor  $\Sigma^0$  și  $\Sigma$ , iar relația (43) exprimă egalitatea valorilor inițiale ale răspunsurilor indiciale  $h^0(t)$  și  $h(t)$ . Implicația (44) exprimă faptul că dacă  $s_1$  este un pol al sistemului continuu  $\Sigma$ , atunci  $z_1=e^{Ts_1}$  este pol al sistemului discret  $\Sigma^0$ . Acest lucru rezultă imediat din relațiile (40) și (41) prin care se determină funcția de transfer  $G^0(z)$  a discretizatului din funcția de transfer  $G(s)$  a sistemului continuu. Implicația (44) poate fi scrisă și sub forma

$$G(-1/T_1) = \infty \Rightarrow G^0(e^{-T/T_1}) = \infty.$$

Astfel, dacă funcția de transfer  $G(s)$  a sistemului continuu conține la numitor factorul  $T_1s+1$ , atunci funcția de transfer  $G^0(z)$  a discretizatului conține la numitor factorul  $1-pz^{-1}$ , unde  $p=e^{-T/T_1}$ .

Pe baza acestor trei proprietăți se poate obține direct funcția de transfer  $G^0(z)$  a discretizatului unui sistem continuu de ordinul unu cu funcția de transfer  $G(s)$ .

În continuare, pentru funcția de transfer  $G^0(z)$  a discretizatului  $\Sigma^0$  al sistemului continuu  $\Sigma$  cu funcția de transfer  $G(s)$  vom utiliza și notația  $(G(s))^0$ , adică  $(G(s))^0 = G^0(z)$ . Funcțiile de transfer în  $z$  ale discretizatorilor celor mai uzuale sisteme continue sunt următoarele:

$$\left(\frac{1}{Ts}\right)^0 = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} \quad \text{sau}^4 \quad \left(\frac{1}{Ts}\right)^0 = \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad (45)$$

$$\left(\frac{1}{T^2s^2}\right)^0 = \frac{z^{-1}+z^{-2}}{2(1-z^{-1})^2}, \quad (46)$$

$$\left(\frac{1}{T_1s+1}\right)^0 = \frac{(1-p)z^{-1}}{1-pz^{-1}}, \quad (47)$$

$$\left(\frac{\tau_1s+1}{T_1s+1}\right)^0 = \frac{\frac{\tau_1}{T_1} + (1-\frac{\tau_1}{T_1}-p)z^{-1}}{1-pz^{-1}}, \quad (48)$$

<sup>4</sup> În aplicațiile de reglare numerică, în locul ecuației regulatorului de tip integral  $c_k = c_{k-1} + \frac{T}{T_i} \varepsilon_{k-1}$

este preferată ecuația  $c_k = c_{k-1} + \frac{T}{T_i} \varepsilon_k$ , unde  $T_i$  este constanta de timp integrală.

$$\left(\frac{T_d s}{T_1 s + 1}\right)^{\circ} = \frac{T_d}{T_1} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 - p z^{-1}}, \quad (49)$$

$$\left[\frac{T_1 s}{(T_1 s + 1)^2}\right]^{\circ} = \frac{T}{T_1} \cdot \frac{p z^{-1}(1 - z^{-1})}{(1 - p z^{-1})^2}, \quad (50)$$

$$\left[\frac{1}{(T_1 s + 1)^2}\right]^{\circ} = \frac{(1 - p)z^{-1}}{1 - p z^{-1}} - \frac{T}{T_1} \cdot \frac{p z^{-1}(1 - z^{-1})}{(1 - p z^{-1})^2}, \quad (51)$$

unde  $p = e^{-T/T_1}$ . Relațiile (45), (47), (48) și (49) pot fi obținute ușor pe baza relațiilor (42), (43) și (44). Relația (51) rezultă din (47) și (50) ținând seama că

$$\frac{1}{(T_1 s + 1)^2} = \frac{1}{T_1 s + 1} - \frac{T_1 s}{(T_1 s + 1)^2}.$$

Pe baza funcțiilor de transfer (45), (47), (49) și a relațiilor

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_1 s (T_1 s + 1)} &= \frac{1}{T_1 s} - \frac{1}{T_1 s + 1}, \\ \frac{T_1 s + 1}{T_1 s} \cdot \frac{T_d s + 1}{T_1 s + 1} &= \left(1 + \frac{T_d - T_1}{T_1}\right) + \frac{1}{T_1 s} + \left(\frac{T_d}{T_1} - 1\right) \left(1 - \frac{T_1}{T_1}\right) \cdot \frac{T_1 s}{T_1 s + 1}, \\ \frac{\tau s + 1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} &= \frac{T_1 - \tau}{T_1 - T_2} \cdot \frac{1}{T_1 s + 1} + \frac{T_2 - \tau}{T_2 - T_1} \cdot \frac{1}{T_2 s + 1}, \\ \frac{\tau s}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} &= \frac{\tau}{T_2 - T_1} \left(\frac{1}{T_1 s + 1} - \frac{1}{T_2 s + 1}\right), \end{aligned}$$

rezultă

$$\left[\frac{1}{T_1 s (T_1 s + 1)}\right]^{\circ} = \frac{T}{T_1} \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{(1 - p)z^{-1}}{1 - p z^{-1}}, \quad (52)$$

$$\left[\frac{T_1 s + 1}{T_1 s} \cdot \frac{T_d s + 1}{T_1 s + 1}\right]^{\circ} = \left(1 + \frac{T_d - T_1}{T_1}\right) + \frac{T}{T_1} \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}} + \left(\frac{T_d}{T_1} - 1\right) \left(1 - \frac{T_1}{T_1}\right) \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 - p z^{-1}}, \quad (53)$$

$$\left[\frac{\tau s + 1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}\right]^{\circ} = \frac{T_1 - \tau}{T_1 - T_2} \cdot \frac{(1 - p)z^{-1}}{1 - p z^{-1}} + \frac{T_2 - \tau}{T_2 - T_1} \cdot \frac{(1 - q)z^{-1}}{1 - q z^{-1}}, \quad (54)$$

$$\left[\frac{\tau s}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}\right]^{\circ} = \frac{\tau z^{-1}}{T_2 - T_1} \left(\frac{1 - p}{1 - p z^{-1}} + \frac{1 - q}{1 - q z^{-1}}\right), \quad (55)$$

unde

$$p = e^{-T/T_1}, \quad q = e^{-T/T_2}.$$

De asemenea, cu ajutorul relației (40), obținem

$$\left( \frac{1}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1} \right)^0 = \frac{(1-b\beta-b\cos\alpha)z^{-1} + b(b+\beta-\cos\alpha)z^{-2}}{1-2(b\cos\alpha)z^{-1} + b^2z^{-2}}, \quad (56)$$

$$\left( \frac{\tau_1 s}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1} \right)^0 = \frac{b\gamma(z^{-1} - z^{-2})}{1-2(b\cos\alpha)z^{-1} + b^2z^{-2}}, \quad (57)$$

$$\left( \frac{\tau_1 s + 1}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1} \right)^0 = \frac{(1-b\delta-b\cos\alpha)z^{-1} + b(b+\delta-\cos\alpha)z^{-2}}{1-2(b\cos\alpha)z^{-1} + b^2z^{-2}}, \quad (58)$$

unde

$$b = e^{-\frac{\xi T}{\tau}}, \quad \alpha = \frac{T}{\tau} \sqrt{1-\xi^2}, \quad 0 \leq \xi < 1,$$

$$\beta = \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \alpha, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \frac{\tau_1}{\tau} \cdot \sin \alpha, \quad \delta = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \left( \xi - \frac{\tau_1}{\tau} \right) \cdot \sin \alpha.$$

**Observații. 1°.** Discretizarea unei conexiuni serie de două sisteme continue se poate realiza cu *aproximație* prin discretizarea fiecăruia din cele două sisteme continue. Astfel,

$$\left[ \frac{1}{(T_1 s + 1)^2} \right]^0 \approx \left( \frac{1}{T_1 s + 1} \right)^0 \left( \frac{1}{T_1 s + 1} \right)^0 = \frac{(1-p)z^{-1}}{1-pz^{-1}} \cdot \frac{(1-p)z^{-1}}{1-pz^{-1}} \approx \frac{(1-p)^2 z^{-1}}{(1-pz^{-1})^2}. \quad (59)$$

De asemenea, avem

$$\left[ \frac{T_d s}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \right]^0 \approx \left( \frac{T_d s}{T_1 s + 1} \right)^0 \left( \frac{1}{T_2 s + 1} \right)^0 = \frac{T_d}{T_1} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1-pz^{-1}} \cdot \frac{(1-q)z^{-1}}{1-qz^{-1}}. \quad (60)$$

**2°.** Așa cum s-a arătat în Cap. 3, o metodă de obținere a unui *discretizat aproximativ* al sistemului continuu descris de modelul primar

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_r u^{(r)} + b_{r-1} u^{(r-1)} + \dots + b_1 \dot{u} + b_0 u$$

constă în înlocuirea funcției de ieșire  $y(t)$  cu  $y_{k-1}$ , a funcției de intrare  $u(t)$  cu  $u_{k-1}$ , a derivatei  $\dot{y}(t)$  cu  $(y_k - y_{k-1})/T$ , a derivatei  $\dot{u}(t)$  cu  $(u_k - u_{k-1})/T$ , a derivatei  $\ddot{y}(t)$  cu  $(y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2})/T^2$  ș.a.m.d.

**3°.** Discretizatului regulatorului continuu cu funcția de transfer

$$G_{PID}(s) = K_R \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{T_i s + 1} \right), \quad (61)$$

unde  $T_i$  este constanta de timp de întârziere a componentei derivate, are funcția de transfer

$$G_{PID}(z) = K_R \left( 1 + K_i \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}} + K_d \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 - p_d z^{-1}} \right), \quad (62)$$

unde

$$K_i = \frac{T}{T_i}, \quad K_d = \frac{T_d}{T_i}, \quad p_d = e^{-T/T_1}. \quad (63)$$

Scriind funcția de transfer sub forma

$$G_{PID}(z) = K_R \left( \frac{1 - z^{-1} + K_i}{1 - z^{-1}} + K_d \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 - p_d z^{-1}} \right),$$

rezultă că regulatorul numeric PID cu intrarea  $\varepsilon$  și ieșirea  $c$  are următoarele ecuații în domeniul timpului:

$$\begin{cases} (PI)_k = (PI)_{k-1} + K_R [(\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}) + K_i \varepsilon_k] \\ D_k = p_d D_{k-1} + K_R K_d (\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}) \\ c_k = (PI)_k + D_k \end{cases} \quad (64)$$

La comutarea MANUAL-AUTOMAT, următoarele setări trebuie făcute pentru a avea o comutare fără șoc (fără variație bruscă a semnalului de comandă  $c$ ), indiferent de valoarea erorii:

$$(PI)_{k-1} = c_0, \quad D_{k-1} = 0, \quad \varepsilon_{k-1} = \varepsilon_0, \quad (65)$$

unde  $c_0$  și  $\varepsilon_0$  sunt respectiv valorile curente ale semnalului de comandă și ale erorii. Dacă se face setarea  $\varepsilon_{k-1} = 0$ , semnalul de comandă se modifică în momentul comutării ca în cazul modificării treaptă, cu magnitudinea  $\varepsilon_0$ , a mărimii de referință.

Funcția de transfer (62) poate fi adusă la forma

$$G_{PID}(z) = \frac{K_R (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}, \quad (66)$$

unde

$$a_1 = -1 - p_d, \quad a_2 = p_d,$$

$$b_0=1+K_i+K_d, \quad b_1=-1-(K_i+1)p-2K_d, \quad b_2=K_d+p_d. \quad (67)$$

Astfel, putem scrie ecuația cu diferențe a regulatorului PID sub forma

$$c_k=-a_1c_{k-1}-a_2c_{k-2}+K_R(b_0\varepsilon_k+b_1\varepsilon_{k-1}+b_2\varepsilon_{k-2}). \quad (68)$$

4°. În conformitate cu (40), funcția de transfer  $G^0(z)$  a discretizatului sistemului continuu cu funcția de transfer  $G(s)$  poate fi scrisă sub forma

$$G^0(z)=Z[G_0(s)G(s)], \quad (69)$$

unde

$$G_0(s)=\frac{1-e^{-Ts}}{s}. \quad (70)$$

Sistemul cu funcția de transfer  $G_0(s)$ , numit *extrapolator de ordinul zero*, are funcția pondere  $g_0(t)$  sub forma unui impuls dreptunghiular cu magnitudinea 1 și durata  $T$ :

$$g_0(t)=1(t)-1(t-T)=\begin{cases} 1, & t \in [0, T) \\ 0, & t \in (-\infty, 0) \cup [T, \infty) \end{cases}. \quad (71)$$

Relația (69) rezultă astfel:

$$\begin{aligned} G^0(z) &= (1-z^{-1})Z\left[\frac{G(s)}{s}\right]=Z\left[\frac{G(s)}{s}\right]-z^{-1}Z\left[\frac{G(s)}{s}\right]=Z\left[\frac{G(s)}{s}\right]-Z\left[e^{-Ts}\frac{G(s)}{s}\right] \\ &= Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}G(s)\right]=Z[G_0(s)G(s)]. \end{aligned}$$

## 6.5. SISTEME CU EȘANTIONARE

*Eșantionarea* este operația de *discretizare uniformă în timp* a unui semnal continuu. În majoritatea aplicațiilor practice, semnalul de timp discret obținut prin eșantionare este discretizat și în valoare (*cuantificat*), fiind deci semnal de tip *numeric*. În cazul sistemelor care conțin elemente continue cu dinamică lentă și cu dinamică rapidă, semnalele continue asociate acestor elemente pot fi discretizate cu perioade de eșantionare diferite (*eșantionare multiplă*).

*Sistemele cu eșantionare*, numite și *sisteme eșantionate*, sunt sisteme hibride care conțin subsisteme continue (netede, analogice) și subsisteme discrete (numerice), interconectate prin intermediul convertoarelor analog-numerice și numeric-analogice. Sistemele cu eșantionare pot valorifica într-un mod eficient avantajele rezultate din îmbinarea *caracterului intuitiv și natural* al conceptului analogic cu *flexibilitatea și potențialul de calcul* (memorare, viteză și precizie) specifice sistemelor numerice.

Analiza și sinteza sistemelor cu eșantionare se poate face în două moduri: a) în varianta discretă, prin înlocuirea subsistemelor continue cu subsisteme discrete echivalente; b) în varianta continuă, urmând ca, în cazul sintezei, să se înlocuiască subsistemele continue proiectate, de obicei cu rol de comandă, cu echivalentele lor discrete.

Sistemul cu eșantionare cel mai reprezentativ este *sistemul numeric de reglare* a unui proces continuu cu ajutorul unui regulator numeric (fig. 6.2). La fiecare moment de eșantionare  $t_k = kT$ , convertorul analog-numeric  $C_{A-N}$  generează semnalul numeric  $m^0(t_k)$  (egal cu valoarea la momentul  $t=t_k$  a semnalului de timp continuu  $m(t)$  generat de traductorul  $T$ ), regulatorul numeric  $RN$  calculează valoarea numerică  $c^0(t_k)$  a semnalului de comandă (prin procesarea convenabilă a erorii numerice  $\varepsilon^0(t_k) = r^0(t_k) - m^0(t_k)$ ), iar convertorul numeric-analogic  $C_{N-A}$  generează semnalul de timp continuu tip T-scară  $c(t)$  către elementul de execuție  $E$ . Pe durata fiecărui interval de eșantionare  $[t_k, t_{k+1})$ , semnalul de timp continuu  $c(t)$  este menținut constant, la valoarea calculată  $c^0(t_k)$ .

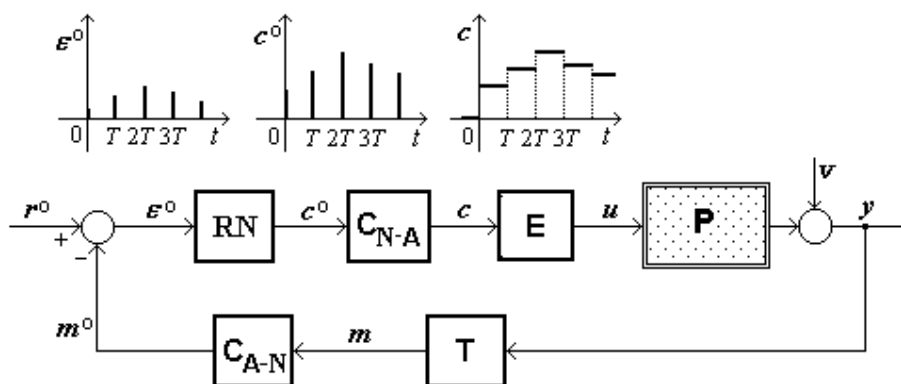


Fig. 6.2. Sistem de reglare cu eșantionare.



**Observații. 1°.** Ecuația polilor unui sistem de reglare cu eșantionare are forma

$$1 + G_R(z)G_F^0(z) = 0, \quad (72)$$

unde

$$G_F^0(z) = (G_E G_P G_T)^0(z) \quad (73)$$

este funcția de transfer a discretizatului părții fixate (formate din convertorul numeric-analogic  $C_{N-A}$ , elementul de execuție  $E$ , procesul  $P$ , traductorul  $T$  și convertorul analog-numeric  $C_{A-N}$  – fig. 6.2). În cazul polilor distincți, răspunsul sistemului de reglare la referință sau perturbație treaptă este mărginit pe intervalul de liniaritate dacă și numai dacă toți polii sistemului au modulul mai mic sau egal cu 1 (*teorema de mărginire a răspunsului indicial*).

**2°.** Pe baza proprietății valorii finale a transformării  $Z$  și a relațiilor (17), se poate demonstra ușor că la sistemele de reglare cu eșantionare și răspuns indicial convergent, *eroarea staționară* (finală, pentru  $t \rightarrow \infty$ ) la referință treaptă unitară și rampă unitară este dată respectiv de relațiile

$$\varepsilon_{st} = \lim_{z \rightarrow 1} G_{ER}(z), \quad \varepsilon_{st} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{Tz^{-1}}{1-z^{-1}} \cdot G_{ER}(z), \quad (74)$$

iar la perturbație treaptă unitară și rampă unitară, respectiv de relațiile

$$\varepsilon_{st} = \lim_{z \rightarrow 1} G_{EV}^0(z), \quad \varepsilon_{st} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{Tz^{-1}}{1-z^{-1}} \cdot G_{EV}^0(z), \quad (75)$$

unde

$$G_{ER}(z) = \frac{1}{1 + G_R(z)G_F^0(z)}, \quad G_{EV}^0(z) = \frac{-G_T^0(z)}{1 + G_R(z)G_F^0(z)}. \quad (76)$$

**3°.** Considerăm sistemul deschis din figura 6.3 cu intrarea analogică  $u$ , intrarea numerică  $v^0$  și ieșirea analogică  $y$ . Cu notația (16), studiul acestui sistem se poate face pe baza schemei discrete echivalente din fig. 6.4 sau pe baza schemei discrete aproximative din figura 6.5, unde  $G_1^0(z)$  și  $G_3^0(z)$  sunt respectiv funcțiile de transfer ale discretizatelor sistemelor continue cu funcțiile de transfer  $G_1(s)$  și  $G_3(s)$ .

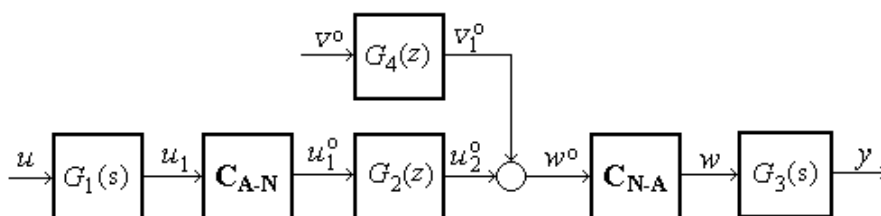


Fig. 6.3. Sistem eșantionat deschis.

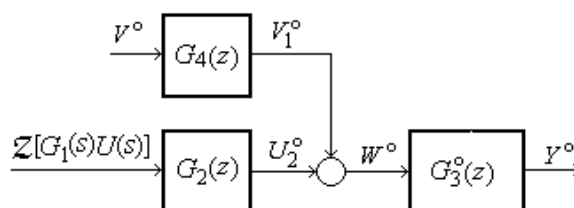


Fig. 6.4. Schema echivalentă discretă a sistemului eșantionat deschis.

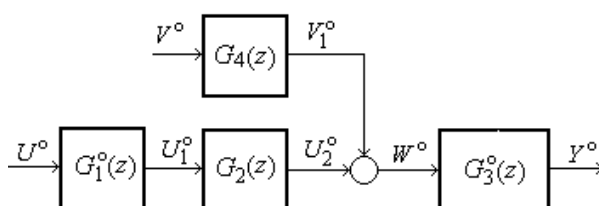


Fig. 6.5. Schema discretă aproximativă a sistemului eșantionat deschis.

În conformitate cu schema echivalentă din figura 6.4, există următoarea relație de corelație intrare-iesire:

$$Y(z) = G_3^o(z)[G_4(z) \cdot V^o(z) + G_2(z) \cdot Z[G_1(s)U(s)]]. \quad (77)$$

În cazul în care intrarea analogică  $u$  este de tip T-scară, cele două scheme discrete din fig. 6.4 și fig. 6.5 sunt echivalente deoarece răspunsul sistemului continuu și răspunsul discretizatului acestuia sunt  $T$ -echivalente, deci au aceeași transformată  $Z$ :

$$Z[G_1(s)U_{tr}(s)] = G_1^o(z)U_{tr}(z). \quad (78)$$

În acest caz, (77) devine astfel

$$Y(z) = G_3^o(z)[G_4(z) \cdot V^o(z) + G_2(z)G_1^o(z) \cdot U_{tr}(z)]. \quad (79)$$

Prin urmare, discretizatului sistemului cu intrarea  $u$  și ieșirea  $y$  are funcția de transfer

$$G_{YU}^o(z) = G_3^o(z)G_2(z)G_1^o(z). \quad (80)$$

■ In **MATLAB**, modelul obiect de tip transfer intrare-ieșire ("input-output transfer") al unui sistem discret liniar se construiește cu ajutorul funcției  $tf$ , astfel:

- $sisd = tf(num, den, T);$

unde  $num$  și  $den$  sunt vectori linie formați cu coeficienții polinoamelor în  $z^{-1}$  de la numărătorul și, respectiv, numitorul funcției de transfer (28), iar  $T$  este pasul de discretizare.

Alt mod de a introduce un sistem cu funcția de transfer dată este acela de a defini variabila  $z$  astfel

- $z = tf('z');$

și de a scrie apoi funcția de transfer ca o expresie rațională de variabila  $z$ .

Pentru implementarea în mediul **MATLAB** a conexiunilor *serie*, *paralel* și *cu reacție negativă* se utilizează operatorii "\*", "+" și "/":

$$\begin{aligned} s &= sisd1 * sisd2 * sisd3 ; \\ p &= sisd1 + sisd2 + sisd3; \\ r &= sisd1 / (1 + sisd1 * sisd2); \end{aligned}$$

De asemenea, pentru calculul și reprezentarea grafică a *răspunsului* sistemului se utilizează funcțiile cunoscute *initial*, *step*, *impulse*, *lsim*.

Modelul discretizatului de ordinul zero *sisd* al sistemului continuu *sis* se obține cu funcția

- $sisd = c2d(sis, T);$

unde  $T$  reprezintă perioada de discretizare. Sistemele *sis* și *sisd* sunt ambele de același tip, I-E sau I-S-E.

## 6.6. SISTEME DISCRETE MONOTONICE

Conform *teoremei fundamentale a sistemelor monotone* (paragraful 3.5), un sistem liniar, invariant și monovariabil este C-monotonic dacă și numai dacă are funcția pondere  $g(t) \geq 0$  pentru  $t \in \mathbf{Z}$ , sau, echivalent, dacă și numai dacă are funcția indicială  $h(t)$  crescătoare. Dacă un sistem discret cu funcția de transfer  $G(z)$  este C-monotonic, atunci sistemul cu funcția de transfer  $-G(z)$  este D-monotonic.

O conexiune serie de subsisteme monotone este un sistem monotonic.

**Teorema 1 de conservare a monotonicității.** *Un sistem liniar discret monotonic își conservă proprietatea de monotonicitate prin:*

- a) micșorarea sau eliminarea unui zerou pozitiv<sup>5</sup>;  
 b) mărirea sau introducerea unui pol pozitiv<sup>6</sup>.

Pentru demonstrarea teoremei, considerăm un sistem  $\Sigma$  de tip C-monotonic, cu funcția de transfer  $G(z)$  și zeroul  $z_1$ ,  $z_1 > 0$ . Prin înlocuirea zeroului  $z_1$  cu  $z_2$ , obținem sistemul  $\bar{\Sigma}$  cu funcția de transfer

$$\bar{G}(z) = \frac{z - z_2}{z - z_1} G(z), \quad 0 \leq z_2 < z_1. \quad (81)$$

Similar, presupunând că  $G(z)$  are polul  $z_2$  ( $z_2 \geq 0$ ), prin înlocuirea lui cu  $z_1$  ( $z_1 > z_2$ ), obținem sistemul  $\bar{\Sigma}$  cu funcția de transfer (81). Astfel, demonstrarea teoremei se reduce la a arăta că sistemul  $\bar{\Sigma}$  cu funcția de transfer  $\bar{G}(z)$  este C-monotonic. Acest lucru este adevărat deoarece sistemul  $\bar{\Sigma}$  este o conexiune serie de două subsisteme C-monotonice: subsistemul cu funcția de transfer

$$G_0(z) = \frac{z - z_2}{z - z_1}$$

și subsistemul  $\Sigma$  cu funcția de transfer  $G(z)$ . Primul subsistem este C-monotonic deoarece

$$G_0(z) = \frac{1 - z_2 z^{-1}}{1 - z_1 z^{-1}} = 1 + \frac{(z_1 - z_2) z^{-1}}{1 - z_1 z^{-1}},$$

deci

$$g_0(0) = 1$$

și

$$g_0(t) = (z_1 - z_2) z_1^{t-1} > 0, \quad t \geq 1.$$

<sup>5</sup> Micșorarea unui zerou pozitiv  $z_1$  constă în înlocuirea factorului  $z - z_1$  de la numărătorul funcției de transfer cu  $z - z_2$ , unde  $0 \leq z_2 < z_1$ . Eliminarea unui zerou pozitiv  $z_1$  înseamnă înmulțirea funcției de transfer cu  $1/(z - z_1)$ .

<sup>6</sup> Mărirea unui pol pozitiv  $z_2$  constă în înlocuirea factorului  $z - z_2$  de la numitorul funcției de transfer cu  $z - z_1$ , unde  $z_1 > z_2 \geq 0$ . Introducerea unui pol pozitiv  $z_2$  înseamnă înmulțirea funcției de transfer cu  $1/(z - z_2)$ .

Prin eliminarea unui zero pozitiv  $z_1$  sau prin introducerea unui pol pozitiv  $z_1$  obținem sistemul  $\bar{\Sigma}$  cu funcția de transfer

$$\bar{G}(z) = \frac{1}{z - z_1} G(z). \quad (82)$$

Sistemul  $\bar{\Sigma}$  este C-monotonic, fiind o conexiune serie de două subsisteme C-monotonice: subsistemul cu funcția de transfer

$$G_0(z) = \frac{1}{z - z_1}$$

și subsistemul  $\Sigma$  cu funcția de transfer  $G(z)$ .

**Teorema 2 de conservare a monotonicității.** *Un sistem linear discret monotonic își conservă proprietatea de monotonicitate prin:*

- a) contractarea<sup>7</sup> a două zerouri pozitive;
- b) dispersarea<sup>8</sup> a doi poli pozitivi.

Pentru demonstrarea teoremei, considerăm un sistem  $\Sigma$  de tip C-monotonic, cu funcția de transfer  $G(z)$ . Presupunem că  $G(z)$  are zerourile  $a$  și  $b$  ( $a > b > 0$ ). Prin contractarea acestora, obținem sistemul  $\bar{\Sigma}$  cu funcția de transfer

$$\bar{G}(z) = \frac{(z-c)(z-d)}{(z-a)(z-b)} G(z), \quad (83)$$

unde

$$a > c \geq d > b > 0, \quad a + b = c + d. \quad (84)$$

De asemenea, presupunând că  $G(z)$  are polii  $c$  și  $d$  ( $c \geq d > 0$ ), prin dispersarea acestora obținem sistemul  $\bar{\Sigma}$  cu funcția de transfer (83). Sistemul  $\bar{\Sigma}$  cu funcția de transfer  $\bar{G}(s)$  este monotonic, deoarece sistemul  $\bar{\Sigma}$  este o conexiune serie de două subsisteme C-monotonice: subsistemul cu funcția de transfer

$$G_0(z) = \frac{(z-c)(z-d)}{(z-a)(z-b)} \quad (85)$$

<sup>7</sup> Prin contractarea a două numere pozitive  $a$  și  $b$  ( $a > b$ ) se înțelege înlocuirea acestora cu numerele pozitive  $c$  și  $d$  astfel încât  $a > c \geq d > b$  și  $a + b = c + d$ .

<sup>8</sup> Prin dispersarea a două numere pozitive  $c$  și  $d$  ( $c \geq d$ ) se înțelege înlocuirea acestora cu numerele pozitive  $a$  și  $b$  astfel încât  $a > c \geq d > b$  și  $a + b = c + d$ .

și subsistemul  $\Sigma$  cu funcția de transfer  $G(z)$ . Subsistemul cu funcția de transfer (85) este C-monotonic deoarece

$$G_0(z) = 1 + \frac{cd - ab}{(z-a)(z-b)},$$

$$cd - ab = cd - a(c+d-a) = (a-c)(a-d) > 0,$$

iar subsistemul cu funcția de transfer

$$G_1(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)}$$

este o conexiune serie de două subsisteme C-monotonice.

**Observații. 1<sup>o</sup>.** Sistemul cu funcția de transfer

$$G(z) = \frac{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_r)}{(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_n)}, \quad r \leq n, \quad (86)$$

este C-monotonic dacă are toți polii pozitivi și  $p_i \geq z_i \geq 0$  pentru  $i=1, 2, \dots, r$ . Această proprietate este adevărată deoarece sistemul poate fi reprezentat ca o conexiune serie de  $n$  subsisteme C-monotonice: subsistemele cu funcțiile de transfer

$$G_i(s) = \frac{z-z_i}{z-p_i}, \quad i=1, 2, \dots, r$$

și subsistemele cu funcțiile de transfer

$$G_i(s) = \frac{1}{z-p_i}, \quad i=r+1, r+2, \dots, n.$$

**2<sup>o</sup>.** Sistemul cu funcția de transfer (86) este un sistem *nemonotonic* în cazul în care toate zerourile sunt pozitive și  $z_1 > p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n > 0$ . Pentru a demonstra această proprietate în cazul polilor distincți, presupunem, prin reducere la absurd, că sistemul este monotonic. În conformitate cu Teorema 1 de conservare a monotonicității, sistemul cu funcția de transfer

$$G_1(z) = \frac{z-z_1}{(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_n)}$$

este, de asemenea, C-monotonic. Din descompunerea în fracții simple

$$G_1(z) = \frac{C_1}{z-p_1} + \frac{C_2}{z-p_2} + \dots + \frac{C_n}{z-p_n},$$

rezultă că funcția pondere are expresia

$$g_1(t) = C_1 p_1^{t-1} + C_2 p_2^{t-1} + \dots + C_n p_n^{t-1}, \quad t \geq 1,$$

care satisface proprietatea

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g_1(t)}{p_1^{t-1}} = C_1 = \frac{p_1 - z_1}{(p_1 - p_2) \cdots (p_1 - p_n)} < 0.$$

Deoarece funcția pondere nu satisface proprietatea  $g_1(t) \geq 0$  pentru orice  $t \geq 0$ , sistemul cu funcția de transfer  $G_1(z)$  nu este C-monotonic, ceea ce reprezintă o contradicție.

**3<sup>0</sup>.** Pe baza Teoremei 2 de conservare a monotonității, putem demonstra prin metoda inducției următoarea teoremă:

*Dacă*

$$z_1 \geq z_2 \geq \dots \geq z_r > 0, \quad p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n > 0$$

și

$$p_1 \geq z_1,$$

$$p_1 + p_2 \geq z_1 + z_2,$$

.....

$$p_1 + p_2 + \dots + p_r \geq z_1 + z_2 + \dots + z_r,$$

*atunci sistemul cu funcția de transfer*

$$G(z) = \frac{(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_r)}{(z - p_1)(z - p_2) \cdots (z - p_n)}, \quad r \leq n, \quad (87)$$

*este C-monotonic.*

## 6.7. APLICAȚII REZOLVATE

◆ **Aplicația 6.1.** Se dă sistemul discret cu perioada  $T=1$  și ecuația

$$6y(t) - 5y(t-1) + y(t-2) = u(t-1) - u(t-3).$$

Să se afle funcția de transfer, răspunsul pondere și răspunsul indicial ale sistemului.

**Soluție.** Sistemul are funcția de transfer

$$G(z) = \frac{z^{-1} - z^{-3}}{6 - 5z^{-1} + z^{-2}} = \frac{z^{-1} - z^{-3}}{(2 - z^{-1})(3 - z^{-1})}.$$

Transformata  $Z$  a răspunsului pondere  $g(t)$  are dezvoltarea în fracții simple

$$G(z) = Az^{-1} + B + \frac{C}{2 - z^{-1}} + \frac{D}{3 - z^{-1}},$$

$$G(z) = -z^{-1} - 5 - \frac{6}{2 - z^{-1}} + \frac{24}{3 - z^{-1}},$$

$$G(z) = -z^{-1} - 5 - \frac{3}{1 - (1/2)z^{-1}} + \frac{8}{1 - (1/3)z^{-1}}.$$

Rezultă răspunsul pondere

$$g(t) = -\delta^0(t-1) - 5\delta^0(t) - \frac{3}{2^t} + \frac{8}{3^t},$$

echivalent cu

$$g(0) = 0 - 5 - 3 + 8 = 0,$$

$$g(1) = -1 - 0 - \frac{3}{2} + \frac{8}{3} = \frac{1}{6},$$

$$g(t) = -\frac{3}{2^t} + \frac{8}{3^t}, \quad t = 2, 3, \dots$$

Transformata  $Z$  a răspunsului indicial  $h(t)$  are expresia

$$H(z) = G(z)U(z) = \frac{z^{-1} - z^{-3}}{(1 - z^{-1})(2 - z^{-1})(3 - z^{-1})} = \frac{z^{-1} + z^{-2}}{(2 - z^{-1})(3 - z^{-1})}.$$

Prin descompunere în fracții simple, obținem

$$H(z) = A + \frac{B}{2 - z^{-1}} + \frac{C}{3 - z^{-1}},$$

$$H(z) = 1 + \frac{6}{2 - z^{-1}} - \frac{12}{3 - z^{-1}},$$

$$H(z) = 1 + \frac{3}{1 - (1/2)z^{-1}} - \frac{4}{1 - (1/3)z^{-1}},$$

Rezultă răspunsul indicial

$$g(t) = \delta^0(t) + \frac{3}{2^t} - \frac{4}{3^t},$$

echivalent cu

$$g(0) = 1 + 3 - 4 = 0,$$

$$g(t) = \frac{3}{2^t} - \frac{4}{3^t}, \quad t = 1, 2, \dots$$



Graficele cu răspunsul pondere și răspunsul indicial din fig. 6.6 au fost obținute în MATLAB, cu programul

```
z=tf('z'); x=1/z;
sis=(x-x^3)/(6-5*x+x^2);
t=0:1:10;
g=impz(sis,t);
plot(t,g,'-'); hold on;
h=step(sis,t);
plot(t,h,'-'); grid on
```

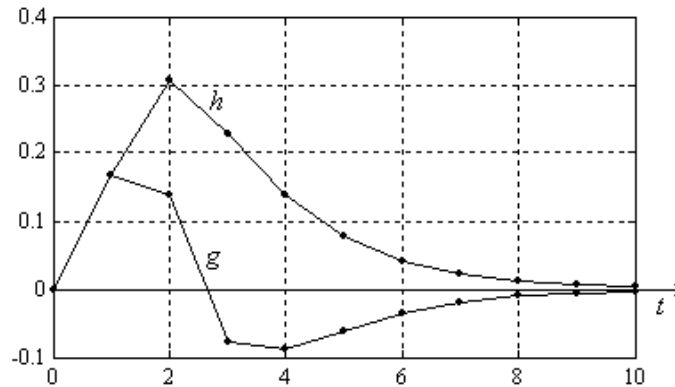
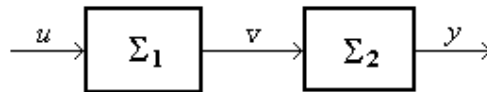


Fig. 6.6. Răspunsul pondere  $g(t)$  și răspunsul indicial  $h(t)$ .

♦ **Aplicația 6.2.** Fie conexiunea serie de mai jos, formată din subsistemele discrete:

$$(\Sigma_1) \quad v_k - 0,2v_{k-1} = 0,1u_k + 0,7u_{k-1} ,$$

$$(\Sigma_2) \quad y_k + 0,5y_{k-1} = 2,1v_{k-2} .$$



Să se afle funcția de transfer, răspunsul indicial și răspunsul pondere ale sistemului.

**Soluție.** Subsistemele și conexiunea serie au funcțiile de transfer

$$G_1(z) = \frac{0,1 + 0,7z^{-1}}{1 - 0,2z^{-1}} , \quad G_2(z) = \frac{2,1z^{-2}}{1 + 0,5z^{-1}} ,$$

$$G(z) = G_1(z)G_2(z) = \frac{(0,21 + 1,47z^{-1})z^{-2}}{(1 - 0,2z^{-1})(1 + 0,5z^{-1})} .$$

Transformata  $Z$  a răspunsului indicial  $h(t)$  are expresia

$$H(z) = G(z)U(z) = \frac{(0,21 + 1,47z^{-1})z^{-2}}{(1 - 0,2z^{-1})(1 + 0,5z^{-1})(1 - z^{-1})}$$

Prin descompunere în fracții simple, obținem

$$H(z) = \left( \frac{1,4}{1 - z^{-1}} - \frac{0,54}{1 - 0,2z^{-1}} - \frac{0,65}{1 + 0,5z^{-1}} \right) z^{-2}$$

Rezultă răspunsul indicial

$$h(t) = [1,4 - 0,54 \cdot 0,2^{\frac{t}{T}-2} - 0,65 \cdot (-0,5)^{\frac{t}{T}-2}] \cdot 1^0(t - 2T),$$

care este echivalent cu

$$h_0 = h_1 = 0 \text{ și } h_k = 1,4 - 0,54 \cdot 0,2^{k-2} - 0,65 \cdot (-0,5)^{k-2}, \quad k = 2, 3, \dots$$

Transformata Z a răspunsului pondere  $g(t)$  are dezvoltarea în fracții simple

$$G(z) = \left( \frac{2,16}{1 - 0,2z^{-1}} - \frac{1,95}{1 + 0,5z^{-1}} \right) z^{-2}$$

Rezultă răspunsul pondere

$$g(t) = [2,16 \cdot 0,2^{\frac{t}{T}-2} - 1,95 \cdot (-0,5)^{\frac{t}{T}-2}] \cdot 1^0(t - 2T),$$

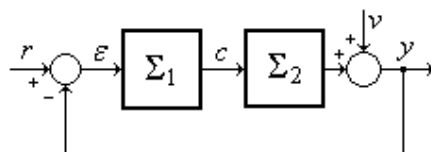
echivalent cu

$$g_0 = g_1 = 0 \text{ și } g_k = 2,16 \cdot 0,2^{k-2} - 1,95 \cdot (-0,5)^{k-2}, \quad k = 2, 3, \dots$$

◆ **Aplicația 6.3.** Considerăm sistemul cu reacție de mai jos, cu

$$(\Sigma_1) \quad c_k - c_{k-1} = K \varepsilon_k, \quad K > 0$$

$$(\Sigma_2) \quad y_k - 0,8y_{k-1} = c_{k-1} + v_k$$



Să se afle răspunsul  $y(t)$  al sistemului în cazurile:

- a)  $K = 0,01$  și  $r = 1^0(t)$ ; b)  $K = 0,2$  și  $r = 1^0(t)$ ; c)  $K = 0,2$  și  $v = (1 - 0,5^{\frac{t}{T}}) \cdot 1^0(t)$ .

**Soluție.** Avem

$$G_1(z) = \frac{K}{1 - z^{-1}}, \quad G_2(z) = \frac{z^{-1}}{1 - 0,8z^{-1}},$$

$$G_{YR}(z) = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2} = \frac{K z^{-1}}{1 - (1,8 - K)z^{-1} + 0,8z^{-2}},$$

$$G_{YV}(z) = \frac{1}{1 + G_1 G_2} = \frac{(1 - z^{-1})(1 - 0,8z^{-1})}{1 - (1,8 - K)z^{-1} + 0,8z^{-2}}.$$

a) Pentru  $K=0,01$  și  $r=1^0(t)$ , obținem

$$Y(z) = G_{YR}(z)R(z) = \frac{0,01z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-1,79z^{-1}+0,8z^{-2})} = \frac{0,01z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-pz^{-1})(1-qz^{-1})}$$

$$= \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{A}{1-pz^{-1}} + \frac{B}{1-qz^{-1}}$$

unde  $p \approx 0,927$  și  $q \approx 0,863$  sunt rădăcinile ecuației  $z^2 - 1,79z + 0,8 = 0$ , deci satisfac

$$p+q=1,79, \quad pq=0,8,$$

iar

$$A = \frac{0,01}{(1-p^{-1})(p-q)} \approx -1,98, \quad B = \frac{0,01}{(1-q^{-1})(q-p)} \approx 0,98.$$

Rezultă

$$y_k = 1 + Ap^k + Bq^k \approx 1 - 1,98 \cdot 0,927^k + 0,98 \cdot 0,863^k, \quad k=0, 1, \dots$$

b) Pentru  $K=0,2$  și  $r=1^0(t)$ , avem

$$Y(z) = G_{YR}(z)R(z) = \frac{0,2z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-1,6z^{-1}+0,8z^{-2})} = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1-0,8z^{-1}}{1-1,6z^{-1}+0,8z^{-2}}$$

$$= \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1-az^{-1}}{1-2az^{-1}+\rho^2z^{-2}},$$

unde  $a=0,8$  și  $\rho = \sqrt{0,8} \approx 0,894$ . Ținând seama de (21), avem

$$y(t) = 1 - \rho^{\frac{t}{T}} \cos \omega t, \quad t \geq 0,$$

sau

$$y_k = 1 - \rho^k \cos k\omega T, \quad k=0, 1, \dots$$

unde  $\omega T = \arccos \frac{a}{\rho} = \arccos \sqrt{0,8} \approx 0,4636$ .

În fig. 6.7 este reprezentat răspunsul indicial al sistemului pentru  $K=0,01$  și  $K=0,2$ . Graficele au fost obținute în MATLAB, cu programul

```
t=0:1:60; K=[0.01 0.2];
z=tf('z'); x=1/z;
for i=1:2
    s1=K(i)/(1-x);
    s2=x/(1-0.8*x);
    s=s1*s2/(1+s1*s2);
    y=step(s,t);
    plot(t,y,'-'); hold on; grid on;
end
```

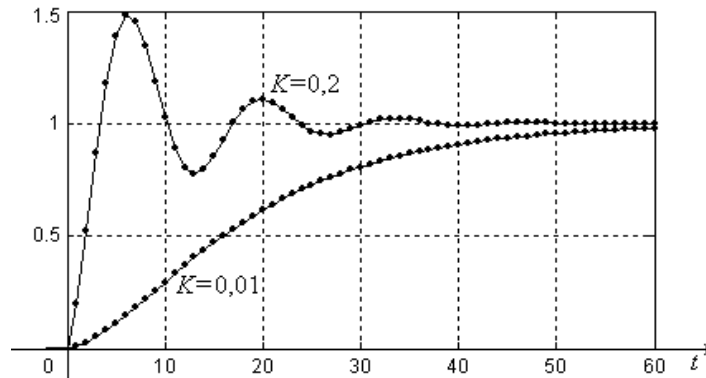


Fig. 6.7. Răspunsul  $y(t)$  al sistemului la referință treaptă unitară.

c) Pentru  $K = 0,2$  și  $v = (1 - 0,5^T) \cdot 1^0(t)$ , avem

$$V(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-0,5z^{-1}} = \frac{0,5z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-0,5z^{-1})},$$

$$Y(z) = G_{YV}(z)V(z) = \frac{0,5z^{-1} - 0,4z^{-2}}{(1-0,5z^{-1})(1-1,6z^{-1} + 0,8z^{-2})}$$

$$= \frac{-0,6}{1-0,5z^{-1}} + \frac{0,6-0,16z^{-1}}{1-1,6z^{-1} + 0,8z^{-2}} = \frac{-0,6}{1-0,5z^{-1}} + \frac{0,6(1-0,8z^{-1}) + 0,32z^{-1}}{1-1,6z^{-1} + 0,8z^{-2}}$$

$$= \frac{-0,6}{1-0,5z^{-1}} + \frac{0,6(1-az^{-1}) + 0,8bz^{-1}}{1-2az^{-1} + \rho^2 z^{-2}},$$

unde  $\rho = \sqrt{0,8} \approx 0.894$ ,  $a = 0,8$  și  $b = \sqrt{\rho^2 - a^2} = 0,4$ . În conformitate cu relațiile (20) și (21), avem

$$y(t) = -0,6 \cdot 0,5^{\frac{t}{T}} + \rho^{\frac{t}{T}} (0,6 \cos \omega t + 0,8 \sin \omega t), \quad t \geq 0,$$

sau

$$y_k = -0,6 \cdot 0,5^k - \rho^k (0,6 \cos k\omega T + 0,8 \sin k\omega T), \quad k = 0, 1, \dots$$

unde  $\omega T$  are aceleași valoare ca la punctul b), adică

$$\omega T = \arccos \frac{a}{\rho} = \arccos \frac{0,8}{\sqrt{0,8}} = \arccos \sqrt{0,8} \approx 0,4636.$$

◆ **Aplicația 6.4.** Să se scrie ecuațiile cu diferențe ale discretizatul propriu-zis și aproximativ al regulatorului continuu cu funcția de transfer

$$G_{PID}(s) = K_R \cdot \frac{T_i s + 1}{T_i s} \cdot \frac{T_d s + 1}{T_1 s + 1}.$$

**Soluție.** Scriem funcția de transfer a regulatorului continuu sub forma

$$G_{PID}(s) = K_R \left( \alpha + \frac{\beta}{T_i s} + \gamma \cdot \frac{T_1 s}{T_1 s + 1} \right),$$

unde

$$\alpha = 1 + \frac{T_d - T_1}{T_i}, \quad \beta = 1, \quad \gamma = \left( \frac{T_d}{T_1} - 1 \right) \left( 1 - \frac{T_1}{T_i} \right).$$

Discretizatul propriu-zis are funcția de transfer

$$G_{PID}(z) = K_R \left( \alpha + \frac{T}{T_i} \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} + \gamma \cdot \frac{1-z^{-1}}{1-p_d z^{-1}} \right),$$

unde  $p_d = e^{-T/T_1}$ . Regulatorul numeric are ecuațiile

$$\begin{cases} (PI)_k = (PI)_{k-1} + K_R \left[ \alpha (\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}) + \frac{T}{T_i} \varepsilon_k \right] \\ D_k = p_d D_{k-1} + K_R \gamma (\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}) \\ c_k = P_k + D_k \end{cases}.$$

Regulatorul continuu cu intrarea  $\varepsilon$  și ieșirea  $c$  este descris de ecuația diferențială

$$T_1 \ddot{c} + \dot{c} = \frac{K_R}{T_i} [T_i T_d \ddot{\varepsilon} + (T_i + T_d) \dot{\varepsilon} + \varepsilon].$$

Prin urmare, discretizatul aproximativ are ecuația cu diferențe

$$T_1 \frac{c_k - 2c_{k-1} + c_{k-2}}{T^2} + \frac{c_k - c_{k-1}}{T} = \frac{K_R}{T_i} \left[ T_i T_d \frac{\varepsilon_k - 2\varepsilon_{k-1} + \varepsilon_{k-2}}{T^2} + (T_i + T_d) \frac{\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}}{T} + \varepsilon_{k-1} \right],$$

echivalentă cu

$$(k_1 + 1)c_k - (2k_1 + 1)c_{k-1} + k_1 c_{k-2} = K_R \left[ \left( k_d + \frac{T_d}{T_i} + 1 \right) \varepsilon_k - \left( 2k_d + \frac{T_d}{T_i} + 1 \right) \varepsilon_{k-1} + k_d \varepsilon_{k-2} \right],$$

unde  $k_1 = T_1 / T$ ,  $k_d = T_d / T$ .

♦ **Aplicația 6.5.** Se consideră sistemul de reglare cu eșantionare din fig. 6.2, în care perioada de eșantionare este  $T = 2,77$  și

$$G_R(z) = K, \quad G_E(s) = G_T(s) = 1, \quad G_P(s) = \frac{1}{4s+1}.$$

a) Să se afle răspunsul indicial  $\varepsilon(t)$  pentru  $r=1(t)$ .

b) Să se calculeze eroarea staționară la referință treaptă unitară și la perturbație treaptă unitară.

**Soluție.** a) Avem

$$G_{ER}(z) = \frac{1}{G_1(z)}, \quad G_{EV}^0(z) = \frac{-G_T^0(z)}{G_1(z)},$$

unde

$$G_1(z) = 1 + G_R(z) \cdot (G_E G_P G_T)^0 = 1 + K \cdot \left(\frac{1}{4s+1}\right)^0 = 1 + K \cdot \frac{(1-p)z^{-1}}{1-pz^{-1}},$$

$$p = e^{-T/4} \approx 0,5, \quad G_T^0(z) = 1,$$

Rezultă

$$G_1(z) = \frac{2+(K-1)z^{-1}}{2-z^{-1}}, \quad G_{ER}(z) = \frac{1}{G_1(z)} = \frac{2-z^{-1}}{2+(K-1)z^{-1}},$$

$$E(z) = G_{ER}(z)R(z) = \frac{2-z^{-1}}{2+(K-1)z^{-1}} \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{A}{1-z^{-1}} + \frac{B}{2+(K-1)z^{-1}},$$

$$\varepsilon(kT) = A + \frac{B}{2} \cdot \left(\frac{1-K}{2}\right)^k,$$

unde  $A = \frac{1}{K+1}$ ,  $B = \frac{2K}{K+1}$ .

b) Pentru  $K \in (-1, 3)$ , răspunsul  $\varepsilon(kT)$  al sistemului (determinat la punctul anterior) este convergent și are valoarea finală (de regim staționar)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(kT) = A = \frac{1}{K+1}.$$

Același rezultat se obține cu relațiile (74) și (76) (pentru răspuns convergent):

$$\varepsilon_{st} = \lim_{z \rightarrow 1} G_{ER}(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{2-z^{-1}}{2+(K-1)z^{-1}} = \frac{1}{K+1}.$$

În conformitate cu (75) și (76), eroarea staționară la perturbație treaptă unitară pentru  $K \in (-1, 3)$  este:

$$\varepsilon_{st} = \lim_{z \rightarrow 1} G_{EV}^0(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-G_T^0(z)}{G_1(z)} = \frac{-1}{K+1}.$$

◆ **Aplicația 6.6.** Se consideră sistemul de reglare cu eșantionare din fig. 6.2, în care

$$T = 2,77, \quad G_R(z) = K,$$

$$G_E(s) = \frac{1}{s}, \quad G_P(s) = \frac{1}{4s+1}, \quad G_T(s) = 1.$$

Să se determine funcțiile de transfer  $G_{ER}(z)$  și  $G_{YR}(z)$ .

**Soluție.** Avem

$$G_{ER}(z) = \frac{1}{G_1(z)}, \quad G_{YR}(z) = \frac{G_R(z) \cdot (G_E G_P)^0}{G_1(z)},$$

cu

$$\begin{aligned} G_1(z) &= 1 + G_R(z) \cdot (G_E G_P G_T)^0 = 1 + K \cdot \left[ \frac{1}{s(4s+1)} \right]^0 \\ &= 1 + K \left( \frac{1}{s} - \frac{4}{4s+1} \right)^0 = 1 + K \left[ \frac{Tz^{-1}}{1-z^{-1}} - \frac{4(1-p)z^{-1}}{1-pz^{-1}} \right]. \end{aligned}$$

Ținând seama că  $p = e^{-T/4} \approx 1/2$ , obținem

$$G_1(z) = 1 + K \left( \frac{2,77z^{-1}}{1-z^{-1}} - \frac{4z^{-1}}{2-z^{-1}} \right) = \frac{2 + (1,54K-3)z^{-1} + (1,23K+1)z^{-2}}{(1-z^{-1})(2-z^{-1})},$$

$$(G_E G_P)^0 = \left[ \frac{1}{s(4s+1)} \right]^0 = \frac{2,77z^{-1}}{1-z^{-1}} - \frac{4z^{-1}}{2-z^{-1}} = \frac{1,54z^{-1} + 1,23z^{-2}}{(1-z^{-1})(2-z^{-1})},$$

deci

$$G_{ER}(z) = \frac{(1-z^{-1})(2-z^{-1})}{2 + (1,54K-3)z^{-1} + (1,23K+1)z^{-2}},$$

$$G_{YR}(z) = \frac{K(1,54z^{-1} + 1,23z^{-2})}{2 + (1,54K-3)z^{-1} + (1,23K+1)z^{-2}}.$$

♦ **Aplicația 6.7.** Se consideră sistemul de reglare cu eșantionare din fig. 6.2, în care

$$T = 2,77, \quad G_R(z) = \frac{K}{1-z^{-1}}, \quad G_E(s) = 1, \quad G_P(s) = \frac{1}{4s+1}, \quad G_T(s) = 1.$$

- Să se determine funcțiile de transfer  $G_{ER}(z)$  și  $G_{YR}(z)$ ;
- Să se afle răspunsul indicial  $\varepsilon(t)$  pentru  $K=1/6$  și  $r=1(t)$ ;
- Să se afle răspunsul indicial  $\varepsilon(t)$  pentru  $K=6$  și  $r=1(t)$ .
- Să se arate că răspunsul indicial  $\varepsilon(t)$  este mărginit pentru  $0 < K \leq 6$ .

**Soluție.** a) Avem

$$G_{ER}(z) = \frac{1}{G_1(z)}, \quad G_{YR}(z) = \frac{G_R(z) \cdot (G_E G_P)^0}{G_1(z)},$$

cu

$$G_1(z) = 1 + G_R(z) \cdot (G_E G_P G_T)^0,$$

unde

$$(G_E G_P)^0 = (G_E G_P G_T)^0 = \left[ \frac{1}{4s+1} \right]^0 = \frac{(1-p)z^{-1}}{1-pz^{-1}}, \quad p = e^{-T/4}.$$

Ținând seama că  $p \approx 1/2$ , obținem

$$(G_E G_P)^0 = (G_E G_P G_T)^0 = \frac{z^{-1}}{2-z^{-1}},$$

$$G_1(z) = 1 + \frac{Kz^{-1}}{(1-z^{-1})(2-z^{-1})} = \frac{2+(K-3)z^{-1}+z^{-2}}{(1-z^{-1})(2-z^{-1})},$$

deci

$$G_{ER}(z) = \frac{(1-z^{-1})(2-z^{-1})}{2+(K-3)z^{-1}+z^{-2}},$$

$$G_{YR}(z) = \frac{Kz^{-1}}{2+(K-3)z^{-1}+z^{-2}}.$$

b) Avem

$$G_{ER}(z) = \frac{6(1-z^{-1})(2-z^{-1})}{12-17z^{-1}+6z^{-2}} = \frac{6(1-z^{-1})(2-z^{-1})}{(3-2z^{-1})(4-3z^{-1})},$$

$$E(z) = G_{ER}(z)R(z) = \frac{6(2-z^{-1})}{(3-2z^{-1})(4-3z^{-1})} = \frac{12}{4-3z^{-1}} - \frac{6}{3-2z^{-1}} = \frac{3}{1-\frac{3}{4}z^{-1}} - \frac{2}{1-\frac{2}{3}z^{-1}},$$

$$\varepsilon(kT) = 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^k - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^k.$$

Răspunsul sistemului este convergent și are valoarea finală

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(kT) = 0.$$

c) Avem

$$G_{ER}(z) = \frac{(1-z^{-1})(2-z^{-1})}{2+3z^{-1}+z^{-2}} = \frac{(1-z^{-1})(2-z^{-1})}{(1+z^{-1})(2+z^{-1})},$$

$$E(z) = G_{ER}(z)R(z) = \frac{2-z^{-1}}{(1+z^{-1})(2+z^{-1})} = \frac{3}{1+z^{-1}} - \frac{4}{2+z^{-1}} = \frac{3}{1+z^{-1}} - \frac{2}{1+\frac{1}{2}z^{-1}},$$

$$\varepsilon(kT) = 3 \cdot (-1)^k - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Răspunsul sistemului este mărginit, dar nu este convergent.

d) În conformitate cu teorema de mărginire a răspunsului indicial, răspunsul indicial  $\varepsilon(t)$  este mărginit dacă polii sistemului de reglare au modulul mai mic sau egal cu unu. Din ecuația polilor  $G_1(z)=0$ , unde

$$G_1(z) = \frac{2+(K-3)z^{-1}+z^{-2}}{(1-z^{-1})(2-z^{-1})},$$

rezultă că polii sistemului sunt rădăcinile ecuației

$$2z^2 - (3-K)z + 1 = 0.$$



Pentru  $3-2\sqrt{2} \leq K \leq 3+2\sqrt{2}$ , avem polii complex-conjugați

$$z_{1,2} = \frac{3-K \pm j\sqrt{-k^2+6K-1}}{4},$$

care satisfac

$$|z_{1,2}| = \frac{\sqrt{(3-k)^2 + (-k^2+6K-1)}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1.$$

Pentru  $K \in (0, 3-2\sqrt{2}) \cup (3+2\sqrt{2}, 6]$ , avem polii reali

$$z_{1,2} = \frac{3-K \pm \sqrt{K^2-6K+1}}{4}.$$

Pentru  $K \in (0, 3-2\sqrt{2})$ , avem

$$0 < \frac{3-K-\sqrt{K^2-6K+1}}{4} < \frac{3-K+\sqrt{K^2-6K+1}}{4} \leq 1,$$

iar pentru  $K \in (3+2\sqrt{2}, 6]$ , avem

$$0 > \frac{3-K+\sqrt{K^2-6K+1}}{4} > \frac{3-K-\sqrt{K^2-6K+1}}{4} \geq -1,$$

♦ **Aplicația 6.8.** Un sistem de reglare cu eșantionare (fig. 6.2) cu perioada de eșantionare  $T=1$  are funcțiile de transfer

$$G_R(z) = K, \quad G_E(s) = 1, \quad G_P(s) = \frac{e^{-s}}{4s}, \quad G_T(s) = 1.$$

- Pentru  $K=1$ , să se calculeze răspunsul  $y(t)$  la referință treaptă unitară.
- Pentru  $K=4$ , să se calculeze răspunsul  $y(t)$  la referință treaptă unitară.
- Răspunsul  $y(t)$  la referință treaptă unitară este mărginit pentru  $0 < K \leq 4$  și nemărginit pentru  $K > 4$ .
- Să se reprezinte grafic, în Matlab, răspunsul indicial  $y(t)$  pentru  $K=0,5$ ;  $K=1$ ;  $K=3$ ,  $K=4$  și  $K=4.1$ .

**Soluție.** Avem

$$(G_E G_P)^0 = \left(\frac{e^{-s}}{4s}\right)^0 = (e^{-s})^0 \left(\frac{1}{4s}\right)^0 = z^{-1} \cdot \frac{Tz^{-1}}{4(1-z^{-1})} = \frac{z^{-2}}{4(1-z^{-1})},$$

$$G_1(z) = 1 + G_R(z) \cdot (G_E G_P G_T)^0 = 1 + G_R(z) \cdot (G_E G_P)^0 = 1 + \frac{Kz^{-2}}{4(1-z^{-1})},$$

$$G_{YR}(z) = \frac{G_R(z) \cdot (G_E G_P)^0}{G_1(z)} = \frac{Kz^{-2}}{4-4z^{-1}+Kz^{-2}},$$

$$Y(z) = G_{YR}(z) \cdot R(z) = \frac{Kz^{-2}}{4-4z^{-1}+Kz^{-2}} \cdot \frac{1}{1-z^{-1}}.$$

a) Pentru  $K=1$ , avem:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{z^{-2}}{(2-z^{-1})^2} \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{4}{(2-z^{-1})^2} = \frac{1}{1-z^{-1}} - 2z \cdot \frac{0,5z^{-1}}{(1-0,5z^{-1})^2} \\ &= \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{4}{(2-z^{-1})^2} = \frac{1}{1-z^{-1}} - 2z \cdot \frac{0,5z^{-1}}{(1-0,5z^{-1})^2}, \end{aligned}$$

deci, din proprietatea deplasării argumentului real și a doua relație (18), rezultă:

$$y_k = 1 - 2(k+1) \cdot 0,5^{k+1} = 1 - (k+1) \cdot 0,5^k.$$

Răspunsul sistemului este convergent și are valoarea finală

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = 1.$$

b) Pentru  $K=4$ , avem:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{z^{-2}}{1-z^{-1}+z^{-2}} \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} \\ &= \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-z^{-1}+z^{-2}} = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{2}{\sqrt{3}} z \cdot \frac{\sqrt{3} z^{-1}}{2(1-z^{-1}+z^{-2})}, \end{aligned}$$

deci, din proprietatea deplasării argumentului real și (22'), rezultă:

$$y(t) = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{\pi(t+1)}{3T} = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{\pi(t+1)}{3}.$$

Răspunsul sistemului este oscilant întreținut.

c) În conformitate cu teoremei de mărginire a răspunsului indicial, trebuie să arătăm că ecuația polilor sistemului, anume  $G_1(z) = 0$ , unde

$$G_1(z) = 4 - 4z^{-1} + Kz^{-2} = \frac{4z^2 - 4z + K}{z^2},$$

are polii

$$z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-K}}{2}$$

cu modulul mai mic sau egal cu 1 pentru  $0 < K \leq 4$ . Într-adevăr, pentru  $0 < K \leq 1$  (cazul polilor reali pozitivi), avem

$$\left| \frac{1 \pm \sqrt{1-K}}{2} \right| = \frac{1 \pm \sqrt{1-K}}{2} \leq \frac{1 + \sqrt{1-K}}{2} < 1,$$

iar pentru  $K > 1$  (cazul polilor complex-conjugați), avem

$$|z_{1,2}| = \left| \frac{1 \pm j\sqrt{K-1}}{2} \right| = \frac{\sqrt{1+(K-1)}}{2} = \frac{\sqrt{K}}{2},$$

deci  $|z_{1,2}| \leq 1$  pentru  $1 < K \leq 4$ . Pentru  $K > 4$ , avem evident  $|z_{1,2}| > 1$ .

d) În fig. 6.8 este reprezentat răspunsul indicial al sistemului de reglare pentru diferite valori ale lui  $K$ . Graficele au fost obținute în MATLAB, cu programul

```

K=[0.5 1 3 4 4.1];
T=1; t=0:T:40;
z=tf('z'); x=1/z;
hold on; grid on;
for i=1:5
    s1=K(i); s2=T*x^2/4/(1-x);
    sis=s1*s2/(1+s1*s2);
    y=step(sis,t);
    plot(t,y,'-');
end

```

Răspunsul indicial al sistemului de reglare este periodic pentru  $K=4$  și nemărginit pentru  $K=4,1$ .

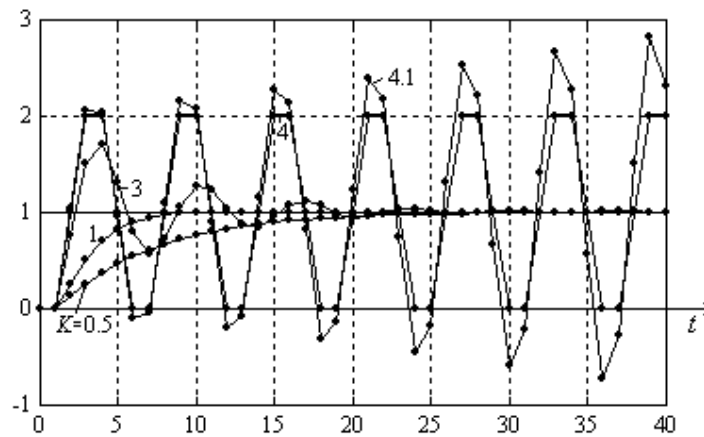


Fig. 6.8. Răspunsul indicial pentru  $K=0,5$ ;  $K=1$ ;  $K=3$ ,  $K=4$  și  $K=4,1$ .

◆ **Aplicația 6.9.** Pentru  $v^0 = 1^0(t)$ , să se afle răspunsul indicial al sistemului cu eșantionare din figura 6.3, știind că

$$(\Sigma_4) \quad v_1(kT) + av_1((k-1)T) = bv((k-1)T),$$

$$(\Sigma_3) \quad T_3 \dot{y}(t) + y(t) = k_3 w(t - mT), \quad m \in \mathbf{N}.$$

**Soluție.** Avem

$$G_4(z) = \frac{bz^{-1}}{1+az^{-1}}, \quad G_3(s) = \frac{k_3 e^{-mTs}}{T_3 s + 1},$$

$$(G_3)^0 = \frac{k_3(1-p_3)z^{-m-1}}{1-p_3z^{-1}}, \quad p_3 = e^{-\frac{T}{T_3}},$$

$$\begin{aligned}
Y(z) &= G_{YV}(z)V(z) = (G_3)^{\circ}G_4(z) \cdot V(z) \\
&= \frac{k_3(1-p_3)z^{-m-1}}{1-p_3z^{-1}} \cdot \frac{bz^{-1}}{1+az^{-1}} \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} \\
&= \frac{bk_3z^{-m}}{1+a} \left( \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{1-p_3}{a+p_3} \cdot \frac{1}{1+az^{-1}} - \frac{1+a}{a+p_3} \cdot \frac{1}{1-p_3z^{-1}} \right),
\end{aligned}$$

deci

$$y(k) = \frac{bk_3}{1+a} \left[ 1 + \frac{1-p_3}{a+p_3} \cdot (-a)^{k-m} - \frac{1+a}{a+p_3} \cdot p_3^{k-m} \right] \cdot 1^0(k-m).$$

♦ **Aplicația 6.10.** Să se arate că un sistem liniar discret nemonotonic  $\Sigma$  își conservă proprietatea de nemonotonicitate prin:

- mărirea unui zero pozitiv;
- micșorarea unui pol pozitiv.

**Soluție.** Vom utiliza metoda reducerii la absurd.

a) Presupunem că sistemul  $\bar{\Sigma}$  obținut prin mărirea zeroului este monotonic. Prin readucerea (micșorarea) acestuia la valoarea inițială, reobținem sistemul  $\Sigma$  care, conform Teoremei 1 de conservare a monotonicității – punctul a), este monotonic, ceea ce este fals.

b) Presupunem că sistemul  $\bar{\Sigma}$  obținut prin micșorarea polului este monotonic.. Prin readucerea (mărirea) acestuia la valoarea inițială, reobținem sistemul  $\Sigma$  care, conform Teoremei 1 de conservare a monotonicității – punctul b), este monotonic, ceea ce este fals.

♦ **Aplicația 6.11.** Fie  $\Sigma_1$  un sistem C-monotonic cu funcția de transfer  $G_1(z)$  și polul  $p_1 > 0$ , iar  $\Sigma_2$  sistemul C-monotonic cu funcția de transfer  $G_2(z)$  obținută din  $G_1(z)$  prin înlocuirea polului  $p_1$  cu  $p_2$ ,  $p_1 > p_2 > 0$ . Să se arate că între funcțiile pondere ale celor două sisteme există inegalitatea

$$g_1(t) \geq g_2(t), \quad t \in \mathbf{Z}.$$

**Soluție.** Este suficient să arătăm că sistemul  $\Sigma_{12}$  cu funcția de transfer  $G_1(z) - G_2(z)$  este C-monotonic. Intre funcțiile de transfer  $G_1(z)$  și  $G_2(z)$  ale sistemelor  $\Sigma_1$  și  $\Sigma_2$  există corelația

$$G_2(z) = \frac{z-p_1}{z-p_2} G_1(z).$$

Din

$$G_1(z) - G_2(z) = \frac{p_1 - p_2}{z - p_2} G_2(z),$$

rezultă că sistemul  $\Sigma_{12}$  este o conexiune serie de două subsisteme: subsistemul cu funcția de transfer

$$G_0(z) = \frac{1}{z - p_2}$$

și subsistemul cu funcția de transfer  $(p_1 - p_2)G_2(z)$ . Este suficient să arătăm că cele două subsisteme sunt C-monotonice. Primul subsistem este C-monotonic deoarece

$$g_0(0) = G_0(\infty) = 1$$

și

$$g_0(t) = p_2^{t-1} > 0, \quad t \geq 1,$$

iar al doilea este C-monotonic deoarece  $p_1 - p_2 > 0$ .

♦ **Aplicația 6.12.** Să se arate că sistemul cu funcția de transfer

$$G(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)}, \quad a, b \in \mathbf{R},$$

este C-monotonic dacă și numai dacă

$$a + b \geq 0.$$

**Soluție.** Deoarece

$$G(z) = \frac{z^{-2}}{1 - (a+b)z^{-1} + abz^{-2}},$$

avem

$$g(0) = g(1) = 0,$$

iar din

$$G(z) = \frac{1}{a-b} \left( \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b} \right),$$

rezultă

$$g(t) = \frac{a^{t-1} - b^{t-1}}{a-b} = a^{t-2} + a^{t-3}b + \dots + ab^{t-3} + b^{t-2}, \quad t \geq 2.$$

Necesitatea condiției  $a + b \geq 0$  reiese din expresia  $g(3) = a + b$ . Pe de altă parte, suficiența condiției  $a + b \geq 0$  este evidentă în cazul  $a, b \geq 0$ , deoarece

$$g(t) = a^{t-2} + a^{t-3}b + \dots + ab^{t-3} + b^{t-2} \geq 0.$$

Din motive de simetrie, rămâne de arătat că analizat suficiența în cazul

$$a > 0 > b, \quad a + b \geq 0.$$

Trebuie să arătăm că  $g(t) \geq 0$ , adică  $a^{t-1} - b^{t-1} \geq 0$  pentru  $t \geq 2$ . Pentru  $t$  par avem  $a^{t-1} - b^{t-1} = a^{t-1} + (-b)^{t-1} > 0$ , iar pentru  $t$  impar avem  $a^{t-1} - b^{t-1} = a^{t-1} - (-b)^{t-1} \geq 0$  (deoarece  $a \geq -b$ ).

♦ **Aplicația 6.13.** Să se arate că sistemul cu funcția de transfer

$$G(z) = \frac{z-c}{(z-a)(z-b)}, \quad a, b, c > 0,$$

este C-monotonic dacă și numai dacă

$$\max\{a, b\} \geq c.$$

**Soluție.** Avem

$$g(0) = G(\infty) = 0,$$

iar din

$$G(z) = \frac{a-c}{a-b} \cdot \frac{1}{z-a} + \frac{b-c}{b-a} \cdot \frac{1}{z-b},$$

rezultă

$$g(t) = \frac{a-c}{a-b} \cdot a^{t-1} + \frac{b-c}{b-a} \cdot b^{t-1}, \quad t \geq 1,$$

deci

$$g(1) = \frac{a-c}{a-b} + \frac{b-c}{b-a} = 1.$$

Pentru  $t \geq 2$ , avem

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{a^t - b^t}{a-b} - c \cdot \frac{a^{t-1} - b^{t-1}}{a-b} \\ &= a^{t-1} + a^{t-2}b + \dots + ab^{t-2} + b^{t-1} - c(a^{t-2} + a^{t-3}b + \dots + ab^{t-3} + b^{t-2}). \end{aligned}$$

Dacă  $a = b$ , când

$$g(t) = ta^{t-1} - c(t-1)a^{t-2} = a^{t-2}[(a-c)t + c]$$

trebuie să arătăm că  $g(t) \geq 0$  pentru  $t \geq 2$  dacă și numai dacă  $a \geq c$ , ceea ce este evident adevărat.

Mai departe, din considerente de simetrie, putem considera  $a > b$ , caz în care condiția  $\max\{a, b\} \geq c$  este echivalentă cu  $a \geq c$ . Această condiție este necesară pentru ca sistemul să fie C-monotonic deoarece

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g(t)}{a^{t-1}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \frac{a-c}{a-b} + \frac{b-c}{b-a} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{t-1} \right] = \frac{a-c}{a-b}.$$

Condiția  $a \geq c$  este și suficientă, deoarece

$$g(t) = \frac{a-c}{a-b} \cdot a^{t-1} + \frac{b-c}{b-a} \cdot b^{t-1} \geq \frac{a-c}{a-b} \cdot b^{t-1} + \frac{b-c}{b-a} \cdot b^{t-1} = b^{t-1} > 0.$$

♦ **Aplicația 6.14.** Să se arate că sistemul cu funcția de transfer

$$G(z) = \frac{(z-c)^2 + d^2}{(z-a)(z-b)}, \quad a, b, c, d > 0,$$

este C-monotonic dacă și numai dacă

$$a + b \geq 2c.$$

**Soluție.** Deoarece

$$g(1) = a + b - 2c,$$

condiția  $a + b \geq 2c$  este necesară. Deoarece  $a + b \geq 2c > 0$ , sistemul cu funcția de transfer

$$G_1(z) = \frac{d^2}{(z-a)(z-b)}$$

este C-monotonic (vezi aplicația 6.12). Rămâne să arătăm că sistemul cu funcția de transfer

$$G_2(z) = \frac{(z-c)^2}{(z-a)(z-b)}$$

este C-monotonic. Din considerente de simetrie, putem considera  $a \geq b$ . Pentru  $a > b$ , avem

$$G_2(z) = 1 + \frac{A}{z-a} - \frac{B}{z-b}, \quad A = \frac{(a-c)^2}{a-b}, \quad B = \frac{(b-c)^2}{a-b},$$

deci

$$g_2(t) = \delta^0(t) + Aa^{t-1} - Bb^{t-1} \geq Ab^{t-1} - Bb^{t-1} = (a+b-2c)b^{t-1} \geq 0.$$

Pentru  $a = b$ , avem

$$G_2(z) = \frac{(z-c)^2}{(z-a)^2}.$$

Este suficient să arătăm că sistemul cu funcția de transfer

$$G_3(z) = \frac{z-c}{z-a}$$

este C-monotonic pentru  $a \geq c$ . Avem  $g_3(0) = 1$ , iar din

$$G_3(z) = 1 + \frac{a-c}{z-a},$$

rezultă

$$g_3(t) = (a-c)a^{t-1} \geq 0$$

pentru  $t \geq 1$ .

♦ **Aplicația 6.15.** Să se arate că sistemul cu funcția de transfer

$$G(z) = \frac{1}{(z-a)(z+b)(z+c)}, \quad a, b, c > 0,$$

este C-monotonic dacă

$$a \geq b + c.$$

**Soluție.** Fără a pierde din generalitate, presupunem  $b \geq c$ . Deoarece

$$G(z) = \frac{z^{-3}}{1 - (a-b-c)z^{-1} - (ab+ac-bc)z^{-2} - abc z^{-3}},$$

avem

$$g(0) = g(1) = g(2) = 0,$$

iar din

$$G(z) = \frac{1}{(a+b)(a+c)} \cdot \frac{1}{z-a} + \frac{1}{(a+b)(b-c)} \cdot \frac{1}{z+b} - \frac{1}{(a+c)(b-c)} \cdot \frac{1}{z+c},$$

rezultă

$$g(t) = \frac{1}{(a+b)(a+c)} \cdot a^{t-1} + \frac{1}{(a+b)(b-c)} \cdot (-b)^{t-1} - \frac{1}{(a+c)(b-c)} \cdot (-c)^{t-1},$$

$$\begin{aligned} (a+b)(a+c)g(t) &= a^{t-1} + \frac{a+c}{b-c} \cdot (-b)^{t-1} - \frac{a+b}{b-c} \cdot (-c)^{t-1} \\ &= a^{t-1} + a \frac{(-b)^{t-1} - (-c)^{t-1}}{b-c} - bc \frac{(-b)^{t-2} - (-c)^{t-2}}{b-c}, \end{aligned}$$

deci

$$(a+b)(a+c)g(t) = a^{t-1} - aE + bcF, \quad t \geq 3,$$

unde

$$\begin{aligned} E &= (-b)^{t-2} + (-b)^{t-3}(-c) + \dots + (-b)(-c)^{t-3} + (-c)^{t-2}, \\ F &= (-b)^{t-3} + (-b)^{t-4}(-c) + \dots + (-b)(-c)^{t-4} + (-c)^{t-3}. \end{aligned}$$

Pentru  $t$  impar ( $t=3, 5, 7, \dots$ ), avem

$$\begin{aligned} E &= -(b^{t-2} + b^{t-3}c + \dots + bc^{t-3} + c^{t-2}) < 0, \\ F &= b^{t-3} + b^{t-4}c + \dots + bc^{t-4} + c^{t-3} > 0, \end{aligned}$$

deci

$$(a+b)(a+c)g(t) > 0, \quad t \geq 3.$$

Pentru  $t$  par ( $t=4, 6, 8, \dots$ ), avem

$$\begin{aligned} E &= b^{t-2} + b^{t-3}c + \dots + bc^{t-3} + c^{t-2} > 0, \\ F &= -(b^{t-3} + b^{t-4}c + \dots + bc^{t-4} + c^{t-3}) < 0. \end{aligned}$$



Trebuie să arătăm că  $f(a) \geq 0$  pentru  $t=3, 5, 7, \dots$ , unde

$$f(a) = a^{t-1} - aE + bcF.$$

Deoarece

$$f'(a) = (t-1)a^{t-2} - E = (a^{t-2} - b^{t-2}) + (a^{t-2} - b^{t-3}c) + \dots + (a^{t-2} - bc^{t-3}) + (a^{t-2} - c^{t-2}) > 0,$$

funcția  $f(a)$  este crescătoare, deci

$$f(a) \geq f(b+c).$$

Rămâne să arătăm că  $f(b+c) \geq 0$ , adică

$$(b+c)^{t-1} - (b+c)E + bcF \geq 0.$$

Această inegalitate poate fi demonstrată prin aducere la forma evidentă

$$(C_{t-1}^1 - 3)bc^{t-2} + (C_{t-1}^2 - 3)b^2c^{t-3} + \dots + (C_{t-1}^{t-2} - 3)b^{t-2}c \geq 0.$$

## 6.7. APLICAȚII DE AUTOCONTROL

◆ **C6.1.** Se dă sistemul discret cu perioada  $T=1$  și ecuația

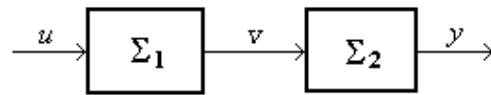
$$6y(t) - 5y(t-1) + y(t-2) = u(t-1) - u(t-3).$$

Să se afle răspunsul pondere al sistemului.

◆ **C6.2.** Fie conexiunea serie alăturată, formată din subsistemele discrete:

$$(\Sigma_1) \quad v_k + 0,4v_{k-1} = 1,5u_{k-1},$$

$$(\Sigma_2) \quad y_k + 0,5y_{k-1} = 0,3v_{k-1}.$$



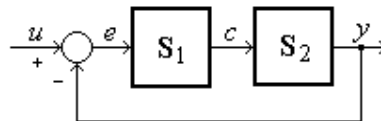
Să se afle funcția de transfer, răspunsul indicial și răspunsul pondere al sistemului.

◆ **C6.3.** Să se afle funcția de transfer și răspunsul indicial al sistemului discret cu ecuația

$$16y(t) - 10y(t-1) + y(t-2) = 3u(t-1) + 4u(t-2), \quad t \in \mathbf{Z}.$$

◆ **C 6.4.** Considerăm sistemul numeric cu reacție alăturată, în care:

$$(S_1) \quad c_k = K e_k,$$



$$(S_2) \quad 2y_k - y_{k-1} - y_{k-1} = c_{k-2}.$$

- a) Să se afle răspunsul indicial  $y(t)$  al sistemului pentru  $K = \frac{5}{8}$ .  
 b) Să se arate că răspunsul indicial  $y(t)$  este mărginit pentru  $0 < K \leq 3$ .

◆ C6.5. Pentru sistemul continuu cu funcția de transfer

$$G(s) = \frac{2s+1}{25s^2+1},$$

să se scrie ecuațiile cu diferențe ale discretizatului propriu-zis și discretizatului aproximativ.

◆ C6.6. Se consideră sistemul de reglare cu eșantionare din fig. 6.2, în care

$$T=1, \quad G_R(z) = \frac{K}{1-z^{-1}}, \quad G_E(s) = G_T(s) = 1, \quad G_P(s) = \frac{e^{-s}}{12s+1}.$$

- a) Să se determine funcția de transfer  $G_{ER}(z)$ .  
 b) Să se afle răspunsul indicial  $\varepsilon(t)$  pentru  $K=3/200$  și  $r=1(t)$ .  
 c) Să se afle răspunsul indicial  $\varepsilon(t)$  pentru  $K=1$  și  $r=1(t)$ .  
 d) Să se arate că răspunsul indicial  $\varepsilon(t)$  este mărginit pentru  $0 < K \leq 1$ .

◆ C6.7. Să se arate că sistemul cu funcția de transfer

$$G(z) = \frac{z-c}{(z-a)(z+b)}, \quad a, b, c > 0,$$

este C-monotonic dacă și numai dacă

$$a \geq b+c.$$

◆ C6.8. Să se arate că sistemul cu funcția de transfer

$$G(z) = \frac{(z-c)(z-d)}{(z-a)(z+b)}, \quad a, b, c, d > 0,$$

este C-monotonic dacă și numai dacă

$$a \geq b+c+d.$$

◆ C6.9. Să se arate că sistemul cu funcția de transfer

$$G(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)(z+c)}, \quad a, b, c > 0,$$

este C-monotonic dacă

$$\max\{a, b\} \geq c.$$



### 7.1. DEFINIȚIE ȘI PROPRIETĂȚI

Considerăm un sistem liniar continuu cu funcția de transfer  $G(s)$ . Prin definiție, *funcția de frecvență* (sau *de pulsație*) a sistemului este funcția complexă  $G(j\omega)$ , unde  $\omega \in \mathbf{R}$  (variabila  $s$  aparține axei imaginare) sau, mai restrictiv,  $\omega \in \mathbf{R}_+$  (variabila  $s$  aparține semiaxei imaginare pozitive).

În cazul sistemelor fără timp mort, cu funcția de transfer

$$G(s) = \frac{b_r s^r + b_{r-1} s^{r-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}, \quad r \leq n, \quad (1)$$

avem

$$G(j\omega) = \frac{b_r (j\omega)^r + b_{r-1} (j\omega)^{r-1} + \dots + b_1 (j\omega) + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0}. \quad (2)$$

Funcția de frecvență poate fi scrisă sub forma

$$G(j\omega) = M(\omega) e^{j\Phi(\omega)}, \quad (3)$$

unde  $M(\omega)$  reprezintă *modulul* funcției de frecvență, iar  $\Phi(\omega)$  - *argumentul* funcției de frecvență. În acest fel, funcția de frecvență este o funcție complexă de variabila reală  $\omega$ . De asemenea, funcția de frecvență poate fi scrisă sub forma

$$G(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega), \quad (4)$$

unde  $U(\omega)$  este *partea reală a funcției de frecvență*, iar  $V(\omega)$  *partea imaginară a funcției de frecvență*. Între cele patru componente reale ale funcției complexe de frecvență există relațiile:

$$U(\omega) = M(\omega) \cos \Phi(\omega), \quad V(\omega) = M(\omega) \sin \Phi(\omega), \quad (5)$$

$$M(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}, \quad \operatorname{tg} \Phi(\omega) = \frac{V(\omega)}{U(\omega)}. \quad (6)$$

Deoarece funcția de transfer este analitică, ea satisface următoarea proprietate:

$$G(\bar{s}) = \bar{G}(s), \quad (7)$$

unde  $\bar{s}$  este conjugata variabilei complexe  $s$ , iar  $\bar{G}$  conjugata funcției  $G$ . Prin urmare, avem

$$G(-j\omega) = \bar{G}(j\omega),$$

iar din

$$G(-j\omega) = U(-\omega) + jV(-\omega),$$

$$\bar{G}(j\omega) = U(\omega) - jV(\omega),$$

rezultă

$$U(-\omega) = U(\omega), \quad V(-\omega) = -V(\omega), \quad (8)$$

adică  $U(\omega)$  este funcție pară, iar  $V(\omega)$  funcție impară. Din relațiile (6) rezultă că  $M(\omega)$  este pară și  $\Phi(\omega)$  impară, adică

$$M(-\omega) = M(\omega), \quad \Phi(-\omega) = -\Phi(\omega), \quad (9)$$

Dacă funcțiile impare  $V(\omega)$  și  $\Phi(\omega)$  sunt continue în punctul  $\omega=0$ , atunci  $V(0)=0$  și  $\Phi(0)=0$ .

În cazul unei conexiuni serie de două subsisteme liniare, avem

$$G(s) = G_1(s)G_2(s),$$

deci

$$G(j\omega) = G_1(j\omega)G_2(j\omega) = M_1(\omega)M_2(\omega)e^{j[\Phi_1(\omega)+\Phi_2(\omega)]}. \quad (10)$$

Prin urmare, modulul funcției de frecvență a conexiunii este egal cu produsul modulelor funcțiilor de transfer ale subsistemelor componente, iar argumentul funcției de frecvență a conexiunii este egal cu suma argumentelor funcțiilor de transfer ale subsistemelor componente.

## 7.2. INTERPRETARE FIZICĂ

Interpretarea fizică a funcției de frecvență a unui sistem liniar *continuu* rezultă imediat din *teorema filtrării* (numită și *teorema de interpretare fizică* a funcției de frecvență), enunțată și demonstrată în cele ce urmează.

**Teorema filtrării.** Pentru un sistem liniar continuu cu toți polii situați în semiplanul stâng și aflat în regim sinusoidal permanent cu pulsația  $\omega$ , modulul și argumentul funcției de frecvență  $G(j\omega)$  reprezintă factorul de amplificare și, respectiv, defazajul ieșirii în raport cu intrarea.

*Demonstrație.* Considerăm că la intrarea sistemului cu funcția de transfer  $G(s)$  se aplică semnalul sinusoidal

$$u(t) = \sin \omega t \cdot 1(t).$$

Trebuie să arătăm că răspunsul sistemului în regim permanent are expresia

$$y_p(t) = M(\omega) \sin[\omega t + \Phi(\omega)]. \quad (11)$$

Transformata Laplace a răspunsului sistemului este

$$Y(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} G(s) = \frac{As + B\omega}{s^2 + \omega^2} + Y_{tr}(s),$$

unde  $Y_{tr}(s)$  este o funcție rațională strict proprie având aceiași poli ca  $G(s)$ , deci cu partea reală negativă. Rezultă

$$y(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t + y_{tr}(t),$$

unde  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_{tr}(t) = 0$ . Prin urmare, răspunsul  $y(t)$  al sistemului are *componenta armonică permanentă*

$$y_p(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t.$$

În relația de identificare

$$\omega G(s) = As + B\omega + (s^2 + \omega^2)Y_{tr}(s),$$

înlocuind pe  $s$  cu  $j\omega$  (pentru a anula suma de pătrate  $s^2 + \omega^2$ ), rezultă

$$\omega G(j\omega) = Aj\omega + B\omega,$$

$$M(\omega)e^{j\Phi(\omega)} = Aj + B,$$

deci

$$A = M(\omega) \sin \Phi(\omega), \quad B = \omega M(\omega) \cos \Phi(\omega).$$

Prin urmare, răspunsul  $y(t)$  al sistemului are *componenta armonică permanentă*

$$\begin{aligned} y_p(t) &= M(\omega)[\sin \Phi(\omega) \cos \omega t + \cos \Phi(\omega) \sin \omega t] \\ &= M(\omega) \sin[\omega t + \Phi(\omega)] \end{aligned}$$

Așadar, pentru intrarea sinusoidală  $u(t) = \sin \omega t$ , forma răspunsului permanent  $y_p(t)$  al sistemului evidențiază faptul că funcția de frecvență

$$G(j\omega) = M(\omega) e^{j\Phi(\omega)}$$

este factorul complex de amplificare în regim armonic permanent.

### 7.3. CARACTERISTICI DE FRECVENȚĂ

Caracteristicile de frecvență cele mai utilizate sunt *caracteristica amplificare-pulsație*  $M(\omega)$  și *caracteristica defazaj-pulsație*  $\Phi(\omega)$ . În conformitate cu relația (11), dacă intrarea sinusoidală  $u(t)$  are amplitudinea egală cu 1 și faza 0, adică  $u(t) = \sin \omega t$ , atunci răspunsul  $y_p(t)$  în regim permanent are amplitudinea  $M(\omega)$  și faza  $\Phi(\omega)$ . Din acest motiv, caracteristicile amplificare-pulsație  $M(\omega)$  și defazaj-pulsație  $\Phi(\omega)$  sunt frecvent utilizate sub denumirile de *caracteristică amplitudine-pulsație* și *caracteristică fază-pulsație*.

În reprezentarea grafică a celor două caracteristici, pulsația  $\omega$  este exprimată frecvent în *scară logaritmică*, amplificarea  $M$  în *decibeli* ( $[M]_{dB} = 20 \lg M$ , unde  $\lg$  este logaritmul zecimal), iar faza  $\Phi$  în *radiani*. Sub această formă, caracteristicile de frecvență sunt cunoscute și sub denumirea de *caracteristici Bode*.

În cazul sistemelor *strict proprii* (cu mai mulți poli decât zerouri, deci cu gradul de inerție mai mare sau egal cu unu), din relația evidentă  $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = 0$  rezultă condiția

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} M(\omega) = 0, \quad (12)$$

care exprimă faptul că factorul de amplificare în regim sinusoidal permanent al sistemelor strict proprii tinde la zero atunci când frecvența de oscilație tinde la infinit. Deoarece toate sistemele fizice au această proprietate,

acestea trebuie considerate strict proprii în domeniul frecvențelor foarte înalte.

La sistemele simplu proprii (cu  $b_n \neq 0$  și gradul de inerție zero), relația  $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = b_n / a_n$  implică

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} M(\omega) = \frac{b_n}{a_n} \neq 0. \quad (13)$$

Valoarea nenulă a factorului de amplificare la pulsații  $\omega \rightarrow \infty$  se datorează faptului că mărimea de ieșire a sistemelor simplu proprii au o componentă care urmărește instantaneu variațiile mărimii de intrare.

În cazul sistemelor continue *fizic realizabile*, caracteristica amplificare-pulsație  $M(\omega)$  trebuie să satisfacă *condiția Paley-Wiener*:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\ln M(\omega)|}{1+\omega^2} d\omega < \infty. \quad (14)$$

Condiția nu este satisfăcută atunci când amplificarea  $M(\omega)$  are valoarea nulă pe un interval de variație a pulsației  $\omega$ . În particular, un *filtru continuu ideal* de tip trece-jos, trece-bandă sau trece-sus (caracterizat printr-o amplificare nulă în afara benzii de trecere) nu este fizic realizabil. Teoretic, se pot obține însă caracteristici amplificare-pulsație oricât de apropiate de cele ale unui filtru ideal.

*Banda de trecere* sau *lărgimea de bandă* a unui filtru trece-jos reprezintă intervalul  $(0, \omega_b)$  în care factorul de amplificare  $M(\omega)$  în regim sinusoidal permanent nu scade mai mult de  $\sqrt{2}$  ori (cu mai mult de 3 dB) în raport cu valoarea sa maximă. O metodă de obținere a celor mai bune *filtre trece-jos* de ordinul  $n$  și cu pulsația de bandă (de tăiere)  $\omega_b$  (fig. 7.1) este metoda *aproximației tip Taylor*, care presupune satisfacerea următoarelor condiții:

$$M(0) = 1, \quad M(\omega_b) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad M^{(i)}(0) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (15)$$

Filtrul trece-jos de ordinul  $n$  obținut cu aproximația Taylor are funcția de transfer

$$G_n(s) = \frac{1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots (T_n s + 1)}, \quad (16)$$

unde



$$\omega_b T_i = \sin \frac{(2i-1)\pi}{2n} + j \cos \frac{(2i-1)\pi}{2n}, \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (17)$$

Pentru  $\omega_b = \frac{1}{T}$  și  $n=1, n=2, n=3$ , avem (fig. 7.2):

$$G_1(s) = \frac{1}{Ts+1}, \quad (18)$$

$$G_2(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + \sqrt{2}Ts + 1}, \quad (19)$$

$$G_3(s) = \frac{1}{(Ts+1)(T^2 s^2 + Ts + 1)}. \quad (20)$$

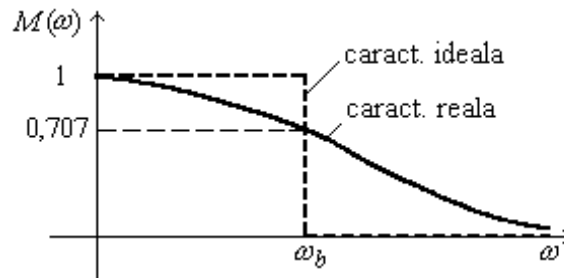


Fig. 7.1. Caracteristica amplitudine-pulsatie a unui filtru trece-jos.

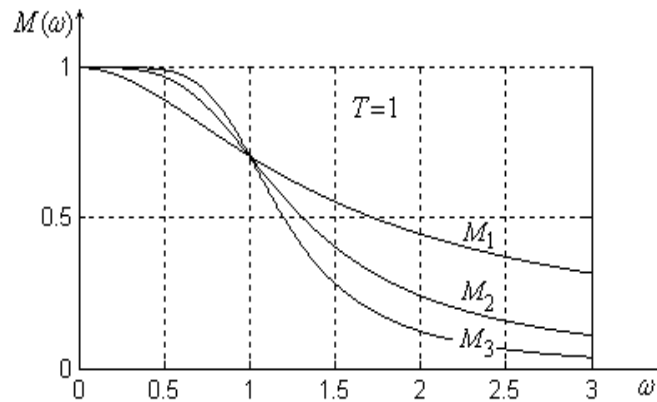


Fig. 7.2. Caracteristicile amplificare-pulsatie ale filtrelor de ordinul 1, 2 și 3.

Graficul funcției de frecvență construit pentru  $\omega \geq 0$  se numește *loc de transfer*, iar graficul funcției de frecvență construit pentru  $\omega \in \mathbf{R}$  se numește *locul lui Nyquist* sau *hodograful funcției de frecvență*. Prin urmare, locul de transfer reprezintă graficul funcției de transfer  $G(s)$  atunci când variabila

complexă  $s$  parcurge în sens crescător semiaxa imaginară pozitivă (cu excepția eventualilor poli situați pe semiaxă). De regulă, trasarea analitică a locului de transfer se face pe baza tabelelor de variație ale funcțiilor  $U(\omega)$  și  $V(\omega)$ .

Locul lui Nyquist reprezintă graficul funcției de transfer  $G(s)$  atunci când variabila complexă  $s$  parcurge întreaga axă imaginară (cu excepția eventualilor poli situați pe axă). Din relațiile  $U(-\omega)=U(\omega)$  și  $V(-\omega)=-V(\omega)$  rezultă că locul lui Nyquist este *simetric* față de axa reală, deci poate fi obținut din locul de transfer prin adăugarea simetricului acestuia față de axa reală. Deoarece semiaxa imaginară pozitivă și axa imaginară sunt contururi deschise, locul de transfer și locul lui Nyquist sunt curbe deschise .

**Sistemul pur integral** are funcția de transfer

$$G(s) = \frac{1}{T_1 s}, \quad T_1 > 0$$

și funcția de frecvență

$$G(j\omega) = \frac{K}{T_1 \omega j},$$

cu

$$U(\omega) = 0, \quad V(\omega) = \frac{-1}{T_1 \omega},$$

$$M(\omega) = \frac{1}{T_1 \omega}, \quad \Phi(\omega) = -\frac{\pi}{2}.$$

În regim sinusoidal permanent, defazajul  $\Phi(\omega)$  este negativ și constant în raport cu pulsația  $\omega$ , iar factorul de amplificare  $M(\omega)$  este strict descrescător spre 0 în raport cu  $\omega$  și tinde la  $\infty$  pentru  $\omega \rightarrow 0$ . Ultima proprietate a factorului de amplificare este irelevantă sub aspect practic, deoarece pulsația  $\omega$  tinde la zero numai atunci când perioada de oscilație tinde la infinit.

Locul de transfer coincide cu semiaxa imaginară negativă, parcursă de jos în sus (fig. 7.3, a).

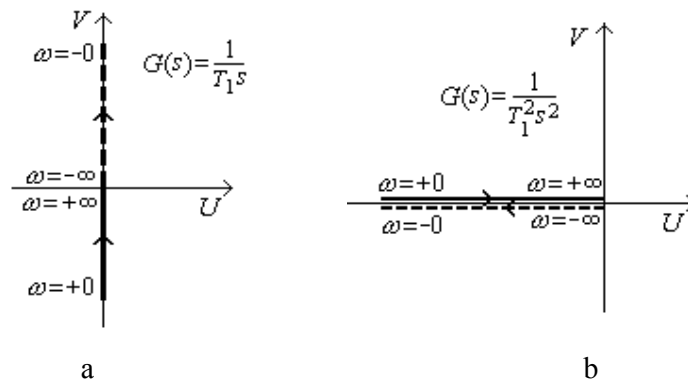


Fig. 7.3. Locul de transfer (linie continuă) și locul Nyquist (linie întreruptă și continuă) ale sistemului simplu integral, respectiv dublu integral.

**Sistemul dublu integral** are cu funcția de transfer

$$G(s) = \frac{1}{T_1^2 s^2}, \quad T_1 > 0$$

și funcția de frecvență

$$G(j\omega) = -1/(T_1^2 \omega^2),$$

cu

$$U(\omega) = \frac{-1}{T_1^2 \omega^2}, \quad V(\omega) = 0,$$

$$M(\omega) = \frac{1}{T_1^2 \omega^2}, \quad \Phi(\omega) = -\pi.$$

Locul de transfer coincide cu semiaxa reală negativă, parcursă de la stânga spre dreapta (fig. 7.3, b).

**Sistemul de întârziere de ordinul unu** are funcția de transfer

$$G(s) = \frac{K}{T_1 s + 1}, \quad K, T > 0$$

și funcția de frecvență

$$G(j\omega) = \frac{K}{T_1 j\omega + 1},$$

cu

$$U(\omega) = \frac{K}{T_1^2 \omega^2 + 1}, \quad V(\omega) = \frac{-KT_1 \omega}{T_1^2 \omega^2 + 1}, \quad (21)$$

$$M(\omega) = \frac{K}{\sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1}}, \quad \Phi(\omega) = -\arctg T_1 \omega. \quad (22)$$

Amplificarea  $M$  este strict descrescătoare în raport cu  $\omega$  (de la valoarea  $K$  la zero). Din caracteristica amplificare-pulsație  $M(\omega)$  reprezentată în fig. 7.4, rezultă că sistemul este un filtru trece-jos cu pulsația de bandă  $\omega_b = 1/T_1$ .

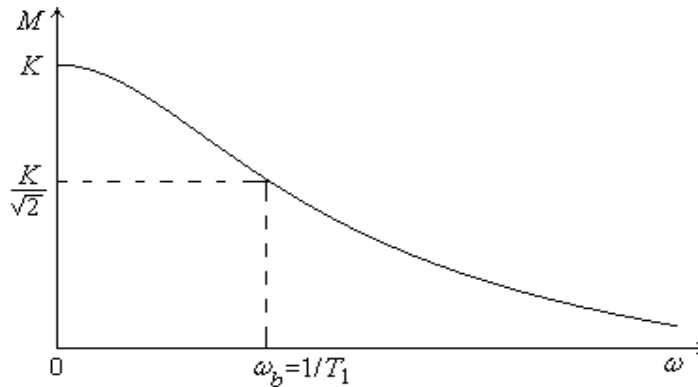


Fig. 7.4. Caracteristica amplificare-pulsație a sistemului de întârziere de ordinul unu.

Defazajul  $\Phi(\omega)$  este negativ și strict descrescător în raport cu pulsația  $\omega$  (de la valoarea 0 la valoarea  $-\pi/2$ ), având valoarea  $-\pi/4$  pentru pulsația de bandă  $\omega_b$ .

Prin eliminarea produsului  $T_1\omega$  între  $U(\omega)$  și  $V(\omega)$ , obținem următoarea ecuație a locului de transfer:

$$(U - K/2)^2 + V^2 = (K/2)^2, \quad V \leq 0.$$

Locul de transfer al sistemului este semicercul inferior (din cadranul IV), care trece prin origine, are centrul în punctul  $(K/2, 0)$  și este reprezentat cu linie continuă în fig. 7.5.

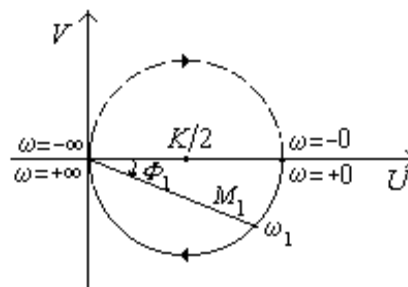


Fig. 7.5. Locul de transfer și locul Nyquist ale sistemului de întârziere de ordinul unu.

Pentru  $\omega = \omega_1$ ,  $M_1$  este factorul de amplificare, iar  $\Phi_1$  - defazajul ieșirii în raport cu intrarea. Locul lui Nyquist, care cuprinde și semicercul superior (din cadranul I), este o curbă deschisă care nu conține originea.

**Sistemul derivativ de ordinul unu** are funcția de transfer

$$G(s) = \frac{\tau_1 s}{T_1 s + 1}, \quad T_1, \tau_1 > 0$$

și funcția de frecvență

$$G(j\omega) = \frac{\tau_1 j\omega}{T_1 j\omega + 1},$$

cu

$$U(\omega) = \frac{\tau_1 T_1 \omega^2}{T_1^2 \omega^2 + 1}, \quad (23)$$

$$V(\omega) = \frac{\tau_1 \omega}{T_1^2 \omega^2 + 1}, \quad (24)$$

$$M(\omega) = \frac{\tau_1 \omega}{\sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1}}, \quad (25)$$

$$\Phi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctg T_1 \omega. \quad (26)$$

Defazajul  $\Phi$  este pozitiv și strict descrescător în raport cu pulsația  $\omega$  (de la  $\pi/2$  la zero), iar amplificarea  $M$  este strict crescătoare cu  $\omega$  (de la valoarea zero la  $\tau_1/T_1$ ). Sistemul este un filtru trece-sus cu pulsația inferioară de bandă  $\omega_b = 1/T_1$  (fig. 7.6).

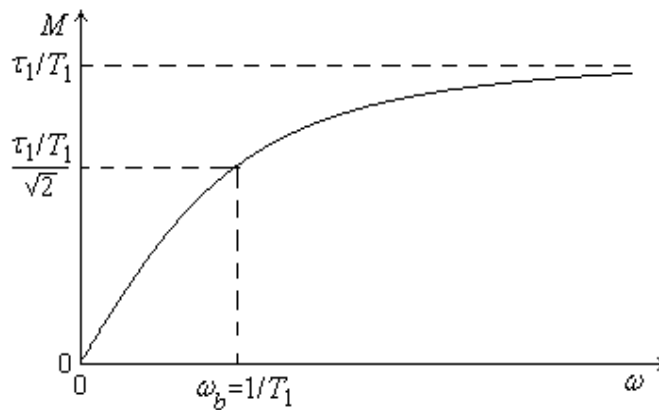


Fig. 7.6. Caracteristica amplitudine-pulsație a sistemului derivativ de ordinul unu.

Prin eliminarea variabilei  $\omega$  între  $U(\omega)$  și  $V(\omega)$ , rezultă următoarea ecuație a locului de transfer (fig. 7.7):

$$\left(U - \frac{\tau_1}{2T_1}\right)^2 + V^2 = \left(\frac{\tau_1}{2T_1}\right)^2, \quad V > 0. \quad (27)$$

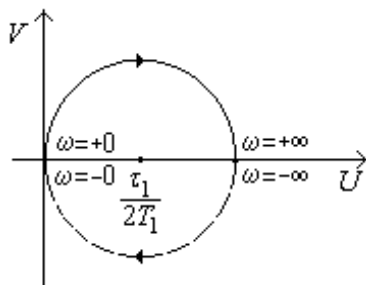


Fig. 7.7. Locul de transfer și locul Nyquist ale sistemului derivativ de ordinul unu.

**Sistemul de avans-întârziere de ordinul unu** are funcția de transfer

$$G(s) = K \frac{\tau_1 s + 1}{T_1 s + 1}, \quad K, T_1, \tau_1 > 0$$

și funcția de frecvență

$$G(j\omega) = \frac{K(\tau_1 j\omega + 1)}{T_1 j\omega + 1},$$

deci

$$U(\omega) = \frac{K(\tau_1 T_1 \omega^2 + 1)}{T_1^2 \omega^2 + 1} = \frac{K}{T_1} \left( \tau_1 + \frac{T_1 - \tau_1}{T_1^2 \omega^2 + 1} \right), \quad (28)$$

$$V(\omega) = \frac{-K(T_1 - \tau_1)\omega}{T_1^2 \omega^2 + 1}, \quad (29)$$

$$M(\omega) = K \frac{\sqrt{\tau_1^2 \omega^2 + 1}}{\sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1}}, \quad (30)$$

$$\Phi(\omega) = \arctg \tau_1 \omega - \arctg T_1 \omega. \quad (31)$$

Defazajul  $\Phi$  este negativ atunci când efectul de întârziere este dominant ( $T_1 > \tau_1$ ) și pozitiv - când efectul de avans este dominant ( $\tau_1 > T_1$ ).

Din caracteristica amplificare-pulsație  $M(\omega)$ , rezultă că:

- (a) pentru  $\tau_1 < \frac{T_1}{\sqrt{2}}$ , sistemul este un filtru trece-jos cu pulsația superioară de bandă  $\omega_b = \frac{1}{\sqrt{T_1^2 - 2\tau_1^2}}$ ;
- (b) pentru  $\frac{T_1}{\sqrt{2}} \leq \tau_1 \leq \sqrt{2}T_1$ , sistemul este un filtru trece-tot;
- (c) pentru  $\tau_1 > \sqrt{2}T_1$ , sistemul este un filtru trece-sus cu pulsația inferioară de bandă  $\omega_b = \frac{\sqrt{\tau_1^2 - 2T_1^2}}{\tau_1 T_1}$  (fig. 7.8).

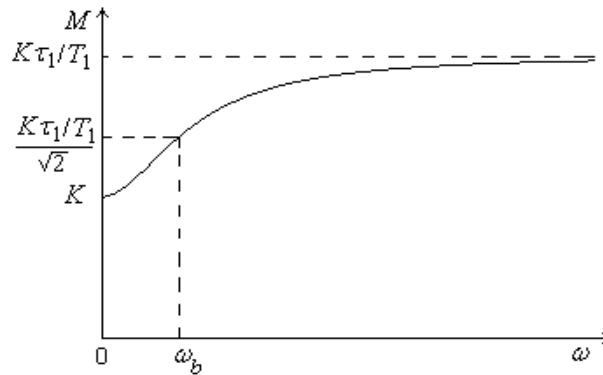


Fig. 7.8. Caracteristica amplificare-pulsație a sistemului de avans-întârziere de ordinul unu cu  $\tau_1 > \sqrt{2}T_1$  (filtru trece-sus).

Prin eliminarea variabilei  $\omega$  între  $U(\omega)$  și  $V(\omega)$ , rezultă următoarea ecuație a locului de transfer și locului lui Nyquist:

$$U^2 - K\left(1 + \frac{\tau_1}{T_1}\right)U + V^2 + K^2 \frac{\tau_1}{T_1} = 0. \quad (32)$$

În cazul în care efectul de avans este dominant ( $\tau_1 > T_1$ ), locul de transfer al sistemului este semicercul superior (din cadranul I), care intersectează axa reală în punctele  $(K, 0)$  și  $(K \frac{\tau_1}{T_1}, 0)$  - fig. 7.9. Locul lui Nyquist cuprinde și semicercul inferior (din cadranul IV), dar nu conține punctul  $(K \frac{\tau_1}{T_1}, 0)$ .

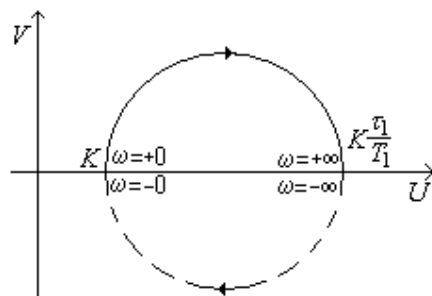


Fig. 7.9. Locul de transfer și locul Nyquist ale sistemului de avans-întârziere de ordinul unu cu  $\tau_1 > T_1$ .

**Sistemul de întârziere de ordinul doi de tip oscilant amortizat** are funcția de transfer

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}, \quad 0 < \xi < 1, \quad \omega_n > 0$$

și funcția de frecvență

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2\xi\omega_n(j\omega)},$$

deci

$$U(x) = \frac{1-x^2}{(1-x^2)^2 + 4\xi^2 x^2}, \quad V(x) = \frac{-2\xi x}{(1-x^2)^2 + 4\xi^2 x^2}, \quad (33)$$

$$M(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + 4\xi^2 x^2}}, \quad \text{tg } \Phi(\omega) = \frac{2\xi x}{x^2 - 1}, \quad (34)$$

unde  $x = \omega/\omega_n$  este pulsația relativă.

În cazul  $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \xi \leq 1$ , amplificarea  $M$  este descrescătoare în raport cu  $x$ , deci cu pulsația  $\omega$  (fig. 7.10).

În cazul  $0 < \xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$ , amplificarea  $M$  atinge valoarea maximă  $\frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$  pentru  $x = \sqrt{1-2\xi^2} < 1$ , adică pentru  $\omega = \omega_n \sqrt{1-2\xi^2} < \omega_n$ .

În cazul  $\xi=0$ , amplificarea  $M$  tinde la  $\infty$  atunci când pulsația  $\omega$  tinde spre valoarea  $\omega_n$  (fenomen de rezonanță).



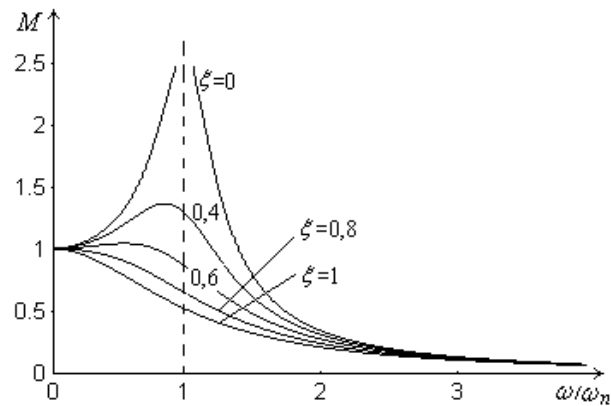


Fig. 7.10. Caracteristica amplitudine-pulsație a sistemului oscilant de ordinul doi.

Defazajul  $\Phi$  este negativ și strict descrescător în raport cu pulsația  $\omega$  (de la zero la  $-\pi$ ), fiind egal cu  $-\pi/2$  pentru  $\omega=\omega_n$  (fig. 7.11).

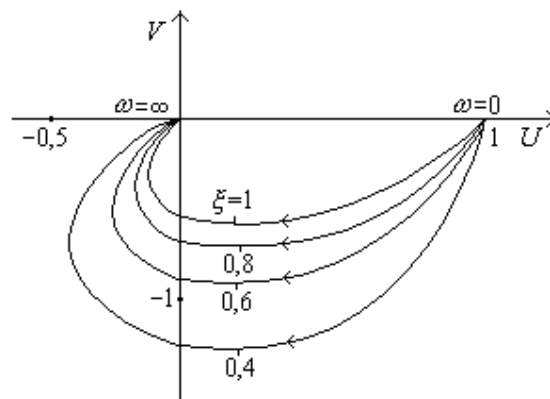


Fig. 7.11. Locul de transfer al sistemului de întârziere de ordinul doi.

**Sistemul timp mort pur** are funcția de transfer

$$G_\tau(s) = e^{-\tau s} \quad (35)$$

și funcția de frecvență

$$G_\tau(j\omega) = e^{-j\tau\omega}, \quad (36)$$

cu modulul unitar și argumentul linear descrescător în raport cu  $\omega$ :

$$M_\tau(\omega) = 1, \quad \Phi_\tau(\omega) = -\tau\omega. \quad (37)$$

Prin urmare, în cazul sistemului cu timp mort cu funcția de transfer

$$G_m(s) = G(s)e^{-\tau s},$$

unde  $G(s)$  este funcția de transfer a sistemului fără timp mort, avem

$$M_m(\omega) = M(\omega), \quad \Phi_m(\omega) = \Phi(\omega) - \tau\omega. \quad (38)$$

Rezultă că locul de transfer al sistemului cu timp mort poate fi obținut prin „spiralizarea” în sens orar a locului de transfer al sistemului fără timp mort, adică prin rotirea în sens orar, în jurul originii, cu unghiul  $\tau\omega$  (exprimat în radiani), a fiecărui punct al locului de transfer fără timp mort.

**Sistemul pur integral cu timp mort** are funcția de transfer

$$G_m(s) = \frac{1}{s} e^{-\tau s} \quad (39)$$

și funcția de frecvență

$$G_m(j\omega) = \frac{1}{j\omega} e^{-\tau j\omega} = \frac{-\sin \tau\omega - j \cos \tau\omega}{\omega},$$

din care rezultă

$$M_m(\omega) = \frac{1}{\omega}, \quad \Phi_m(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \tau\omega, \quad (40)$$

$$U_m(\omega) = \frac{-\sin \tau\omega}{\omega}, \quad V_m(\omega) = \frac{-\cos \tau\omega}{\omega}. \quad (41)$$

Din ecuația  $\Phi_m(\omega) = -(2k+1)\pi$ , obținem pulsațiile punctelor de intersecție a locului de transfer cu semiaxa reală negativă (fig. 7.12):

$$\omega_k = \frac{(4k+1)\pi}{2\tau}, \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (42)$$

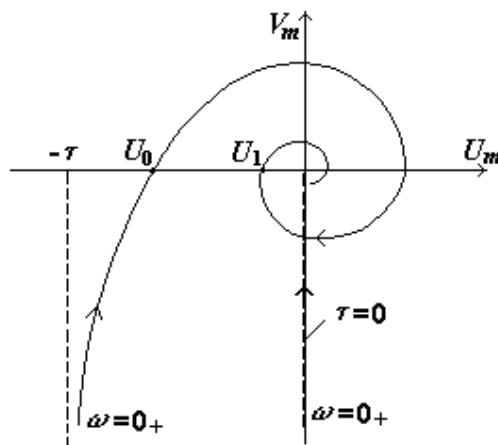


Fig. 7.12. Locul de transfer al sistemului pur integral cu timp mort.

Deoarece  $\sin \omega_k \tau = 1$ , punctele de intersecție cu semiaxa reală negativă au partea reală

$$U_k = \frac{-1}{\omega_k} = \frac{-2\tau}{(4k+1)\pi}, \quad (43)$$

deci

$$U_0 = \frac{-2\tau}{\pi}, \quad U_1 = \frac{-2\tau}{5\pi}, \quad \dots \quad (44)$$

**Sistemul de întârziere de ordinul unu cu timp mort**, cu funcția de transfer

$$G_m(s) = \frac{1}{T_1 s + 1} e^{-\tau s}, \quad (45)$$

are funcția de frecvență

$$G_m(j\omega) = \frac{1}{T_1 \omega j + 1} e^{-\tau j\omega} = \frac{\cos \tau\omega - j \sin \tau\omega}{T_1 \omega j + 1} = \frac{(1 - T_1 \omega j)(\cos \tau\omega - j \sin \tau\omega)}{T_1^2 \omega^2 + 1},$$

din care rezultă

$$M_m(\omega) = \frac{1}{\sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1}}, \quad \Phi_m(\omega) = -\arctg T_1 \omega - \tau\omega, \quad (46)$$

$$U_m(\omega) = \frac{\cos \tau\omega - T_1 \omega \sin \tau\omega}{T_1^2 \omega^2 + 1}, \quad (47)$$

$$V_m(\omega) = \frac{-\sin \tau\omega - T_1 \omega \cos \tau\omega}{T_1^2 \omega^2 + 1}. \quad (48)$$

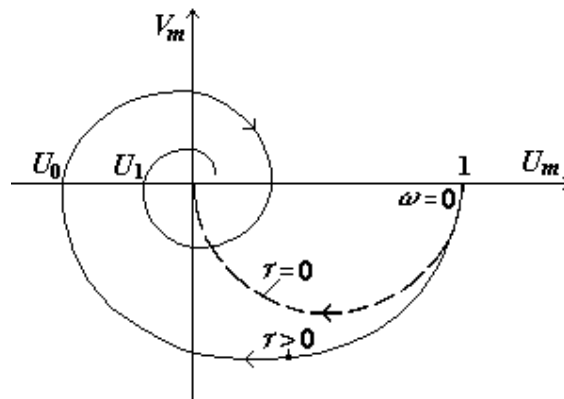


Fig. 7.13. Locul de transfer al sistemului de întârziere de ordinul unu cu timp mort.

Prima intersecție a locului de transfer cu semiaxa reală negativă (fig. 7.13) are partea reală  $U_0 = \cos \tau\omega_0$ , unde pulsația  $\omega_0$  este dată de relația

$$T_1 \omega_0 + \operatorname{tg} \tau\omega_0 = 0, \quad \frac{\pi}{2} < \tau\omega_0 < \pi. \quad (49)$$

### Sisteme de fază minimă și neminimă

Un sistem liniar este de *fază minimă* atunci când, pentru o caracteristică amplificare-pulsație  $M(\omega)$  dată, defazajul  $\Phi(\omega)$  în regim sinusoidal permanent între mărimea de ieșire și mărimea de intrare este minim (în modul). De exemplu, sistemele cu funcțiile de transfer

$$G_1(s) = \frac{2s+1}{5s+1}, \quad G_2(s) = \frac{-2s+1}{5s+1},$$

au aceeași amplificare în frecvență, anume

$$M_1(\omega) = M_2(\omega) = \frac{\sqrt{4\omega^2 + 1}}{\sqrt{25\omega^2 + 1}},$$

dar defazaje diferite:

$$\Phi_1(\omega) = \operatorname{arctg} 2\omega - \operatorname{arctg} 5\omega, \quad \Phi_2(\omega) = -\operatorname{arctg} 2\omega - \operatorname{arctg} 5\omega,$$

Primul sistem este de fază minimă, iar al doilea de fază neminimă, deoarece

$$|\Phi_1(\omega)| < |\Phi_2(\omega)|, \quad \omega > 0.$$

Sistemele de fază minimă au toate zerourile funcției de transfer cu partea reală negativă sau nulă, iar sistemele cu fază neminimă au cel puțin un zerou cu partea reală pozitivă.

■ In MATLAB, pentru reprezentarea locului lui Nyquist al unui sistem *sis* se utilizează funcția *nyquist*, sub una din formele

- `nyquist(sis)` ;
- `nyquist(sis,w)` ;
- `[Re,Im,w]=nyquist(sis,w)` .

Dacă funcția *nyquist* este apelată cu argumentele de ieșire `[Re,Im,w]`, în locul reprezentării grafice a locului de transfer sunt returnate valorile părții reale *Re* și ale părții imaginare *Im* în raport cu valorile vectorului pulsație *w*.

#### 7.4. FUNCȚIA DE FRECVENȚĂ A SISTEMELOR DISCRETE

Considerăm sistemul linear discret cu funcția de transfer  $G(z)$  și pasul  $T$ . Prin definiție, *funcția de frecvență a sistemului este funcția complexă*  $G(e^{j\omega T})$ , unde  $\omega \in [0, \frac{\pi}{T}]$ . Ca și la sistemele continue, funcția de frecvență poate fi scrisă sub forma

$$G(e^{j\omega T}) = M(\omega)e^{j\Phi(\omega)}, \quad (50)$$

unde  $M(\omega)$  și  $\Phi(\omega)$  reprezintă respectiv *modulul* și *argumentul* funcției de frecvență. De asemenea, funcția de frecvență poate fi scrisă sub forma

$$G(e^{j\omega T}) = U(\omega) + jV(\omega), \quad (51)$$

unde  $U(\omega)$  este *partea reală a funcției de frecvență*, iar  $V(\omega)$  este *partea imaginară*.

**Teorema filtrării.** *Pentru un sistem linear discret având toți polii cu modulul subunitar, aflat în regim sinusoidal permanent cu pulsația  $\omega$ , modulul și argumentul funcției de frecvență  $G(e^{j\omega T})$  reprezintă factorul de amplificare și, respectiv, defazajul ieșirii în raport cu intrarea.*

Pentru demonstrarea teoremei, considerăm că la intrarea sistemului cu funcția de transfer  $G(z)$  se aplică semnalul discret sinusoidal  $u(t) = \sin \omega t$ , cu perioada de discretizare  $T$ . Trebuie să arătăm că răspunsul sistemului în regim permanent are expresia

$$y_p(t) = M(\omega) \sin[\omega t + \Phi(\omega)]. \quad (52)$$

Transformata  $Z$  a răspunsului sistemului este

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{(\sin \omega T)z^{-1}}{1 - 2(\cos \omega T)z^{-1} + z^{-2}} G(z) \\ &= \frac{A(\sin \omega T)z^{-1} + B[1 - (\cos \omega T)z^{-1}]}{1 - 2(\cos \omega T)z^{-1} + z^{-2}} + Y_{tr}(z), \end{aligned} \quad (53)$$

unde  $Y_{tr}(z)$  are aceeași poli ca  $G(z)$ , deci poli cu modulul subunitar. Din proprietatea valorii finale, rezultă

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{tr}(t) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})Y_{tr}(z) = 0.$$

În consecință, răspunsul  $y(t)$  al sistemului are componenta sinusoidală permanentă

$$y_p(t) = \mathcal{Z}^{-1} \left[ \frac{A(\sin \omega T)z^{-1} + B[1 - (\cos \omega T)z^{-1}]}{1 - 2(\cos \omega T)z^{-1} + z^{-2}} \right] = A \sin \omega t + B \cos \omega t.$$

Pentru determinarea constantelor  $A$  și  $B$ , scriem relația (53) sub forma

$$G(z) \sin \omega T = A \sin \omega T + B(z - \cos \omega T) + (z - 2 \cos \omega T + z^{-1})Y_{tr}(z),$$

apoi înlocuim pe  $z$  cu  $e^{j\omega T}$ . Deoarece  $z - 2 \cos \omega T + z^{-1} = 0$ , obținem

$$G(e^{j\omega T}) = A + jB,$$

$$M(\omega)e^{j\Phi(\omega)} = A + jB,$$

deci

$$A = M(\omega) \cos \Phi(\omega), \quad B = M(\omega) \sin \Phi(\omega),$$

apoi

$$\begin{aligned} y_p(t) &= A \sin \omega t + B \cos \omega t \\ &= M(\omega) [\cos \Phi(\omega) \sin \omega t + \sin \Phi(\omega) \cos \omega t] \\ &= M(\omega) \sin[\omega t + \Phi(\omega)]. \end{aligned}$$

Relația obținută pune în evidență faptul că funcția de frecvență  $G(e^{j\omega T})$  reprezintă factorul complex de amplificare în regim armonic permanent.

## 7.5. APLICAȚII REZOLVATE

◆ **Aplicația 7.1.** Se dă sistemul cu ecuația

$$T_1 \dot{y} + y = 4\tau_1 \dot{u},$$

unde  $T_1 = 10$  s și  $\tau_1 = 3$  s. Să se afle:

- valoarea maximă a amplificării în regim sinusoidal permanent;
- pulsația inferioară de bandă  $\omega_b$ ;
- amplitudinea  $A$  și faza  $\alpha$  a răspunsului permanent al sistemului la intrarea

$$u = 3 \sin \frac{t}{2}.$$

**Soluție.** (a) Sistemul are funcția de transfer

$$G(s) = \frac{4\tau_1 s}{T_1 s + 1} = \frac{12s}{10s + 1}$$

și funcția de frecvență

$$G(j\omega) = \frac{12j\omega}{10j\omega + 1}.$$

Amplificarea sistemului este egală cu modulul funcției de frecvență (teorema filtrării), care este egal cu raportul dintre modulul numărătorului și cel al numitorului:

$$M(\omega) = \frac{12\omega}{\sqrt{100\omega^2 + 1}} = \frac{6}{5} \sqrt{1 - \frac{1}{100\omega^2 + 1}}.$$

Deoarece funcția  $M(\omega)$  este crescătoare, sistemul este un filtru trece sus, cu amplificarea

$$M(\omega) < \lim_{\omega \rightarrow \infty} M(\omega) = \frac{6}{5}.$$

(b) Pulsația inferioară de bandă este dată de relația

$$M(\omega_b) = \frac{M_{\max}}{\sqrt{2}}.$$

Rezultă ecuația

$$\frac{12\omega_b}{\sqrt{100\omega_b^2 + 1}} = \frac{6}{5\sqrt{2}},$$

din care obținem

$$\omega_b = 0,1 \text{ rad/s.}$$

(c) Răspunsul permanent al sistemului la intrarea

$$u = 3 \sin \frac{t}{2}$$

are forma

$$y_p = A \sin\left(\frac{t}{2} + \alpha\right),$$

unde

$$A = M(1/2) \cdot 3 = \frac{18}{\sqrt{26}}.$$

Faza răspunsului permanent este egală cu defazajul dintre semnalul de ieșire și cel de intrare, deci cu argumentul funcției de frecvență (teorema filtrării), egal cu diferența dintre argumentul numărătorului și cel al numitorului funcției de frecvență:

$$\Phi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctg(10\omega).$$

Prin urmare, faza răspunsului permanent este  $\alpha = \frac{\pi}{2} - \arctg 5 > 0$ .

◆ **Aplicația 7.2.** Să se determine parametrii  $a$ ,  $b$  și  $c$  astfel încât

$$e^{-2s} \approx \frac{b+cs}{1+as}.$$

**Soluție.** Scriem relația de aproximație sub forma

$$\frac{1}{1 + \frac{2s}{1!} + \frac{(2s)^2}{2!} + \dots} \approx \frac{b+cs}{1+as}$$

și impunem condiția ca dezvoltările  $A(s)=1+as$  și  $B(s)=(b+cs)[1+\frac{2s}{1!}+\frac{(2s)^2}{2!}+\dots]$  să aibă coeficienții primelor puteri ale lui  $s$  egali. Deoarece

$$B(s)=b+(2b+c)s+(2b+2c)s^2+\dots,$$

formăm ecuațiile  $1=b$ ,  $a=2b+c$ ,  $0=2b+2c$ , de unde rezultă  $b=1$ ,  $c=-1$ ,  $a=1$ , deci

$$e^{-2s} \approx \frac{1-s}{1+s}.$$

*Remarcă.* O soluție similară este următoarea. Scriem relația de aproximație sub forma

$$1 - \frac{2s}{1!} + \frac{(2s)^2}{2!} - \dots \approx \frac{b+cs}{1+as}$$

și impunem condiția ca dezvoltările

$$A(s)=(1+as)[1-\frac{2s}{1!}+\frac{(2s)^2}{2!}-\dots]$$

și  $B(s)=b+cs$  să aibă coeficienții primelor puteri ale lui  $s$  egali. Deoarece

$$A(s)=1+(a-2)s+(-2a+2)s^2+\dots,$$

formăm ecuațiile  $1=b$ ,  $a-2=c$ ,  $-2a+2=0$ , de unde rezultă  $b=1$ ,  $a=1$ ,  $c=-1$ , deci

$$e^{-2s} \approx \frac{1-s}{1+s}.$$

◆ **Aplicația 7.3.** Considerăm sistemele cu funcțiile de transfer

$$G_1(s)=\frac{1}{T_1s+1}, \quad G_2(s)=\frac{T_1s}{3T_1s+1}, \quad T_1>0.$$

Pentru ce valoare pozitivă a pulsației  $\omega$  factorii de amplificare ai celor două sisteme în regim sinusoidal permanent sunt egali?

**Soluție.** Avem



$$G_1(j\omega) = \frac{1}{T_1 j\omega + 1}, \quad G_2(j\omega) = \frac{T_1 j\omega}{3T_1 j\omega + 1},$$

$$M_1(\omega) = \frac{1}{\sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1}}, \quad M_2(\omega) = \frac{T_1 \omega}{\sqrt{9T_1^2 \omega^2 + 1}},$$

Din ecuația

$$M_1(\omega) = M_2(\omega),$$

rezultă

$$(T_1^2 \omega^2)^2 - 8T_1^2 \omega^2 - 1 = 0,$$

$$\omega = \frac{\sqrt{4 + \sqrt{17}}}{T_1}.$$

♦ **Aplicația 7.4.** Considerăm sistemul numeric cu pasul  $T$  și funcția de transfer

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}.$$

Să se afle factorul de amplificare și defazajul ieșirii în raport cu intrarea în regim sinusoidal permanent.

**Soluție.** Sistemul are funcția de frecvență

$$G(e^{j\omega T}) = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\omega T}}{1 + a_1 e^{-j\omega T}} = \frac{b_0 + b_1 \cos \omega T - j b_1 \sin \omega T}{1 + a_1 \cos \omega T - j a_1 \sin \omega T}.$$

Rezultă (fig. 7.14)

$$M(\omega) = \frac{\sqrt{(b_0 + b_1 \cos \omega T)^2 + b_1^2 \sin^2 \omega T}}{\sqrt{(1 + a_1 \cos \omega T)^2 + a_1^2 \sin^2 \omega T}} = \frac{\sqrt{b_0^2 + 2b_0 b_1 \cos \omega T + b_1^2}}{\sqrt{1 + 2a_1 \cos \omega T + a_1^2}}$$

și

$$\Phi(\omega) = \Phi_1(\omega) - \Phi_2(\omega),$$

unde

$$\operatorname{tg} \Phi_1(\omega) = \frac{-b_1 \sin \omega T}{b_0 + b_1 \cos \omega T}, \quad \operatorname{tg} \Phi_2(\omega) = \frac{-a_1 \sin \omega T}{1 + a_1 \cos \omega T}.$$

În cazul particular  $b_0 = 0$ , rezultă

$$M(\omega) = \frac{|b_1|}{\sqrt{1 + 2a_1 \cos \omega T + a_1^2}},$$

iar în cazul particular  $b_1 = 0$ , rezultă

$$M(\omega) = \frac{|b_0|}{\sqrt{1 + 2a_1 \cos \omega T + a_1^2}}.$$

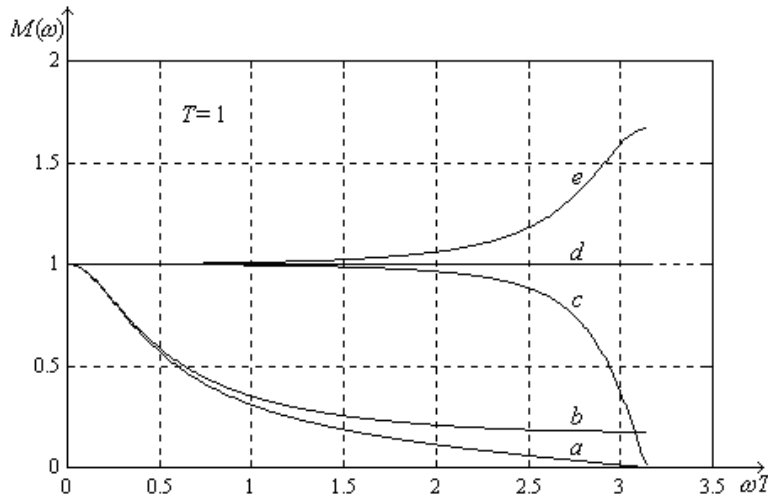


Fig. 7.14. Modulul funcției de frecvență în cazurile:

- a)  $a_1=-0,7; b_0=0,15; b_1=0,15;$
- b)  $a_1=-0,7; b_0=0; b_1=0,3;$
- c)  $a_1=0,7; b_0=0,85; b_1=0,85;$
- d)  $a_1=0,7; b_0=1; b_1=0,7;$
- e)  $a_1=0,7; b_0=0,6; b_1=1,1;$

### 7.6. APLICAȚII DE AUTOCONTROL

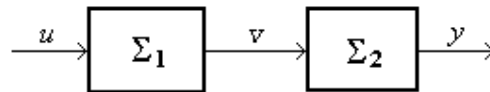
◆ C7.1. Se dă sistemul cu ecuația  $T_1\dot{y} + y = u$ , unde  $T_1 = 10$  s. Să se afle:

(a) pulsația de bandă  $\omega_b$ ;

(b) amplitudinea  $A$  și defazajul  $\alpha$  al răspunsului  $y_p = A\sin(t/4 + \alpha)$  al sistemului în regim sinusoidal permanent pentru  $u = 2\sin t/4$ .

◆ C7.2. Fie conexiunea serie formată din subsistemele:

$$\Sigma_1: 4\dot{v} + v = 3\dot{u} + u, \quad \Sigma_2: 5\dot{y} + y = 2v.$$



a) Pentru  $u = 2\sin \frac{t}{3}$ , să se afle răspunsul permanent  $v_p(t) = A\sin(\frac{t}{3} + \alpha)$ ;

b) Pentru  $u = \sin \frac{t}{2}$ , să se afle răspunsul permanent  $y_p(t) = A\sin(\frac{t}{2} + \alpha)$ .

◆ C7.3. Se dă sistemul

$$\begin{cases} 2\dot{x}_1 = x_2 \\ 2\dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 + u \end{cases}, \quad y = 6x_1.$$

Să se afle banda de trecere și amplificarea în regim permanent sinusoidal cu pulsația  $\omega = 1$  rad/sec.



# 8

---

## STABILITATEA SISTEMELOR LINIARE

---

Conceptul de stabilitate a fost introdus pentru a ilustra caracterul mărginit sau nemărginit al mărimilor de stare și/sau de ieșire, în condițiile în care mărimile de intrare sunt mărginite.

În domeniul stabilității sistemelor liniare se utilizează două concepte: conceptul de *stabilitate internă* (referitoare la mărginirea stării sistemului) și conceptul de *stabilitate externă* (referitoare la mărginirea ieșirii sistemului). Deoarece ieșirea curentă a unui sistem liniar este o funcție liniară în raport cu starea acestuia, dacă starea este mărginită (sistemul este intern stabil), atunci și ieșirea este mărginită (sistemul este extern stabil). Reciproca acestei afirmații nu este adevărată, deoarece un sistem poate avea ieșirea mărginită în condițiile în care starea este nemărginită. Un exemplu în acest sens este reprezentat de sistemele monovariabile de ordinul doi cu variabila de stare  $x_1$  mărginită, variabila de stare  $x_2$  nemărginită și mărimea de ieșire dependentă numai de starea  $x_1$ .

Deoarece sistemele fizice sunt liniare cel mult într-un domeniu limitat de variație a mărimilor de stare și de ieșire, conceptele și teoremele generale de stabilitate internă și externă trebuie aplicate numai în interiorul domeniului de liniaritate. În plus, toate sistemele fizice liniare pe un anumit domeniu au caracteristici neliniare de tip saturație și blocare în exteriorul domeniului de liniaritate. De exemplu, nivelul de lichid într-un rezervor nu poate depăși înălțimea rezervorului și nici nu poate scădea sub valoarea zero indiferent de modul în care variază debitele de admisie și de evacuare. În consecință, mărimile de stare și de ieșire ale sistemelor fizice instabile rămân totuși mărginite, stabilizându-se la valori situate în domeniul de neliniaritate sau oscilând între zona de saturație și zona de blocare. În cele ce urmează, vom considera cazul teoretic al sistemelor cu domeniu de liniaritate nemărginit. În practică, rezultatele obținute în această ipoteză trebuie adaptate și corectate în conformitate cu cele prezentate mai sus.

### 8.1. STABILITATEA INTERNĂ

Prin definiție, un sistem liniar este *intern strict (asimptotic) stabil* dacă starea sistemului evoluează liber în spațiul stărilor spre origine, adică

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X_{\ell}(t) = 0, \quad (1)$$

oricare ar fi starea inițială. Un sistem liniar este *intern simplu (la limită) stabil* dacă starea acestuia evoluează liber spre o curbă închisă, parcursă la nesfârșit. În consecință, un sistem liniar este *intern stabil* (strict sau simplu) dacă starea sistemului evoluează liber într-un domeniu mărginit al spațiului stărilor, oricare ar fi starea inițială. Un sistem care nu este intern stabil se numește *intern instabil*. În regim liber, traiectoriile de stare ale unui sistem instabil sunt divergente.

Starea liberă are expresia

$$X_{\ell}(t) = \Phi(t)X_0, \quad (2)$$

unde  $\Phi(t)$  este matricea fundamentală sau de tranziție a stării, egală cu  $e^{At}$  ( $t \in \mathbf{R}_+$ ) la sistemele liniare continue, respectiv cu  $A^t$  ( $t \in \mathbf{N}$ ) la sistemele liniare discrete. Din (1) și (2) obținem imediat

**Lema stabilității interne stricte.** *Un sistem liniar este intern strict stabil dacă și numai dacă matricea de tranziție a stării tinde spre zero, adică*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) = 0. \quad (3)$$

Din lema stabilității interne reiese că stabilitatea internă a unui sistem liniar (continuu sau discret) este o proprietate asociată exclusiv matricei  $A$ , deci o *proprietate internă* a sistemului.

**Teorema stabilității interne stricte.** a) *Un sistem liniar continuu este intern strict stabil dacă și numai dacă toate rădăcinile polinomului caracteristic au partea reală negativă (sunt situate în semiplanul complex stâng).*

b) *Un sistem liniar discret este intern strict stabil dacă și numai dacă toate rădăcinile polinomului caracteristic au modulul subunitar (sunt situate în interiorul discului unitar cu centrul în originea planului complex).*

Pentru demonstrație, reamintim că rădăcinile polinomului caracteristic  $\mathcal{P}(s)$  sunt valorile proprii ale matricei  $A$ , adică

$$\mathcal{P}(s) = \det(sI - A), \quad (4)$$

Pentru un *sistem liniar continuu* cu valorile proprii  $s_1, s_2, \dots, s_n$  distincte, matricea de tranziție a sistemului poate fi scrisă sub forma

$$e^{At} = V e^{\bar{A}t} V^{-1},$$

unde  $V$  este matricea pătrată a vectorilor proprii, iar

$$e^{\bar{A}t} = \text{diag} (e^{s_1 t}, e^{s_2 t}, \dots, e^{s_n t}).$$

Deoarece matricea  $V$  este nesingulară, avem

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} = 0 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\bar{A}t} = 0 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} e^{s_i t} = 0 \quad \forall i \Leftrightarrow \text{Re } s_i < 0 \quad \forall i.$$

Similar, în cazul unui *sistem liniar discret* cu valorile proprii  $z_1, z_2, \dots, z_n$  distincte, matricea de tranziție a stării poate fi scrisă sub forma

$$A^t = V \bar{A}^t V^{-1},$$

cu

$$\bar{A}^t = \text{diag} (z_1^t, z_2^t, \dots, z_n^t);$$

prin urmare, avem

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A^t = 0 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{A}^t = 0 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} z_i^t = 0 \quad \forall i \Leftrightarrow |z_i| < 1 \quad \forall i.$$

Aceste rezultate sunt valabile și la sistemele continue și discrete cu valori proprii multiple.

Referitor la stabilitatea generală (strictă sau simplă), din (2) rezultă că *un sistem liniar este intern stabil dacă și numai dacă matricea de tranziție a stării este finită, adică există  $M > 0$  astfel încât*

$$\| \Phi(t) \| \leq M \quad \forall t \geq 0. \quad (5)$$

În cazul unui sistem continuu cu valori proprii distincte, matricea  $\Phi(t)$  este mărginită dacă și numai dacă matricea diagonală  $e^{\bar{A}t}$  este mărginită. Condiția este satisfăcută atunci când toate funcțiile  $e^{s_i t}$  sunt mărginite, adică atunci când  $\text{Re } s_i \leq 0$  pentru  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Dacă matricea  $A$  are o valoare proprie dublă, de exemplu  $s_1 = s_2$ , atunci matricea bloc diagonală  $e^{\bar{A}t}$  conține blocul diagonal

$$e^{\bar{A}_{12}t} = \begin{bmatrix} e^{s_1 t} & t e^{s_1 t} \\ 0 & e^{s_1 t} \end{bmatrix}.$$

Se observă că matricea  $e^{\bar{A}_{12}t}$  nu este mărginită în cazul  $\operatorname{Re} s_{1,2} = 0$ . Acest rezultat poate fi extins prin

**Teorema stabilității interne.** a) *Un sistem continuu este intern stabil dacă toate rădăcinile polinomului caracteristic au partea reală negativă sau nulă, cele cu partea reală nulă fiind rădăcini simple.*

b) *Un sistem discret este intern stabil dacă toate rădăcinile polinomului caracteristic au modulul subunitar sau unitar, cele cu modulul unitar fiind rădăcini simple.*

**Observații. 1°.** Din dezvoltarea

$$\det(sI - A) = s^n - (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})s^{n-1} + \dots$$

reiese că suma rădăcinilor polinomului caracteristic al matricei  $A$  este egală cu suma elementelor diagonale ale matricei  $A$ , adică

$$s_1 + s_2 + \dots + s_n = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} . \quad (6)$$

Pentru un *sistem continuu*, deoarece

$$\operatorname{Re} s_1 + \operatorname{Re} s_2 + \dots + \operatorname{Re} s_n = s_1 + s_2 + \dots + s_n = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} ,$$

rezultă că dacă

$$a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} > 0, \quad (7)$$

atunci există o rădăcină  $s_i$  astfel încât  $\operatorname{Re} s_i > 0$ , deci sistemul este intern instabil.

Pentru un *sistem discret*, deoarece

$$|s_1| + |s_2| + \dots + |s_n| \geq |s_1 + s_2 + \dots + s_n| = |a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}| ,$$

rezultă că dacă

$$|a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}| > n, \quad (8)$$

atunci există o rădăcină  $s_i$  astfel încât  $|s_i| > 1$ , deci sistemul este intern instabil.

**2°.** Conceptul de stabilitate internă este specific sistemelor de tip I-S-E, dar poate fi extins și la sistemele de tip I-E pe baza conceptului de *polinom caracteristic*, comun ambelor tipuri de sisteme. Din acest motiv, în teorema stabilității interne apare expresia “rădăcinile polinomului caracteristic” în locul expresiei “valorile proprii ale matricei  $A$ ”. La sistemele multivariabile cu  $m$  intrări și  $p$  ieșiri, polinomul caracteristic al sistemului este c.m.m.m.c. al polinoamelor caracteristice asociate celor  $m \cdot p$  canale intrare-ieșire.

## 8.2. STABILITATEA EXTERNĂ

Prin definiție, un sistem liniar este *extern strict stabil* dacă pentru orice intrare de tip original mărginită, ieșirea sistemului este, de asemenea, mărginită. Matematic, un sistem liniar multivariabil este extern strict stabil dacă oricare ar fi intrarea de tip original cu proprietatea

$$\|U(t)\| \leq 1,$$

există  $M > 0$  astfel încât

$$\|Y(t)\| \leq M.$$

La sistemele *monovariabile* liniare, cu funcția pondere  $g(t)$ , din relația de convoluție a sistemelor continue

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau, \quad (9)$$

respectiv relația de convoluție a sistemelor discrete

$$y(t) = \sum_{k=0}^t g(t-k)u(k), \quad (10)$$

rezultă

**Lema 1 a stabilității externe stricte.** a) *Un sistem monovariabil continuu este extern strict stabil dacă și numai dacă integrala*

$$I = \int_0^{\infty} |g(t)|dt \quad (11)$$

*este finită.*

b) *Un sistem liniar monovariabil discret este extern strict stabil dacă și numai dacă suma*

$$S = \sum_{t=0}^{\infty} |g(t)| \quad (12)$$

*este finită.*

La sistemele *continue*, pentru a demonstra *necesitatea*, vom arăta că integrala  $I$  este finită dacă sistemul este extern strict stabil. Avem

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\infty} |g(t)|dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T |g(t)|dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T |g(T-\tau)|d\tau \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T g(T-\tau) \cdot \text{sgn}(g(T-\tau))d\tau, \end{aligned}$$



Prin urmare, pentru intrarea mărginită  $u(\tau)=\text{sgn}(g(T-\tau))$ , avem

$$I = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T g(T-\tau) \cdot u(\tau) d\tau = \lim_{T \rightarrow \infty} y(T),$$

unde  $y(T)$  este valoarea ieșirii la momentul  $T$ . Deoarece sistemul este extern strict stabil, ieșirea  $y$  este mărginită, deci integrala  $I$  este finită.

Pentru a demonstra *suficiența*, vom considera integrala  $I$  finită și vom arăta că sistemul este strict stabil, adică ieșirea  $y(t)$  este mărginită pentru orice intrare  $u(t)$  de tip original cu  $|u(t)| \leq 1$ . Intr-adevăr, avem

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau \leq \int_0^t |g(t-\tau)||u(\tau)|d\tau \leq \int_0^t |g(t-\tau)|d\tau \\ &= \int_0^t |g(x)|dx \leq \int_0^\infty |g(x)|dx = I. \end{aligned}$$

La sistemele *discrete*, demonstrația este similară.

O condiție necesară ca integrala  $I$  și suma  $S$  să fie finite este ca funcția pondere  $g(t)$  să tindă la 0 pentru  $t \rightarrow \infty$ . La sistemele liniare, ca urmare a caracterului exponențial al funcției pondere, această condiție este și suficientă. Rezultă astfel:

**Lema 2 a stabilității externe stricte.** *Un sistem linear monovariabil (continuu sau discret) este extern strict stabil dacă și numai dacă*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0. \quad (13)$$

Funcția de transfer a unui *sistem linear continuu propriu* și cu polii simpli  $p_1, p_2, \dots, p_n$  poate fi scrisă sub forma

$$G(s) = C_0 + \frac{C_1}{s-p_1} + \frac{C_2}{s-p_2} + \dots + \frac{C_n}{s-p_n}, \quad (14)$$

unde  $C_i$  sunt constante reale sau complexe. Din expresia funcției pondere,

$$g(t) = C_0 \delta_0(t) + C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + \dots + C_n e^{p_n t}, \quad (15)$$

reiese că  $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$  dacă și numai dacă  $\text{Re } p_i < 0$  pentru orice  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Similar, deoarece funcția pondere a unui *sistem linear discret* cu  $r \leq n$  și cu polii simpli  $p_1, p_2, \dots, p_n$  are forma

$$g(t) = C_0 \delta^0(t) + C_1 p_1^t + C_2 p_2^t + \dots + C_n p_n^t, \quad (16)$$

avem  $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$  dacă și numai dacă  $|p_i| < 1$  pentru orice  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Aceste rezultate, valabile și la sistemele cu poli multipli, conduc la

**Teorema stabilității externe stricte.** a) *Un sistem liniar monovariabil continuu este extern strict stabil dacă și numai dacă toți polii funcției de transfer a sistemului au partea reală negativă.*

b) *Un sistem liniar monovariabil discret este extern strict stabil dacă și numai dacă toți polii funcției de transfer a sistemului au modulul subunitar.*

Prin relaxarea condiției de stabilitate strictă (13) de la Lema 2, se consideră că *un sistem liniar monovariabil este extern stabil dacă funcția pondere  $g$  este mărginită pentru  $t > 0$ .*

În cazul sistemelor continue cu poli distincți, din expresia (15) a funcției pondere  $g$  reiese că aceasta este mărginită pentru  $t > 0$  dacă și numai dacă  $\operatorname{Re} p_i \leq 0$  pentru  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . În cazul  $p_1 = p_2$ , când

$$G(s) = C_0 + \frac{C_1}{s - p_1} + \frac{C_2}{(s - p_1)^2} + \frac{C_3}{s - p_3} + \dots + \frac{C_n}{s - p_n},$$

$$g(t) = C_0 \delta_0(t) + (C_1 + C_2 t) e^{p_1 t} + C_3 e^{p_3 t} + \dots + C_n e^{p_n t},$$

funcția pondere  $g(t)$  este mărginită pentru  $t > 0$  dacă și numai dacă  $\operatorname{Re} p_1 < 0$  și  $\operatorname{Re} p_i \leq 0$  pentru  $i \in \{3, 4, \dots, n\}$ . Acest rezultat poate fi extins prin

**Teorema stabilității externe.** a) *Un sistem liniar continuu este extern stabil dacă și numai dacă polii funcției de transfer a sistemului au partea reală negativă sau nulă, polii cu partea reală nulă fiind poli simpli.*

b) *Un sistem liniar discret este extern stabil dacă și numai dacă polii funcției de transfer a sistemului au modulul subunitar sau unitar, polii cu modulul unitar fiind poli simpli.*

Un sistem *multivariabil* este extern stabil dacă și numai dacă toate canalele intrare-ieșire ale sistemului sunt extern stabile.

**Observații. 1°.** Problema stabilității unui sistem liniar se reduce la problema poziționării în planul complex a rădăcinilor *polinomului caracteristic* - în cazul stabilității interne, respectiv a rădăcinilor *polinomului polilor* - în cazul stabilității externe. În cazul unui *sistem monovariabil minimal*, polinomul caracteristic coincide cu polinomul polilor și, în consecință, sistemul este intern stabil dacă și numai dacă este extern stabil. *Un sistem intern stabil este și extern stabil*, dar implicația inversă nu este valabilă (de exemplu, atunci când polinomul caracteristic are o rădăcină care nu este

pol, cu partea reală pozitivă - la sistemele continue, respectiv cu modulul supraunitar - la sistemele discrete).

**2°.** În cazul *conexiunilor serie și paralel*, dacă sistemele componente sunt strict stabile, atunci sistemul rezultat este strict stabil. Teoretic, sistemul rezultat poate fi strict stabil și în condițiile în care sistemele componente nu sunt toate strict stabile. De exemplu, conexiunea serie continuă cu  $G_1(s) = \frac{s-1}{s+1}$  și  $G_2(s) = \frac{1}{s-1}$ , precum și conexiunea paralel cu  $G_1(s) = \frac{-1}{s-1}$  și  $G_2(s) = \frac{s}{s-1}$ , sunt extern strict stabile. În aplicațiile practice se consideră însă inacceptabilă soluția stabilizării externe a sistemului prin simplificarea sau reducerea părților instabile. În schimb, soluția stabilizării externe prin reacție negativă este posibilă și acceptabilă în practică. De exemplu, sistemul continuu având pe calea directă subsistemul instabil cu  $G_1(s) = \frac{1}{s-1}$  și pe calea de reacție subsistemul cu  $G_2(s) = 2$  este extern strict stabil.

**3°.** În cazul *sistemului de reglare continuu* din fig. 1.8 sau fig. 5.4, dacă elementele componente sunt de tip minimal (cu forma primară a funcțiilor de transfer ireductibilă) și, în plus, produsul  $G_R G_E G_P G_T$  este ireductibil, atunci polinomul caracteristic și polinomul polilor coincid, fiind egale cu numărătorul raționalei

$$1 + G_R(s)G_E(s)G_P(s)G_T(s). \quad (17)$$

În acest caz, sistemul este intern stabil dacă și numai dacă este extern stabil. Această proprietate se păstrează și în cazul mai general în care elementele componente sunt de tip minimal și produsul  $G_R G_E G_P G_T$  se simplifică printr-un polinom hurwitzian (care are toate rădăcinile cu partea reală negativă), precum și atunci când toate elementele componente sunt intern stabile. În proiectarea regulatorului unui sistem de reglare a unui proces instabil trebuie evitată soluția simplificării polului instabil al procesului cu un zero al regulatorului, deoarece o simplificare perfectă este posibilă numai teoretic.

La sistemele de reglare cu eșantionare (fig. 6.2), ecuația polilor sistemului discretizat are forma

$$1 + G_R(z)(G_E G_P G_T)^0(z) = 0. \quad (18)$$

În cazul unui sistem de reglare liniar *instabil*, răspunsul teoretic la referință sau perturbație treaptă este nemărginit, de tip oscilant sau aperiodic (fără oscilații). În practică, deoarece domeniul de liniaritate este mărginit, mărimea reglată rămâne totuși mărginită, stabilizându-se în zona de

neliniaritate (de regulă, atunci când  $K_R$  are semnul greșit) sau oscilând între zona de saturație și zona de blocare (de regulă, atunci când  $K_R$  are semnul corect și valoarea ridicată).

### 8.3. CRITERIUL DE STABILITATE HURWITZ

Criteriul lui Hurwitz permite rezolvarea efectivă a problemei stabilității pornind de la condițiilor formulate în cadrul teoremelor de stabilitate internă și externă. Criteriul are la bază ideea conform căreia rezolvarea problemei locației rădăcinilor unui polinom în raport cu axa imaginară sau cu cercul unitar cu centrul în origine nu necesită calculul efectiv al rădăcinilor polinomului. Stabilitatea internă este studiată pe baza polinomului caracteristic, iar stabilitatea externă pe baza polinomului polilor.

**Criteriul lui Hurwitz. Polinomul**

$$p_n(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0, \quad a_n > 0$$

este hurwitzian, adică are toate rădăcinile cu partea reală negativă, dacă și numai dacă toți coeficienții polinomului și minorii principali

$$\Delta_1 = a_{n-1}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} = a_{n-1} a_{n-2} - a_n a_{n-3}, \quad \dots, \quad \Delta_n = a_0 \Delta_{n-1}$$

ai matricei Hurwitz

$$H_n = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ * & * & \dots & a_1 & 0 \\ * & * & \dots & a_2 & a_0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

sunt pozitivi.

Construcția matricei Hurwitz se face astfel: se completează mai întâi diagonala principală și apoi coloanele, ținând seama că indicii coeficienților cresc cu câte o unitate la deplasarea pe fiecare coloană, de sus în jos, iar coeficienții cu indici mai mari ca  $n$  sunt nuli.

**Observații. 1°.** Ținând seama de expresiile minorilor  $\Delta_1$  și  $\Delta_n$ , condiția de pozitivitate a acestora nu este necesară.

**2°.** Pentru  $n = 2$ , din criteriul lui Hurwitz rezultă că ambele rădăcini ale polinomului

$$p_2(s) = a_2 s^2 + a_1 s + a_0, \quad a_2 > 0$$

au partea reală negativă dacă și numai dacă toți coeficienții sunt strict pozitivi.

Pentru  $n = 3$ , matricea Hurwitz are forma

$$H_3 = \begin{bmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{bmatrix},$$

iar polinomul

$$p_3(s) = a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0, \quad a_3 > 0,$$

are rădăcinile cu partea reală negativă dacă și numai dacă toți coeficienții sunt strict pozitivi și

$$\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0. \quad (20)$$

Pentru  $n = 4$ , matricea Hurwitz are forma

$$H_4 = \begin{bmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{bmatrix},$$

iar rădăcinile polinomului

$$p_4(s) = a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0, \quad a_4 > 0,$$

au partea reală negativă dacă și numai dacă toți coeficienții sunt strict pozitivi și

$$\Delta_3 = a_1 \Delta_2 - a_0 a_3^2 > 0, \quad \Delta_2 = a_2 a_3 - a_1 a_4. \quad (21)$$

În mod evident, condiția  $\Delta_2 > 0$  rezultă implicit din condiția  $\Delta_3 > 0$ .

**3°.** Polinomul  $p_n(s)$  are rădăcinile cu partea reală mai mică decât  $\alpha \in \mathbf{R}$ , adică situate în stânga dreptei  $s = \alpha$ , dacă și numai dacă polinomul  $p_n(s + \alpha)$  este hurwitzian. Această remarcă poate fi utilizată la poziționarea rădăcinilor polinomului caracteristic sau polinomului polilor în stânga dreptei  $s = \alpha$ ,  $\alpha < 0$ , în vederea obținerii unor performanțe dinamice convenabile.

**4°.** În analiza stabilității *sistemelor discrete* se ține seama de faptul că transformarea omografică

$$z = \frac{s+1}{s-1}, \quad (22)$$

echivalentă cu  $s = \frac{z+1}{z-1}$ , aplică biunivoc interiorul cercului unitar cu centrul în origine din planul variabilei  $z$  în semiplanul  $\operatorname{Re} s < 0$  din planul variabilei  $s$ . În consecință, *polinomul*

$$\mathcal{P}_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \quad a_n > 0,$$

are toate rădăcinile cu modulul subunitar dacă și numai dacă ecuația

$$\mathcal{P}_n\left(\frac{s+1}{s-1}\right) = 0 \quad (23)$$

are toate rădăcinile cu partea reală negativă, ceea ce poate fi analizat cu criteriul Hurwitz.

### 8.5. CRITERIILE DE STABILITATE NYQUIST

Criteriul *algebraic* de stabilitate Hurwitz poate fi aplicat în studiul stabilității sistemelor liniare continue și discrete de ordin finit, deci fără timp mort. Criteriile de stabilitate Nyquist sunt de tip *frecvențial* și aplicate, de regulă, în studiul stabilității sistemelor de reglare după abatere (eroare), cu și fără timp mort. Reamintim că un sistem liniar continuu de reglare după abatere este extern strict stabil dacă și numai dacă ecuația polilor

$$1 + G_d(s) = 0 \quad (24)$$

are toate rădăcinile cu partea reală negativă.

**Primul criteriu Nyquist.** Considerăm un sistem liniar continuu de reglare după abatere, cu funcția de transfer a sistemului deschis

$$G_d = G_R G_E G_P G_T$$

avînd  $n_0$  poli pe axa imaginară și  $n_1$  poli în dreapta axei imaginare. Sistemul de reglare este extern strict stabil dacă și numai dacă

$$\Delta \arg \vec{v}_0 = n_0 \frac{\pi}{2} + n_1 \pi, \quad (25)$$

unde  $\Delta \arg \vec{v}_0$  este variația totală a argumentului vectorului  $\vec{v}_0$  cu originea în punctul critic  $s_0 = -1$  și vârful mobil pe ramurile continue ale locului de transfer al sistemului deschis.

*Demonstrație.* Dacă  $G_d(s)$  este o funcție rațională proprie de ordinul  $n$ , atunci

$$1 + G_d(s) = \frac{P(s)}{R(s)}, \quad (26)$$

unde

$$P(s) = (s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n), \quad (27)$$

$$R(s) = (s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_n), \quad (28)$$

$P(s)$  fiind polinomul polilor sistemului închis, iar  $R(s)$  polinomul polilor sistemului deschis. Dintre polii  $s_i$  ai lui  $G_d(s)$ ,  $n_0$  sunt situați pe axa imaginară,  $n_1$  în dreapta axei imaginare și  $n - n_0 - n_1$  în stânga axei imaginare. Conform teoremei stabilității stricte, sistemul de reglare este strict stabil dacă și numai dacă polinomul  $P(s)$  al polilor sistemului închis este hurwitzian, adică are toate rădăcinile  $p_i$  situate în stânga axei imaginare.

Atunci când variabila  $s$  parcurge semiaxa imaginară pozitivă, variația totală a argumentului funcției  $1 + G_d(s)$ , egală cu unghiul descris de vectorul cu punctul de aplicație în originea axelor și vârful pe locul de transfer al funcției, este dată de relația

$$\Delta \arg(1 + G_d) = \sum_{i=1}^n \Delta \arg(s - p_i) - \sum_{i=1}^n \Delta \arg(s - s_i). \quad (29)$$

Așa cum reiese imediat din fig. 8.1, dacă  $s_0$  este un număr real dat, atunci avem:

$$\Delta \arg(s - s_0) = \begin{cases} \pi / 2, & s_0 < 0 \\ 0, & s_0 = 0 \\ -\pi / 2, & s_0 > 0 \end{cases}. \quad (30)$$

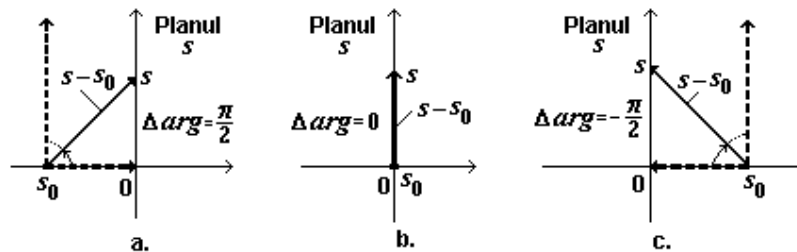


Fig. 8.1. Variația argumentului factorului  $s - s_0$ .

Considerăm, pentru început, că toate rădăcinile  $p_i$  și  $s_i$  ale polinoamelor  $P(s)$  și  $R(s)$  sunt reale.

*Necesitatea.* Dacă sistemul de reglare este stabil, adică  $P(s)$  are toate rădăcinile  $p_i$  situate în stânga axei imaginare, atunci avem

$$\sum_{i=1}^n \Delta \arg(s - p_i) = \frac{n\pi}{2}. \quad (31)$$

Deoarece

$$\sum_{i=1}^n \Delta \arg(s - s_i) = (n - n_0 - n_1) \frac{\pi}{2} + n_0 \cdot 0 + n_1 \left( \frac{-\pi}{2} \right) = (n - n_0) \frac{\pi}{2} - n_1 \pi, \quad (32)$$

din (29), (31) și (32) rezultă

$$\Delta \arg(1 + G_d) = n_0 \frac{\pi}{2} + n_1 \pi.$$

Prin urmare, variația vectorului  $\vec{v}$  cu centrul în origine și vârful mobil pe ramurile locului de transfer  $1 + G_d(s)$  este egală cu  $n_0 \frac{\pi}{2} + n_1 \pi$ . Deoarece locul de transfer al funcției  $G_d(s)$  se obține din locul de transfer al funcției  $1 + G_d(s)$  prin translatarea acestuia spre stânga cu o unitate (operație ce transformă originea  $0 + j0$  în punctul critic  $s_0 = -1 + j0$ ), rezultă că variația vectorului  $\vec{v}_0$  cu centrul în punctul critic  $-1 + j0$  și vârful mobil pe ramurile locului de transfer  $G_d(s)$  este, de asemenea,  $n_0 \frac{\pi}{2} + n_1 \pi$ :

$$\Delta \arg \vec{v}_0 = \Delta \arg(1 + G_d) = n_0 \frac{\pi}{2} + n_1 \pi.$$

*Suficiența.* Dacă  $\Delta \arg \vec{v}_0 = n_0 \frac{\pi}{2} + n_1 \pi$ , atunci  $\Delta \arg(1 + G_d) = n_0 \frac{\pi}{2} + n_1 \pi$ , iar din (29) și (32) obținem

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \Delta \arg(s - p_i) &= \Delta \arg(1 + G_d) + \sum_{i=1}^n \Delta \arg(s - s_i) \\ &= (n_0 \frac{\pi}{2} + n_1 \pi) + (n - n_0) \frac{\pi}{2} - n_1 \pi = n \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

de unde rezultă că toate rădăcinile  $p_i$  ale polinomului polilor  $P(s)$  al sistemului de reglare sunt negative, deci sistemul este stabil.

Demonstrația poate fi extinsă la cazul general, în care nu toate rădăcinile  $p_i$  și  $s_i$  sunt reale, pe baza următoarelor două observații:



a) rădăcinile complexe ale polinoamelor cu coeficienți reali  $P(s)$  și  $R(s)$  sunt conjugate două câte două;

b) dacă  $s_{0,1} = a \pm jb$  sunt două rădăcini complex conjugate, atunci

$$\Delta \arg(s - s_0)(s - s_1) = \Delta \arg(s - s_0) + \Delta \arg(s - s_1) = \begin{cases} \pi, & a < 0 \\ 0, & a = 0. \\ -\pi, & a > 0 \end{cases} \quad (33)$$

**Remarcă.** În particular, din primul criteriu Nyquist se obține imediat următoarea variantă simplificată: *În cazul în care funcția de transfer  $G_d(s)$  este stabilă și de fază minimă, sistemul închis este strict stabil dacă și numai dacă la parcurgerea locului de transfer al funcției  $G_d(s)$  în sensul creșterii lui  $\omega$ , punctul critic  $s_0 = -1$  rămâne în stânga acestuia.*

În continuare, vom considera că variabila complexă  $s$  parcurge în sens orar așa numitul *contur Nyquist* (fig. 8.2), format din axa imaginară și semicercul din dreapta, cu centrul în origine și de rază  $R \rightarrow \infty$ . Dacă  $G_d(s)$  are poli situați pe axa imaginară, aceștia vor rămâne în exteriorul conturului închis Nyquist, care îi va ocoli prin semicercuri de rază  $r \rightarrow 0$  parcurse în sens pozitiv (trigonometric). Atunci când variabila  $s$  parcurge conturul închis Nyquist, funcția de transfer  $G_d(s)$  generează o *curbă închisă*, cu sens continuu, numită *diagrama Nyquist*.

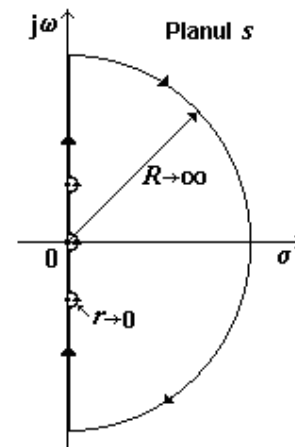


Fig. 8.2. Conturul Nyquist.

**Al doilea criteriu Nyquist.** *Considerăm un sistem sistem liniar continuu de reglare după abatere, cu funcția de transfer a sistemului deschis  $G_d = G_R G_E G_P G_T$  avînd  $n_1$  poli în dreapta axei imaginare. Sistemul de reglare este strict stabil dacă și numai dacă diagrama Nyquist a sistemului deschis înconjoară punctul critic  $s_0 = -1$  de  $n_1$  ori în sens trigonometric.*

**Demonstrație.** Se ține seama de *principiul argumentului*: Când variabila  $s$  parcurge în sens orar un contur închis  $C$  care conține în interior  $z$  zerouri și  $p$  poli ai unei funcții analitice  $F(s)$ , funcția  $F(s)$  va descrie o curbă închisă ce înconjoară originea de  $p - z$  ori în sens trigonometric.

*Necesitatea.* Dacă sistemul de reglare este stabil, atunci funcția  $F(s) = 1 + G_d(s)$  nu are zerouri în interiorul conturului Nyquist. Pe de altă parte, funcția  $F(s)$ , ca și funcția  $G_d(s)$ , are  $n_1$  poli în dreapta axei imaginare, adică în interiorul conturului Nyquist. Din principiul argumentului, rezultă că diagrama Nyquist a funcției  $F(s)$  înconjoară originea de  $n_1$  ori în sens trigonometric, deci diagrama Nyquist a funcției  $G_d(s)$  înconjoară punctul critic  $s_0 = -1$  de  $n_1$  ori.

*Suficiența.* Dacă diagrama Nyquist a funcției  $G_d(s)$  înconjoară de  $n_1$  ori punctul critic  $s_0 = -1$ , atunci diagrama Nyquist a funcției  $F(s) = 1 + G_d(s)$  înconjoară originea de  $n_1$  ori. Din principiul argumentului rezultă că  $F(s)$  nu are zerouri în interiorul conturului Nyquist, deci sistemul de reglare este strict stabil.

**Observații 1<sup>0</sup>.** Cazul cel mai frecvent întâlnit în practică este acela în care sistemul deschis este stabil, adică funcția de transfer  $G_d(s)$  nu are poli în dreapta axei imaginare, deci în interiorul conturului Nyquist ( $n_1 = 0$ ). În acest caz, *sistemul de reglare este stabil dacă și numai dacă diagrama Nyquist a funcției  $G_d(s)$  nu înconjoară punctul critic  $s_0 = -1$ .* Dacă diagrama trece chiar prin punctul  $s_0$ , atunci sistemul închis este stabil la limită.

**2<sup>0</sup>.** Ambele criterii Nyquist sunt valabile și în cazul sistemelor cu timp mort (deoarece funcția de transfer a sistemului deschis cu timp mort poate fi oricât de bine aproximată printr-o funcție rațională).

**3<sup>0</sup>.** Referitor la construcția diagramei Nyquist, următoarele observații sunt utile.

a) Dacă funcția de transfer  $G_d(s)$  este o rațională proprie, atunci semicercul de rază  $R \rightarrow \infty$  al conturului Nyquist se transformă într-un punct de pe axa reală (chiar în origine, în cazul practic în care  $G_d$  este strict proprie).

b) Polii simpli de pe axa imaginară ai funcției  $G_d(s)$  sunt transformați în "semicercuri" de rază  $R \rightarrow \infty$ , parcurse în sens orar.

c) Deoarece funcția  $G_d(j\omega)$  are partea reală pară și partea imaginară impară, diagrama Nyquist este simetrică față de axa reală.

d) Diagrama Nyquist este o curbă închisă, cu sensul de parcurgere continuu.

### 8.4. APLICAȚII REZOLVATE

♦ **Aplicația 8.1.** Să se studieze stabilitatea sistemului cu ecuația

$$2\ddot{y} - 3\dot{y} - 2y = \dot{u} - 2u.$$

**Soluție.** Sistemul are polinomul caracteristic

$$\mathcal{P}(s) = 2s^2 - 3s - 2 = (s - 2)(2s + 1)$$

și funcția de transfer

$$G(s) = \frac{s - 2}{2s^2 - 3s - 2} = \frac{1}{2s + 1}.$$

Deoarece polinomul caracteristic are rădăcina  $s_1 = 2$  pozitivă, sistemul este intern instabil.

Deoarece polinomul polilor

$$P(s) = 2s + 1$$

are o singură rădăcină și aceasta este negativă (egală cu  $-1/2$ ), sistemul este extern strict stabil.

♦ **Aplicația 8.2.** Să se studieze stabilitatea sistemului cu ecuația

$$\ddot{y} + 8\dot{y} + (16 - k^2)y = -\dot{u} + u, \quad k \geq 0.$$

**Soluție.** Formăm polinomul caracteristic

$$\mathcal{P}(s) = s^2 + 8s + 16 - k^2 = (s + 4 + k)(s + 4 - k)$$

și funcția de transfer

$$G(s) = \frac{-s + 1}{s^2 + 8s + 16 - k^2} = \frac{-(s - 1)}{(s + 4 + k)(s + 4 - k)}.$$

Polinomul caracteristic are rădăcina  $s_1 = -4 - k$  negativă și rădăcina  $s_2 = -4 + k$  negativă pentru  $k < 4$ , nulă pentru  $k = 4$  și pozitivă pentru  $k > 4$ . În consecință, sistemul este intern strict stabil pentru  $k < 4$ , intern simplu stabil pentru  $k = 4$  și intern instabil pentru  $k > 4$ .

Sistemul are doi poli pentru  $k \neq 5$  ( $s_1 = -4 - k < 0$  și  $s_2 = -4 + k$ ) și un singur pol pentru  $k = 5$ , anume  $s_1 = -9$ . Rezultă că sistemul este extern strict stabil pentru  $k < 4$  (când  $s_2 < 0$ ) și  $k = 5$ , extern simplu stabil pentru  $k = 4$  (când  $s_2 = 0$ ) și extern instabil pentru  $k > 4$ ,  $k \neq 5$  (când  $s_2 > 0$ ).

♦ **Aplicația 8.3.** Să se studieze stabilitatea sistemului continuu  $\Sigma(A, B, C, D)$  cu

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & 5 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [-1 \ 0 \ 0], \quad D = 0.$$

**Soluție.** Polinomul caracteristic al sistemului

$$\mathcal{P}(s) = \det(sI - A) = s^3 + 4s^2 + s - 6 = (s-1)(s+2)(s+3)$$

are o rădăcină reală pozitivă ( $s_1 = 1$ ), deci sistemul este intern instabil.

Funcția de transfer a sistemului

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{s-1}{s^3 + 4s^2 + s - 6} = \frac{1}{(s+2)(s+3)},$$

are polii  $s_1 = -2$  și  $s_2 = -3$ , ambii negativi; în consecință, sistemul este extern strict stabil.

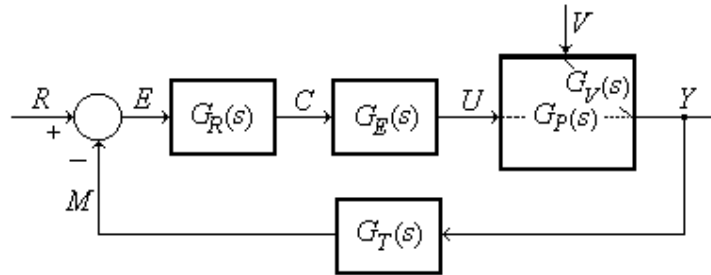
◆ **Aplicația 8.4.** Elementele componente ale sistemului de reglare automată de mai jos au următoarele modele dinamice:

$$\mathbf{R:} \quad c = k\varepsilon, \quad \varepsilon = r - m;$$

$$\mathbf{E:} \quad 2\dot{u} + u = 2c;$$

$$\mathbf{P:} \quad 5\dot{y} + y = u - 0,25v;$$

$$\mathbf{T:} \quad \dot{m} + m = y.$$



a) Să se studieze stabilitatea sistemului.

b) Să se determine parametrul real  $k$  astfel încât polii sistemului de reglare să fie situați în stânga dreptei  $s = -0,3$ .

**Soluție.** Elementele sistemului de reglare au funcțiile de transfer

$$G_R = k, \quad G_E = \frac{2}{2s+1}, \quad G_P = \frac{1}{5s+1}, \quad G_V = \frac{-0,25}{5s+1}, \quad G_T = \frac{1}{s+1}.$$

a) Deoarece funcțiile de transfer ale elementelor componente și funcția de transfer primară a sistemului deschis

$$G_d = G_R G_E G_P G_T = \frac{2k}{(2s+1)(5s+1)(s+1)}$$

sunt ireductibile, studiul stabilității interne și externe a sistemului conduce la același rezultat. Polinomul caracteristic și polinomul polilor sistemului coincid cu numărătorul  $P(s)$  al funcției raționale  $1 + G_d(s)$ , unde

$$P(s) = (2s+1)(5s+1)(s+1) + 2k = 10s^3 + 17s^2 + 8s + 1 + 2k.$$

Coefficienții lui  $P(s)$  sunt pozitivi pentru  $k > \frac{-1}{2}$ , iar minorul Hurwitz

$$\Delta_2 = a_1 a_2 - a_3 a_0 = 8 \cdot 17 - 10(1 + 2k) = 2(63 - 10k)$$

este pozitiv pentru  $k < \frac{63}{10}$ . Prin urmare, sistemul de reglare este strict stabil dacă și numai dacă factorul de proporționalitate al regulatorului aparține intervalului  $(-\frac{1}{2}, \frac{63}{10})$ .

În figura 8.3 este prezentat răspunsul  $y(t)$  al sistemului de reglare la referință treaptă unitară pentru diferite valori ale factorului de proporționalitate  $k$  al regulatorului. Pentru  $k = 6,3$ , răspunsul este oscilant întreținut, deci sistemul de reglare este simplu stabil. Răspunsurile au fost obținut în MATLAB, cu următorul program:

```
k=[-0.1 0.5 2 6.3]; t=0:0.1:30;
s=tf('s');
sis_E=2/(2*s+1); sis_P=1/(5*s+1);
sis_T=1/(s+1);
for i=1:4
    sis1=k(i)*sis_E*sis_P;
    sis=sis1/(1+sis1*sis_T);
    step(sis,t); hold on; grid on
end;
```

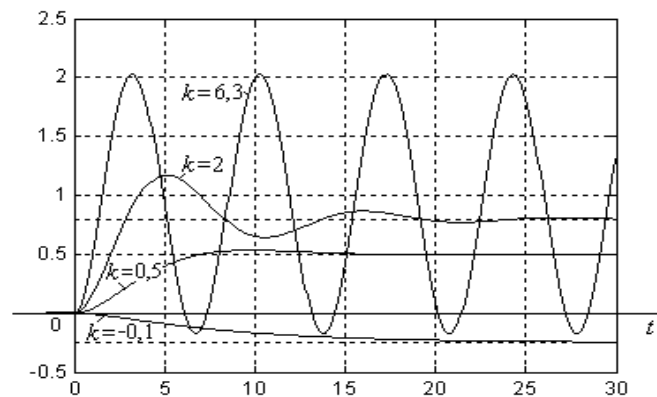


Fig. 8.3. Răspunsul  $y(t)$  la referință treaptă unitară.

b) Impunem condiția ca polinomul

$$\begin{aligned} P(s-0,3) &= 10(s-0,3)^3 + 17(s-0,3)^2 + 8(s-0,3) + 1 + 2k \\ &= 10s^3 + 8s^2 + 0,5s + 2k - 0,14 \end{aligned}$$

să fie hurwitzian. Din condiția de pozitivitate a coeficienților rezultă  $k > 0,07$ , iar din condiția  $\Delta_2 > 0$ , unde

$$\Delta_2 = a_1 a_2 - a_3 a_0 = 0,5 \cdot 8 - 10(2k - 0,14) = 5,4 - 20k,$$

rezultă  $k < 0,27$ . În concluzie, sistemul de reglare are toți polii cu partea reală mai mică decât  $-0,3$  pentru  $0,07 < k < 0,27$ .

◆ **Aplicația 8.5.** Să se studieze stabilitatea externă a sistemului de reglare cu funcțiile de transfer

$$G_R = k\left(1 + \frac{1}{4s}\right), \quad G_E = \frac{2}{2s+1},$$

$$G_P = \frac{1}{5s+1}, \quad G_T = \frac{1}{s+1}.$$

**Soluție.** Din

$$G_d = \frac{k(4s+1)}{2s(2s+1)(5s+1)(s+1)},$$

$$1 + G_d = \frac{20s^4 + 34s^3 + 16s^2 + 2(2k+1)s + k}{2s(2s+1)(5s+1)(s+1)},$$

rezultă polinomul polilor

$$P(s) = 20s^4 + 34s^3 + 16s^2 + 2(2k+1)s + k.$$

Avem

$$\Delta_2 = a_2 a_3 - a_4 a_1 = 8(63 - 10k),$$

$$\Delta_3 = a_1 \Delta_2 - a_0 a_3^2 = 4(-80k^2 + 175k + 252).$$

Coeficienții polinomului  $P(s)$  sunt pozitivi pentru  $k > 0$ . În plus, determinantul  $\Delta_3$  este pozitiv pentru  $0 < k < k_0$ , unde  $k_0 \approx 3,178$ . Conform criteriului Hurwitz, sistemul de reglare este extern strict stabil pentru  $0 < k < k_0$ . În acest exemplu, ca de altfel în majoritatea cazurilor practice, asigurarea stabilității sistemului de reglare se realizează prin limitarea superioară a factorului de proporționalitate al regulatorului.

În fig. 8.4 este prezentat răspunsul  $y(t)$  al sistemului de reglare la referință treaptă unitară pentru diferite valori ale factorului de proporționalitate  $k$  al regulatorului.

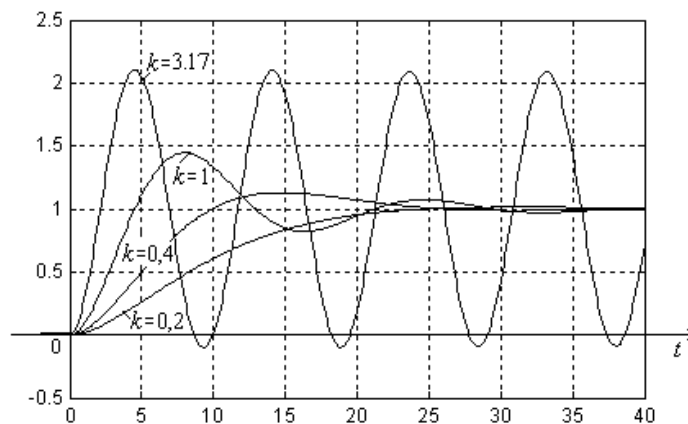


Fig. 8.4. Răspunsul  $y(t)$  la referință treaptă unitară.

Răspunsul a fost obținut în MATLAB, cu următorul program:

```
k=[0.2 0.4 1 3.17]; t=0:0.1:40;
s=tf('s');
sis_E=2/(2*s+1);
sis_P=1/(5*s+1);
sis_T=1/(s+1);
for i=1:4
    sis1=k(i)*(1+1/4/s)*sis_E*sis_P;
    sis=sis1/(1+sis1*sis_T);
    step(sis,t); hold on; grid on
end;
```

♦ **Aplicația 8.6.** Să se studieze stabilitatea externă a sistemului de reglare cu funcțiile de transfer

$$G_R = 1 + \frac{1}{T_i s}, \quad T_i > 0, \quad G_E = \frac{1}{3s+1},$$

$$G_P = \frac{1}{6s+1}, \quad G_T = \frac{1}{s+1}.$$

**Soluție.** Avem

$$G_d = \frac{s+1/T_i}{s(3s+1)(6s+1)(s+1)}.$$

Pentru  $T_i \notin \{1, 3, 6\}$ , polinomul polilor are expresia

$$P(s) = 18s^4 + 27s^3 + 10s^2 + 2s + \frac{1}{T_i}.$$

Avem

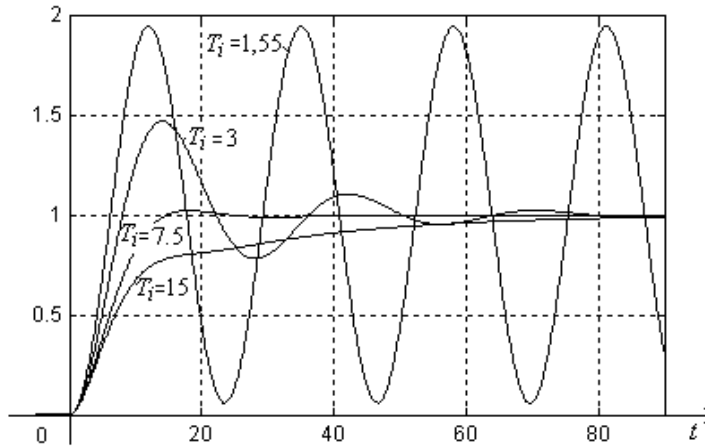
$$\Delta_2 = a_2 a_3 - a_4 a_1 = 234$$

$$\Delta_3 = a_1 \Delta_2 - a_0 a_3^2 = 9\left(52 - \frac{81}{T_i}\right).$$

Coeficienții polinomului  $P(s)$  și determinantul  $\Delta_3$  sunt pozitivi pentru  $T_i > \frac{81}{52}$ . Conform criteriului Hurwitz, sistemul de reglare este extern strict stabil pentru  $T_i > \frac{81}{52} \approx 1,55$ .

Pentru  $T_i = \frac{81}{52}$ , sistemul este simplu stabil, iar pentru  $0 < T_i < \frac{81}{52}$  este instabil. Acest rezultat este valabil și în cazurile  $T_i \in \{1, 3, 6\}$ , când polinomul polilor are gradul trei, deoarece funcția  $G_d(s)$  se simplifică printr-un polinom hurwitzian.

În fig. 8.5 este reprezentat răspunsul  $y(t)$  al sistemului de reglare la referință treaptă unitară pentru diferite valori ale constantei de timp integrale a regulatorului.

Fig. 8.5. Răspunsul  $y(t)$  la referință treaptă unitară.

♦ **Aplicația 8.7.** Fie sistemul de reglare automată ale cărui elemente au funcțiile de transfer

$$G_R = k\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right), \quad k > 0,$$

$$G_E = 1, \quad G_P = \frac{s+1}{s(4s+1)}, \quad G_T = 1.$$

Să se studieze stabilitatea externă a sistemului pentru: a)  $T_i = 1$ ; b)  $T_i = 3$ .

**Soluție.** a) Avem

$$G_d(s) = \frac{k(s+1)^2}{s^2(4s+1)},$$

iar polinomul polilor are expresia

$$P(s) = 4s^3 + (k+1)s^2 + 2ks + k.$$

Deoarece coeficienții lui  $P(s)$  sunt pozitivi, sistemul este strict stabil numai atunci când

$$\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 = 2k(k-1) > 0,$$

adică pentru  $k > 1$ . În marea majoritate a aplicațiilor practice, sistemele de reglare sunt stabile pentru valori mici ale factorului de proporționalitate al regulatorului, când comanda generată de regulator este relativ slabă. Sistemul de reglare studiat este însă unul de excepție, în care sistemul deschis este dublu integral, iar componenta integrală a regulatorului (cu  $T_i = 1$ ) este foarte puternică.

În fig. 8.6 este prezentat răspunsul  $y(t)$  al sistemului de reglare la referință treaptă unitară pentru diferite valori ale factorului de proporționalitate  $k$  al regulatorului. Pentru  $k = 1$ , sistemul este stabil la limită, iar răspunsul la referință treaptă este oscilant întreținut.



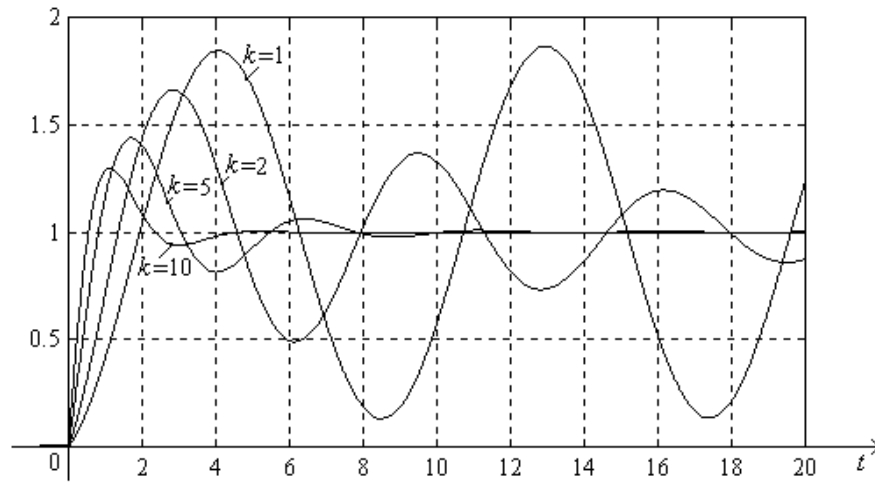


Fig. 8.6. Răspunsul la referință treaptă unitară pentru  $G_R = k(1 + \frac{1}{s})$ .

b) In cazul regulatorului cu  $G_R = k(1 + \frac{1}{3s})$ , având componenta integrală mai slabă, avem

$$G_d(s) = \frac{k(3s+1)(s+1)}{3s^2(4s+1)}$$

și

$$P(s) = 12s^3 + 3(k+1)s^2 + 4ks + k.$$

Deoarece coeficienții lui  $P(s)$  sunt pozitivi și

$$\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 = 12k^2 > 0,$$

sistemul este strict stabil pentru orice  $k > 0$  (fig. 8.7).

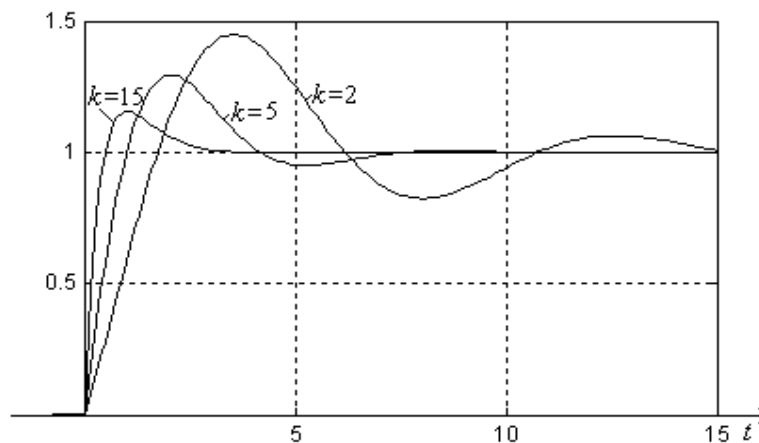


Fig. 8.7. Răspunsul la referință treaptă unitară pentru  $G_R = k(1 + \frac{1}{3s})$ .

◆ **Aplicația 8.8.** Fie sistemul de reglare automată cu

$$G_R = k\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right), \quad G_E = 1, \quad G_P = \frac{1}{T_1 s(T_1 s + 1)}, \quad G_T = 1.$$

Să se arate că sistemul este strict stabil pentru  $T_i > T_1 > 0$ , oricare ar fi  $k > 0$ .

**Soluție.** Avem

$$G_d(s) = \frac{k(T_i s + 1)}{T_i T_1 s^2 (T_1 s + 1)}$$

și polinomul polilor

$$P(s) = T_i T_1^2 s^3 + T_i T_1 s^2 + k T_i s + k.$$

Pentru  $k > 0$ , sistemul este strict stabil deoarece coeficienții polinomului polilor sunt pozitivi și

$$\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 = k T_i T_1 (T_i - T_1) > 0.$$

◆ **Aplicația 8.9.** Să se studieze stabilitatea sistemului discret cu ecuația

$$3y(t) + ky(t-1) + 2y(t-2) = u(t-1) - 2u(t-2), \quad k \in \mathbf{R}.$$

**Soluție.** Sistemul are polinomul caracteristic

$$\mathcal{P}(z) = 3z^2 + kz + 2.$$

Rădăcinile polinomului caracteristic au modulul subunitar atunci când ecuația

$$\mathcal{P}\left(\frac{s+1}{s-1}\right) = 0,$$

echivalentă cu

$$(k+5)s^2 + 2s + 5 - k = 0,$$

are toate rădăcinile cu partea reală negativă, adică atunci când are toți coeficienții pozitivi (criteriul Hurwitz). Prin urmare, sistemul este intern strict stabil pentru  $k \in (-5, 5)$ , intern simplu stabil pentru  $k \in \{-5, 5\}$  și intern instabil pentru  $k \in (-\infty, -5) \cup (5, \infty)$ . Pentru  $k = -5$ , când

$$\mathcal{P}(z) = (z-1)(3z-2),$$

precum și pentru  $k = 5$ , când

$$\mathcal{P}(z) = (z+1)(3z+2),$$

sistemul este simplu stabil, deoarece ecuația caracteristică are o rădăcină cu modulul subunitar și o rădăcină cu modulul unitar.

Pentru studiul stabilității externe formăm funcția de transfer

$$G(z) = \frac{z^{-1} - 2z^{-2}}{3 + kz^{-1} + 2z^{-2}} = \frac{z-2}{3z^2 + kz + 2}.$$

Pentru  $k \neq -7$ , funcția de transfer este ireductibilă, iar polinomul polilor coincide cu polinomul caracteristic. Pentru  $k = -7$ , rezultă

$$G(z) = \frac{1}{3z-1},$$

iar sistemul este extern strict stabil deoarece polul  $z_1 = \frac{1}{3}$  are modulul subunitar. În concluzie, sistemul este extern strict stabil pentru  $k \in \{-7\} \cup (-5, 5)$ , extern simplu stabil pentru  $k \in \{-5, 5\}$  și extern instabil pentru  $k \in (-\infty, -7) \cup (-7, -5) \cup (5, \infty)$ . Pentru  $k = -7$ , sistemul este intern instabil, dar extern strict stabil.

În figurile 8.8 și 8.9 sunt reprezentate grafic răspunsurile indiciale ale sistemului pentru cazurile de stabilitate externă simplă  $k = -5$  și  $k = 5$ , respectiv pentru cazurile de stabilitate externă strictă  $k = -7$  și  $k = 0$ .

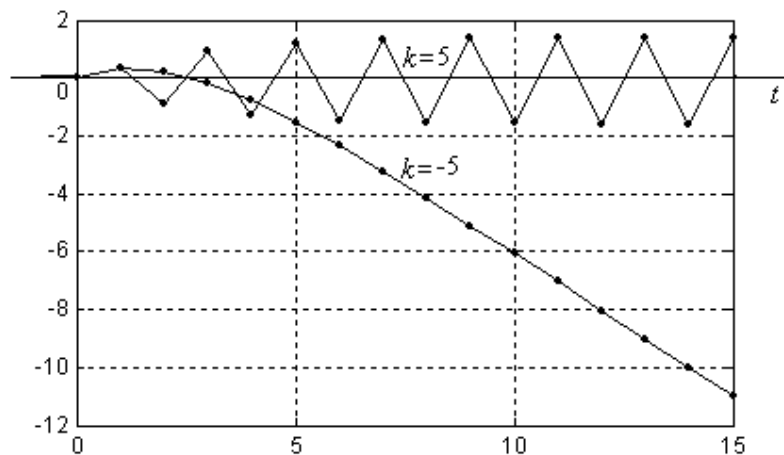


Fig. 8.8. Răspunsul indicial al sistemului (extern simplu stabil) pentru  $k = -5$  și  $k = 5$ .

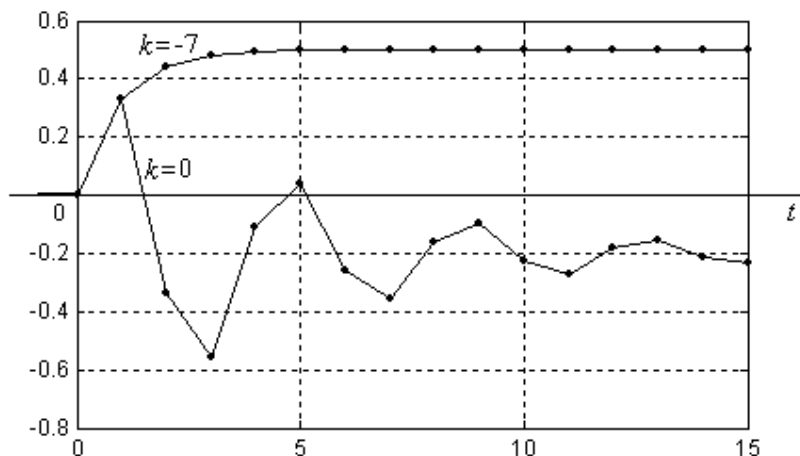


Fig. 8.9. Răspunsul indicial al sistemului (extern strict stabil) pentru  $k = -7$  și  $k = 0$ .

♦ **Aplicația 8.10.** Să se studieze stabilitatea sistemului discret  $\Sigma_d(A, B, C, D)$  cu

$$A = \begin{bmatrix} -1 & \alpha \\ 1 & -2\alpha - 0,5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0], \quad D = 0.$$

unde  $\alpha$  este un parametru real.

**Soluție.** Sistemul are polinomul caracteristic

$$\mathcal{P}(z) = \det(zI - A) = z^2 + (2\alpha + 1,5)z + \alpha + 0,5 = (z + 0,5)(z + 2\alpha + 1),$$

cu rădăcinile  $z_1 = -0,5$  și  $z_2 = -2\alpha - 1$ . Sistemul este intern strict stabil pentru  $\alpha \in (-1, 0)$ , intern simplu stabil pentru  $\alpha \in \{-1, 0\}$  și intern instabil pentru  $\alpha \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$ .

Deoarece

$$(zI - A)^{-1} = \frac{1}{(z + 0,5)(z + 2\alpha + 1)} \begin{bmatrix} z + 2\alpha + 0,5 & \alpha \\ 1 & z + 1 \end{bmatrix},$$

sistemul are funcția de transfer

$$G(z) = C(zI - A)^{-1}B + D = \frac{z + 3\alpha + 0,5}{(z + 0,5)(z + 2\alpha + 1)}.$$

Pentru  $\alpha \neq 0$  și  $\alpha \neq 1/2$ , funcția de transfer este ireductibilă, iar polinomul polilor coincide cu polinomul caracteristic. Pentru  $\alpha = 0$ , avem

$$G(z) = \frac{1}{z + 1},$$

iar sistemul este extern simplu stabil deoarece polul  $z_1 = -1$  are modulul egal cu 1. Pentru  $\alpha = 1/2$ , avem

$$G(z) = \frac{1}{z + 0,5},$$

iar sistemul este extern strict stabil deoarece polul  $z_1 = -1/2$  are modulul subunitar. În concluzie, sistemul este extern strict stabil pentru  $\alpha \in (-1, 0) \cup \{1/2\}$ , extern simplu stabil pentru  $\alpha \in \{-1, 0\}$  și extern instabil pentru  $\alpha \in (-\infty, -1) \cup (0, 1/2) \cup (1/2, \infty)$ . Pentru  $\alpha = 1/2$ , sistemul este intern instabil, dar extern strict stabil.

♦ **Aplicația 8.11.** Să se studieze stabilitatea internă a sistemului discret având

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0,1 & -0,8 & -1,7 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbf{R}.$$

**Soluție.** Polinomul caracteristic al matricei  $A$  este

$$\mathcal{P}(z) = \det(zI - A) = z^3 + 1,7z^2 + 0,8z + 0,1\alpha.$$

Mai departe, formăm ecuația

$$P\left(\frac{s+1}{s-1}\right)=0,$$

care are forma

$$(35+\alpha)s^3+(39-3\alpha)s^2+(5+3\alpha)s+1-\alpha=0.$$

Coefficienții ecuației sunt pozitivi pentru  $-\frac{5}{3}<\alpha<1$ . Impunând și condiția  $\Delta_2>0$ , unde

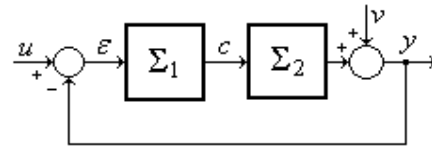
$$\Delta_2=(5+3\alpha)(39-3\alpha)-(35+\alpha)(1-\alpha)=-8\alpha^2+136\alpha+160,$$

rezultă  $\alpha_0<\alpha<1$ , unde  $\alpha_0\approx-1,1047$ . În conformitate cu criteriul Hurwitz, sistemul discret este intern strict stabil atunci când  $\alpha_0<\alpha<1$ .

♦ **Aplicația 8.12.** Să se analizeze stabilitatea conexiunii cu reacție din figura alăturată, unde

$$(\Sigma_1) \quad c_k - c_{k-1} = K\varepsilon_k, \quad K > 0$$

$$(\Sigma_2) \quad y_k - 0,8y_{k-1} = c_{k-1} + 2v_k.$$



**Soluție.** Sub sistemele au funcțiile de transfer

$$G_1(z) = \frac{K}{1-z^{-1}} = \frac{Kz}{z-1}, \quad G_2(z) = \frac{1}{1-0,8z^{-1}} = \frac{z}{z-0,8}$$

Ecuația polilor

$$1 + G_1(z)G_2(z) = 0$$

are forma

$$z^2 - (1,8 - K)z + 0,8 = 0.$$

În urma efectuării substituției

$$z = \frac{s+1}{s-1},$$

obținem ecuația

$$(s+1)^2 - (1,8 - K)(s+1)(s-1) + 0,8(s-1)^2 = 0,$$

adică

$$Ks^2 + 0,4s + 3,6 - K = 0.$$

Conform criteriului Hurwitz, ecuația are ambele rădăcini cu partea reală negativă dacă și numai dacă coeficienții trinomului

$$Ks^2 + 0,4s + 3,6 - K$$

sunt strict pozitivi. În consecință, sistemul de reglare este strict stabil pentru  $0 < K < 3,6$ . În cazul  $K = 3,6$ , sistemul este simplu stabil (are polii  $z_1 = -1$  și  $z_2 = -0,8$ ). Pentru  $K = 3,6$ , răspunsul sistemului la intrare treaptă unitară are forma din fig. 8.10.

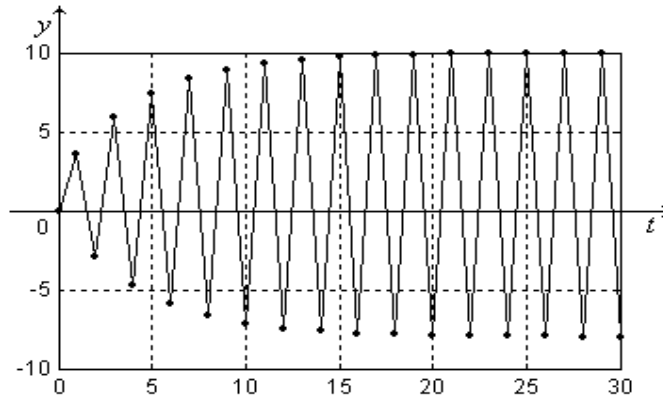


Fig. 8.10. Răspunsul sistemului la referință treaptă unitară pentru  $K = 3,6$ .

♦ **Aplicația 8.13.** Elementele unui sistem de reglare discret au următoarele funcții de transfer

$$G_R = K > 0, \quad G_E(z) = G_P(z) = G_T(z) = \frac{(1-p)z^{-1}}{1-pz^{-1}}, \quad p \in (0, 1).$$

Să se studieze stabilitatea sistemului în raport cu parametrul  $K$ ;

**Soluție.** Ecuația polilor

$$1 + G_R(z)G_E(z)G_P(z)G_T(z) = 0,$$

are forma

$$(z-p)^3 + K(1-p)^3 = 0.$$

În urma efectuării substituției  $z = \frac{s+1}{s-1}$ , obținem ecuația

$$[(1-p)s + 1 + p]^3 + K(1-p)^3(s-1)^3 = 0,$$

echivalentă cu

$$a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0 = 0,$$

unde

$$a_3 = (K+1)(1-p)^3, \quad a_2 = 3(1-p)^2[1+p-K(1-p)],$$

$$a_1 = 3(1-p)[K(1-p)^2 + (1+p)^2], \quad a_0 = (1+p)^3 - K(1-p)^3.$$

Conform criteriului Hurwitz, ecuația are toate rădăcinile cu partea reală negativă dacă și numai dacă coeficienții polinomului  $a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0$  sunt strict pozitivi și  $a_1a_2 - a_0a_3 > 0$ . Ultima condiție este echivalentă cu

$$(1-p)^3K^2 + p(3-2p^2)K - (1+p)^3 < 0,$$

adică

$$0 < K < \frac{-p(3-2p^2) + \sqrt{p^2(3-2p^2)^2 + 4(1-p^2)^3}}{2(1-p)^3}.$$

Condiția este verificată de toate punctele  $(p, K)$  din zona situată sub curba din fig. 8.11. Aceasta este chiar zona de stabilitate a sistemului, deoarece coeficienții  $a_i$  sunt pozitivi pentru toate punctele zonei. Pentru demonstrarea acestei afirmații este suficient să arătăm că  $a_2 > 0$ , adică

$$K < \frac{1+p}{1-p}.$$

Intr-adevăr, putem arăta ușor în MATLAB că funcția  $\frac{1+p}{1-p}$  are graficul situat deasupra curbei de stabilitate. Ambele grafice au fost realizate cu programul MATLAB:

```
p=0:.01:0.99;
a=p.*(3-2*p.^2);
K=(-a+sqrt(a.^2+4*(1-p.^2).^3))/2./(1-p).^3;
plot(p,K);
hold on;
p=0:.01:0.77;
plot(p,(1+p)/(1-p),'--');
grid on;
```

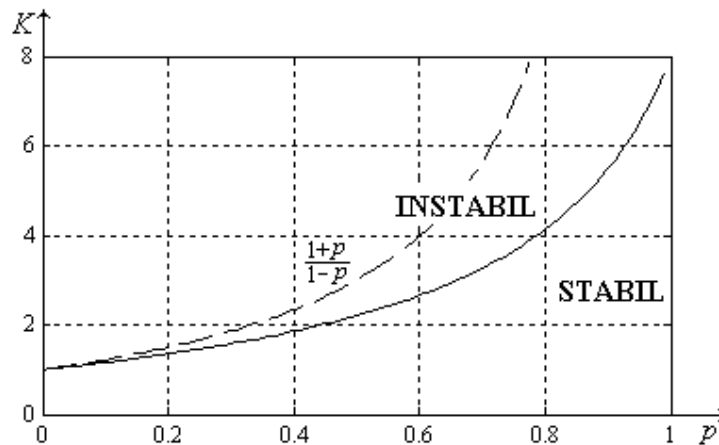


Fig. 8.11. Domeniul de stabilitate al sistemului de reglare.

◆ **Aplicația 8.14.** Se consideră sistemul de reglare cu eșantionare din fig. 6.2, în care

$$G_R(z) = K, \quad G_E(s) = G_T(s) = 1, \quad G_P(s) = \frac{1}{4s+1}.$$

Să se studieze stabilitatea sistemului în raport cu perioada de eșantionare  $T > 0$  și  $K \in \mathbf{R}$ .

**Soluție.** Sistemul are ecuația polilor  $P(z) = 0$ , unde

$$P(z) = 1 + G_R(z) \cdot (G_E G_P G_T)^o = 1 + K \cdot \left(\frac{1}{4s+1}\right)^o = 1 + K \cdot \frac{(1-p)z^{-1}}{1-pz^{-1}},$$

cu  $p = e^{-T/4}$ . Sistemul de reglare are polul  $z_1 = p - (1-p)K$ . Sistemul este extern strict stabil pentru  $-1 < z_1 < 1$ , adică  $-1 < K < \frac{1+p}{1-p}$ .

♦ **Aplicația 8.15.** Se consideră sistemul de reglare cu eșantionare din fig. 6.2, în care

$$T = 2,77, \quad G_R(z) = \frac{T}{T_i(1-z^{-1})}, \quad G_E(s) = G_T(s) = 1, \quad G_P(s) = \frac{1}{4s+1}.$$

Să se studieze stabilitatea sistemului pentru  $T_i > 0$ .

**Soluție.** Sistemul de reglare discretizat are ecuația polilor  $P(z) = 0$ , unde

$$P(z) = 1 + G_R(z) \cdot (G_T G_P G_E)^o = 1 + \frac{T}{T_i(1-z^{-1})} \cdot \left(\frac{1}{4s+1}\right)^o = 1 + \frac{T}{T_i(1-z^{-1})} \cdot \frac{(1-p)z^{-1}}{1-pz^{-1}}.$$

Pentru  $T = 2,77$ , avem  $p = e^{-T/4} \approx 0,5$  și

$$P(z) = 1 + \frac{2,77}{T_i(1-z^{-1})} \cdot \frac{z^{-1}}{2-z^{-1}}.$$

Ecuația polilor  $P(z) = 0$  este echivalentă cu

$$2z^2 + \left(\frac{2,77}{T_i} - 3\right)z + 1 = 0.$$

Pentru  $z = \frac{s+1}{s-1}$ , ecuația devine

$$2,77s^2 + 2T_i s + 6T_i - 2,77 = 0.$$

Sistemul este extern strict stabil atunci când coeficienții trinomialului de gradul doi în  $s$  sunt strict pozitivi, adică atunci când  $T_i > 0,4613$ .

Pentru  $T_i = 0,4613$  și  $T_i = 0,8$ , răspunsurile sistemului la intrare treaptă unitară au forma din fig. 8.12. Graficele au fost realizate cu programul MATLAB:

```
Ti=[0.8 0.4613];
T=2.77;
t=0:T:30;
s=tf('s'); z=tf('z');
for i=1:2
    R=T/Ti(i)/(1-1/z);
    P=1/(4*s+1); Pd=c2d(P,T);
    sis=R*Pd/(1+R*Pd);
    step(sis,t);
    hold on; grid on
end;
```



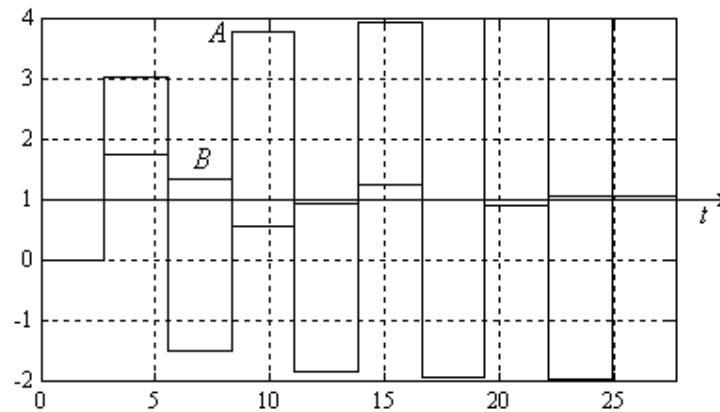


Fig. 8.12. Răspunsurile sistemului de reglare la referință treaptă unitară:

$A$  – pentru  $T_i = 4.613$ ;  $B$  – pentru  $T_i = 0.8$ .

♦ **Aplicația 8.16.** Fie un sistem de reglare cu eșantionare având perioada  $T$  și

$$G_R(z) = K, \quad G_E(s) = 1, \quad G_P(s) = \frac{e^{-s}}{4s}, \quad G_T(s) = 1.$$

Să se studieze stabilitatea sistemului:

- pentru  $K > 0$  și  $T = 1$ ;
- pentru  $K > 0$  și  $T = 0,5$ .

**Soluție.** a) Sistemul discretizat are ecuația polilor  $P(z) = 0$ , unde

$$\begin{aligned} P(z) &= 1 + G_R(z) \cdot (G_T G_P G_E)^o = 1 + K \left( \frac{e^{-s}}{4s} \right)^o = 1 + \frac{Kz^{-1}}{4} \left( \frac{1}{s} \right)^o \\ &= 1 + \frac{KTz^{-2}}{4(1-z^{-1})} = \frac{4 - 4z^{-1} + Kz^{-2}}{4(1-z^{-1})}. \end{aligned}$$

Ecuația  $P\left(\frac{s+1}{s-1}\right) = 0$  este echivalentă cu

$$Ks^2 + 2(4-K)s + 8 + K = 0.$$

Din condiția de pozitivitate a coeficienților rezultă că sistemul este strict stabil pentru  $0 < K < 4$ .

b) Sistemul are ecuația polilor  $P(z) = 0$ , unde

$$\begin{aligned} P(z) &= 1 + G_R(z) \cdot (G_T G_P G_E)^o = 1 + K \left( \frac{e^{-s}}{4s} \right)^o = 1 + \frac{Kz^{-2}}{4} \left( \frac{1}{s} \right)^o \\ &= 1 + \frac{KTz^{-3}}{4(1-z^{-1})} = \frac{8 - 8z^{-1} + Kz^{-3}}{8(1-z^{-1})}. \end{aligned}$$

Ecuația  $P\left(\frac{s+1}{s-1}\right) = 0$  este echivalentă cu

$$a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0 = 0,$$

unde

$$a_3 = K, \quad a_2 = 16 - 3K,$$

$$a_1 = 32 + 3K, \quad a_0 = 16 - K.$$

Conform criteriului Hurwitz, ecuația are toate rădăcinile cu partea reală negativă dacă și numai dacă coeficienții  $a_i$  sunt strict pozitivi și  $a_1a_2 - a_0a_3 > 0$ . Ultima condiție este echivalentă cu  $K^2 + 8K - 64 < 0$ . Sistemul este strict stabil pentru

$$0 < K < 4(\sqrt{5} - 1).$$

♦ **Aplicația 8.17.** Să se studieze stabilitatea sistemului de reglare automată având

$$G_R = k, \quad k > 0,$$

$$G_E = \frac{1}{15s}, \quad G_P = \frac{1}{12s+1}, \quad G_T = \frac{1}{3s+1},$$

aplicând

- primul criteriu Nyquist;
- al doilea criteriu Nyquist;
- criteriul Hurwitz.

**Soluție.** a) Intrucât funcția de transfer a sistemului deschis

$$G_d(s) = \frac{k}{15s(12s+1)(3s+1)}$$

are un pol pe axa imaginară ( $n_0 = 1$ ) și zero poli în dreapta axei imaginare ( $n_1 = 0$ ), avem

$$n_0 \frac{\pi}{2} + n_1 \pi = \frac{\pi}{2}.$$

Conform primului criteriu de stabilitate Nyquist, sistemul închis este stabil atunci variația argumentului vectorului  $\vec{v}_0$  cu originea în punctul critic  $-1$  și vârful pe ramurile locului de transfer este

$$\Delta \arg \vec{v}_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Cu

$$U_d(\omega) = \frac{-k}{(144\omega^2 + 1)(9\omega^2 + 1)},$$

$$V_d(\omega) = \frac{k(36\omega^2 - 1)}{15\omega(144\omega^2 + 1)(9\omega^2 + 1)},$$

construim tabelul de variație

$\omega$	0		1/6		$\infty$
$U_d(\omega)$	$-k$	(-)	$-4k/25$	(-)	0
$V_d(\omega)$	$-\infty$	(-)	0	(+)	0

și locul de transfer (fig. 8.13).

În cazul  $0 < k < \frac{25}{4}$  (fig. 8.13,a), argumentul vectorului  $\vec{v}_0$  variază în total, în sens pozitiv (trigonometric), de la  $-\frac{\pi}{2}$  la 0, deci

$$\Delta \arg \vec{v}_0 = 0 - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},$$

iar din primul criteriu Nyquist rezultă că sistemul închis este strict stabil.

În cazul  $k > \frac{25}{4}$  (fig. 8.13,b), argumentul vectorului  $\vec{v}_0$  variază în total, în sens negativ (orar), de la  $3\pi/2$  la 0, deci

$$\Delta \arg \vec{v}_0 = 0 - 3\pi/2 \neq \pi/2;$$

prin urmare, sistemul închis este instabil.

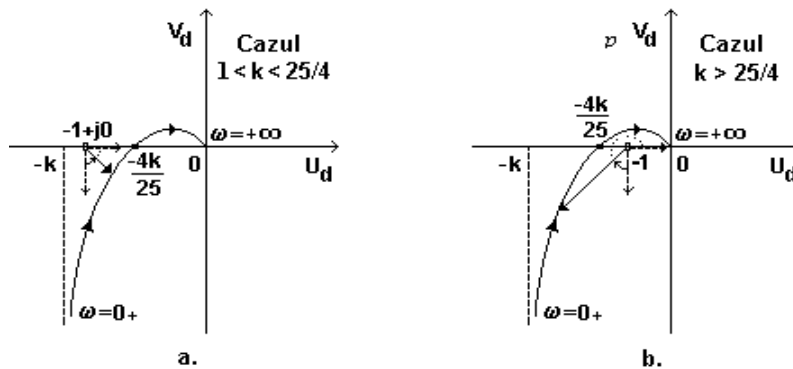


Fig. 8.13. Locul de transfer al funcției  $G_d(s) = \frac{k}{15s(12s+1)(3s+1)}$ .

b) Deoarece funcția de transfer a sistemului deschis  $G_d(s)$  nu are poli în dreapta axei imaginare, sistemul închis este stabil când diagrama Nyquist nu înconjoară punctul  $-1$ .

La trasarea diagramei (fig. 8.14), s-a ținut seama de faptul că polul din origine al funcției  $G_d(s)$  se transformă într-un “semicerc” de rază infinită, parcurs în sens orar. Se observă că:

- în cazul  $0 < k < 25/4$  (fig. 8.14, a), diagrama Nyquist nu înconjoară punctul critic  $-1$ , deci sistemul închis este strict stabil;

- în cazul  $k > 25/4$  (fig. 8.14, b), diagrama Nyquist înconjoară punctul critic  $-1$  de două ori, în sens orar, deci sistemul închis este instabil;

- în cazul  $k = 25/4$ , diagrama Nyquist trece prin punctul critic  $-1$ , deci sistemul închis este simplu stabil (stabil la limită);

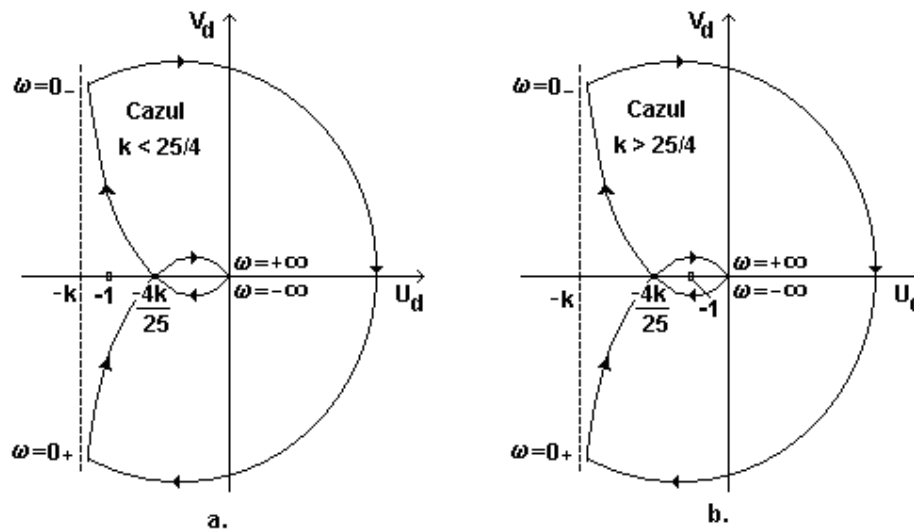


Fig. 8.14. Diagrama Nyquist a funcției  $G_d(s) = \frac{k}{15s(12s+1)(3s+1)}$ .

c) Ecuația polilor  $1+G_d(s)=0$  are forma

$$36s^3 + 15s^2 + s + \frac{k}{15} = 0.$$

În conformitate cu criteriul Hurwitz (cazul  $n=3$ ), sistemul de reglare este strict stabil dacă și numai dacă coeficienții ecuației polilor sunt pozitivi (ceea ce este adevărat) și  $\Delta_2 > 0$ , unde

$$\Delta_2 = 15 \cdot 1 - 36 \cdot \frac{k}{15} = \frac{3(25-4k)}{5}.$$

Prin urmare, sistemul de reglare este strict stabil numai pentru  $0 < k < 25/4$ . Pentru  $k = 25/4$ , sistemul este simplu stabil deoarece are polul  $s_1 = -5/12$  în stânga axei imaginare și polii  $s_{2,3} = \pm j/6$  chiar pe axa imaginară.

**Observație.** În acest exemplu, ca de altfel în majoritatea cazurilor practice, asigurarea stabilității sistemului de reglare se realizează prin limitarea superioară a factorului de proporționalitate al regulatorului.

♦ **Aplicația 8.18.** Să se studieze stabilitatea sistemului cu reacție negativă având

$$G_d(s) = \frac{k(s+1)}{s(s-1)}, \quad k > 0,$$

și aplicând

- primul criteriu Nyquist;
- al doilea criteriu Nyquist;
- criteriul Hurwitz.

**Soluție.** a) Funcția de transfer a sistemului deschis  $G_d(s)$  are un pol pe axa imaginară ( $s_1=0$ ) și un pol în dreapta axei imaginare ( $s_2=1$ ); prin urmare,  $n_0=1$  și  $n_1=1$ , deci

$$n_0 \frac{\pi}{2} + n_1 \pi = \frac{3\pi}{2}.$$

Conform primului criteriu de stabilitate Nyquist, sistemul închis este stabil atunci când variația argumentului vectorului  $\vec{v}_0$  cu originea în punctul critic  $-1$  și vârful pe ramurile locului de transfer este

$$\Delta \arg \vec{v}_0 = \frac{3\pi}{2}.$$

Cu

$$U_d(\omega) = \operatorname{Re} G_d(j\omega) = \frac{-2k}{1+\omega^2}, \quad V_d(\omega) = \operatorname{Im} G_d(j\omega) = \frac{k(1-\omega^2)}{\omega(1+\omega^2)},$$

realizăm tabelul de variație de mai jos:

$\omega$	0	1	$\infty$
$U_d(\omega)$	$-2k$	$-k$	0
$V_d(\omega)$	$\infty$	0	$-\infty$

și, pe baza lui, trasăm locul de transfer din fig. 8.15.

Pentru  $0 < k < 1$  (fig. 8.15, a), argumentul vectorului  $\vec{v}_0$  variază în total, în sens negativ (orar), de la  $\pi/2$  la 0, deci  $\Delta \arg \vec{v}_0 = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} \neq \frac{3\pi}{2}$ . În conformitate cu primul criteriu

Nyquist, sistemul închis este instabil;

Pentru  $k > 1$  (fig. 8.15, b), argumentul vectorului  $\vec{v}_0$  variază în total, în sens pozitiv (trigonometric), de la  $\pi/2$  la  $2\pi$ , deci  $\Delta \arg \vec{v}_0 = 2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$ ; prin urmare, sistemul închis este strict stabil.

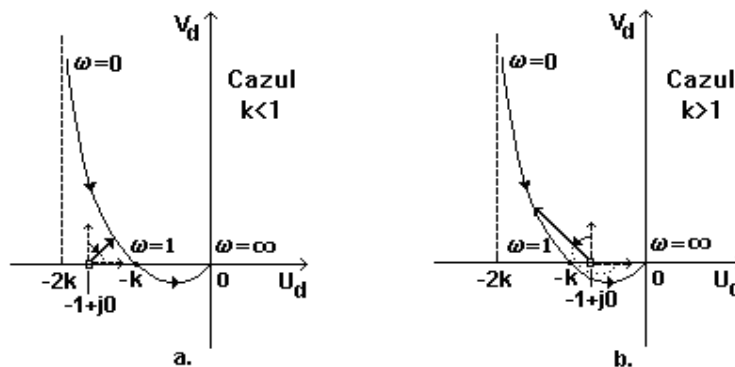


Fig. 8.15. Locul de transfer al funcției  $G_d(s) = \frac{k(s+1)}{s(s-1)}$ .

b) Deoarece funcția de transfer a sistemului deschis  $G_d(s)$  are un singur pol ( $s_2=1$ ) în dreapta axei imaginare, avem  $n_1=1$ , iar din al doilea criteriu Nyquist rezultă că sistemul închis este stabil atunci când diagrama Nyquist înconjoară o singură dată, în sens trigonometric, punctul critic  $-1$ .

Pentru trasarea diagramei Nyquist (fig.8.16), s-a ținut seama că polul din origine al funcției  $G_d(s)$  se transformă într-un "semicerc" de rază infinită, parcurs în sens orar, iar sensul de parcurgere a diagramei Nyquist este continuu.

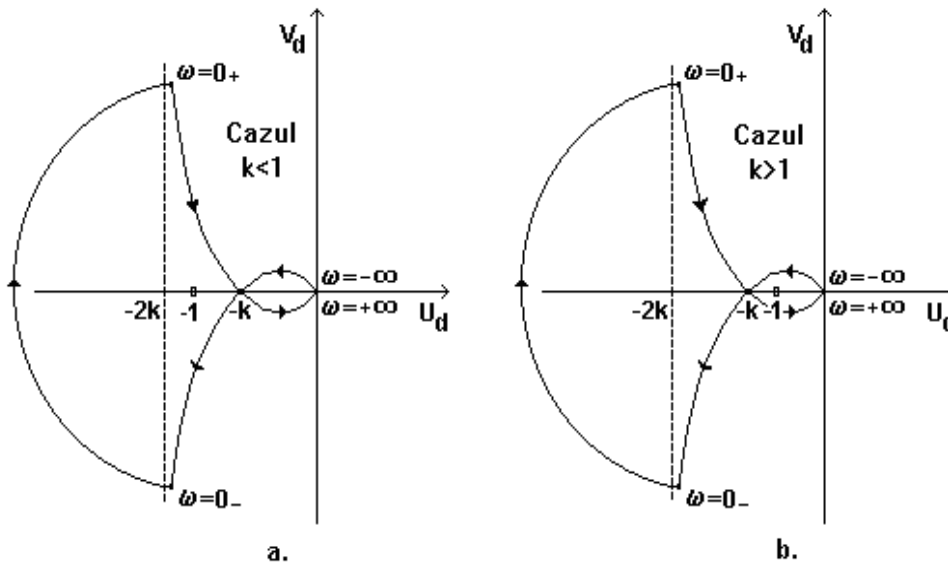


Fig. 8.16. Diagrama Nyquist a funcției  $G_d(s) = \frac{k(s+1)}{s(s-1)}$ .

În cazul  $k < 1$  (fig.8.16, a), diagrama Nyquist înconjoară punctul critic  $-1 + j0$  o singură dată, în sens orar, deci sistemul închis este instabil, iar în cazul  $k > 1$  (fig.8.16, b), diagrama înconjoară punctul critic o singură dată, în sens trigonometric, deci sistemul este strict stabil. Pentru  $k=1$ , diagrama Nyquist trece prin punctul critic  $-1$ , deci sistemul închis este simplu stabil.

c) Ecuația polilor  $1 + G_d(s) = 0$  are forma  $s^2 + (k-1)s + k = 0$ . În conformitate cu criteriul Hurwitz (cazul  $n=2$ ), sistemul de reglare este strict stabil dacă și numai dacă coeficienții ecuației polilor sunt pozitivi, adică  $k > 1$ . Pentru  $k=1$ , sistemul este stabil la limită deoarece are polii  $s_{1,2} = \pm j$  situați pe axa imaginară.

◆ **Aplicația 8.19.** Să se studieze stabilitatea sistemului cu reacție negativă având

$$G_d(s) = \frac{s-2}{s^2+1},$$

- a) cu primul criteriu Nyquist;
- b) cu al doilea criteriu Nyquist;
- c) cu criteriul Hurwitz.

**Soluție.** a) Funcția de transfer  $G_d(s)$  are doi poli pe axa imaginară ( $s_{1,2} = \pm j$ ) și niciun pol în dreapta axei imaginare, deci

$$n_0 \frac{\pi}{2} + n_1 \pi = 2 \frac{\pi}{2} + 0 \cdot \pi = \pi.$$

În conformitate cu primul criteriu de stabilitate Nyquist, sistemul închis este stabil atunci când variația totală a argumentului vectorului  $\vec{v}_0$  cu originea în punctul critic  $-1$  și vârful pe ramurile locului de transfer este

$$\Delta \arg \vec{v}_0 = \pi.$$

Din

$$U_d(\omega) = \frac{2}{\omega^2 - 1},$$

$$V_d(\omega) = \frac{-\omega}{\omega^2 - 1},$$

realizăm tabelul de variație de mai jos

$\omega$	0	1	$\infty$
$U_d(\omega)$	-2	(-) $-\infty$   $\infty$ (+)	0
$V_d(\omega)$	0	(+) $\infty$   $-\infty$ (-)	0

și trasăm locul de transfer corespunzător (fig. 8.17). Din relația  $U_d + 2V_d = \frac{-2}{\omega + 1}$ , care devine  $U_d + 2V_d = -1$  pentru  $\omega \rightarrow 1$ , rezultă că locul de transfer este asimptotic la dreapta  $U_d + 2V_d = -1$ .

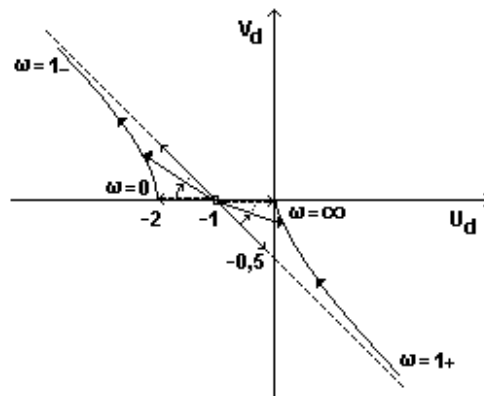


Fig. 8.17. Locul de transfer al funcției  $G_d(s) = \frac{s-2}{s^2+1}$ .

Pentru  $\omega \in [0, 1)$ , argumentul vectorului  $\vec{v}_0$  variază în sens negativ (orar), de la  $\pi$  la  $\pi - \arctg \frac{1}{2}$ , deci are variația  $\Delta_1 = (\pi - \arctg \frac{1}{2}) - \pi = -\arctg \frac{1}{2}$ , iar pentru  $\omega \in (1, \infty)$ , argumentul vectorului  $\vec{v}_0$  variază în sens pozitiv (trigonometric) de la  $-\arctg \frac{1}{2}$  la 0, deci are variația  $\Delta_2 = 0 - (-\arctg \frac{1}{2}) = \arctg \frac{1}{2}$ . Așadar, variația totală a argumentului vectorului  $\vec{v}_0$  este  $\Delta \arg \vec{v}_0 = \Delta_1 + \Delta_2 = 0 \neq \pi$ , iar din primul criteriu Nyquist rezultă că sistemul închis este instabil.

b) Deoarece funcția de transfer a sistemului deschis  $G_d(s)$  nu are poli în dreapta axei imaginare, sistemul închis este stabil atunci când diagrama Nyquist nu înconjoară punctul  $-1 + j0$ . Pentru trasarea diagramei Nyquist (fig. 8.18), s-a ținut seama că polii  $s_{1,2} = \pm j$  ai funcției  $G_d(s)$  situați pe axa imaginară se transformă în “semicercuri” de rază infinită, parcurse în sens orar, iar sensul de parcurgere a diagramei Nyquist este continuu. Se observă că diagrama Nyquist înconjoară punctul critic  $-1 + j0$  o singură dată, în sens orar; în consecință, sistemul închis este instabil.

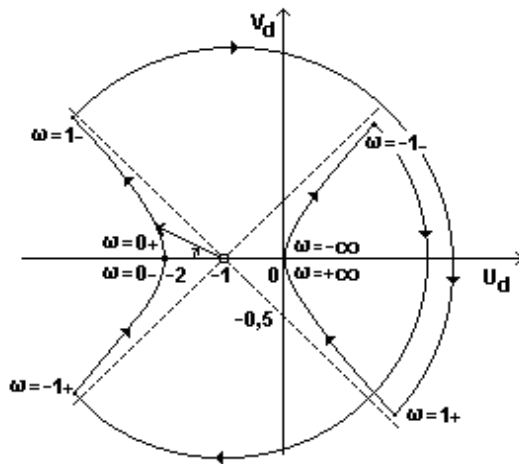


Fig. 8.18. Diagrama Nyquist a

$$\text{funcției } G_d(s) = \frac{s-2}{s^2+1}.$$

c) Ecuația polilor  $1 + G_d(s) = 0$ , echivalentă cu  $s^2 + s - 1 = 0$ , are rădăcina  $s_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$  pozitivă, deci sistemul este instabil. Acest rezultat reiese imediat și din criteriul Hurwitz (cazul  $n=2$ ), deoarece coeficienții ecuației polilor nu au toți același semn.

♦ **Aplicația 8.20.** Să se studieze stabilitatea sistemului cu reacție negativă având

$$G_d(s) = \frac{e^{-\tau s}}{T_i s}, \quad \tau > 0, T_i > 0.$$

**Soluție.** Utilizăm primul criteriu de stabilitate Nyquist. Avem  $n_0 = 1$ ,  $n_1 = 0$ , deci



$$n_0 \frac{\pi}{2} + n_1 \pi = \frac{\pi}{2}.$$

În conformitate cu primul criteriu de stabilitate Nyquist, sistemul închis este stabil dacă variația argumentului vectorului  $\vec{v}_0$  cu originea în punctul critic  $-1$  și vârful pe ramurile locului de transfer este

$$\Delta \arg \vec{v}_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Locul de transfer este reprezentat în fig. 8.19 (după modelul din fig. 7.12) în variantele de poziționare a punctului critic  $-1$  la stânga punctului  $U_0 = -\frac{2\tau}{\pi T_i}$  ( $\frac{\tau}{T_i} < \frac{\pi}{2}$ ) și, respectiv, între punctele  $U_0$  și  $U_1 = -\frac{2\tau}{5\pi T_i}$  ( $\frac{\pi}{2} < \frac{\tau}{T_i} < \frac{5\pi}{2}$ ).

Aplicând primul criteriu Nyquist și ținând seama că  $U_k = \frac{-2\tau}{(4k+1)\pi T_i}$ , avem:

- pentru  $0 < \frac{\tau}{T_i} < \frac{\pi}{2}$  (fig. 8.19, a), argumentul vectorului  $\vec{v}_0$  variază în total, în sens pozitiv, de la  $\frac{-\pi}{2}$  la  $0$ , deci  $\Delta \arg \vec{v}_0 = 0 - (-\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$ , iar sistemul închis este strict stabil;

- pentru  $\frac{\pi}{2} < \frac{\tau}{T_i} < \frac{5\pi}{2}$  (fig. 8.19, b), argumentul vectorului  $\vec{v}_0$  variază în total, în sens negativ, de la  $\frac{3\pi}{2}$  la  $0$ , deci  $\Delta \arg \vec{v}_0 = 0 - \frac{3\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2} \neq \frac{\pi}{2}$ , iar sistemul închis este instabil;

- pentru  $\frac{(4k+1)\pi}{2} < \frac{\tau}{T_i} < \frac{(4k+5)\pi}{2}$ ,  $k=1, 2, \dots$ , argumentul vectorului  $\vec{v}_0$  variază de la  $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$  la  $0$ , deci  $\Delta \arg \vec{v}_0 = -\frac{3\pi}{2} - 2k\pi \neq \frac{\pi}{2}$ , iar sistemul închis este instabil.

În concluzie, sistemul cu reacție este strict stabil pentru  $0 < \frac{\tau}{T_i} < \frac{\pi}{2}$ , stabil la limită pentru  $\frac{\tau}{T_i} = \frac{\pi}{2}$  și instabil pentru  $\frac{\tau}{T_i} > \frac{\pi}{2}$ .

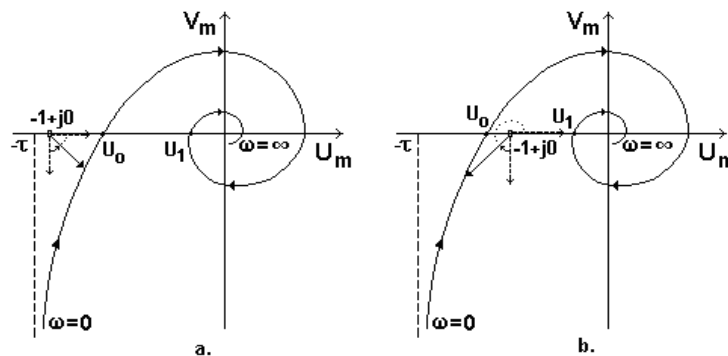


Fig. 8.19. Locul de transfer al funcției  $G_d(s) = \frac{e^{-\tau s}}{T_i s}$ .

**Observație.** Funcția **step1**(tau,Ti,n,t) introdusă în mediul MATLAB sub forma fișierului **step1.m** realizează reprezentarea grafică a răspunsului indicial al sistemului de reglare, în condițiile înlocuirii timpului mort  $\tau$  cu aproximația Padé de ordinul  $n$  :

```
function step1(tau,Ti,n,t1)
s=tf('s');
sis=1/Ti/s;
sis.iodelay=tau;
sis1=pade(sis,n);
sra=sis1/(1+sis1);
t=0:0.1:t1;
step(sra,t);
grid on
```

Graficele din fig. 8.20 și fig. 8.21, obținute respectiv cu comenzile `step1(pi/2,1,2,30)` și `step1(pi/2,1,4,30)`, prezintă răspunsurile indiciale aproximative (datorită utilizării aproximației Padé ) ale sistemului de reglare aflat la limita de stabilitate. Se observă că în cazul aproximației Padé de ordinul 4, graficul redă cu suficientă precizie caracterul oscilant întreținut al răspunsului indicial.

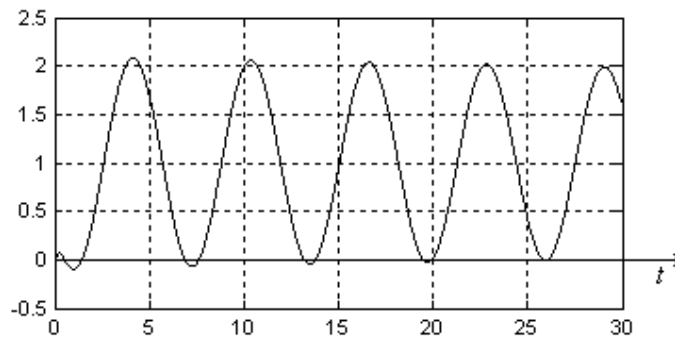


Fig. 8.20. Răspunsul indicial al sistemului de reglare la limita de stabilitate, în cazul utilizării aproximației Padé de ordinul 2.

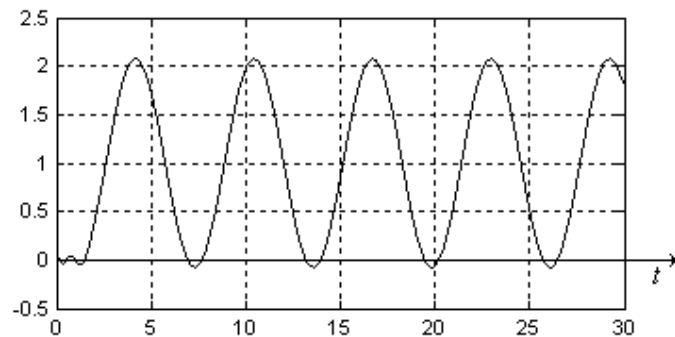


Fig. 8.21. Răspunsul indicial al sistemului de reglare la limita de stabilitate, în cazul utilizării aproximației Padé de ordinul 4.

◆ **Aplicația 4.21.** Să se studieze stabilitatea sistemului de reglare cu

$$G_d(s) = \frac{e^{-\tau s}}{T_1 s + 1}, \quad \tau > 0, T_1 > 0.$$

**Soluție.** Utilizăm primul criteriu de stabilitate Nyquist. Locul de transfer al funcției  $G_d(s)$  este reprezentat grafic în fig. 7.13. Avem  $n_0 = 0$  și  $n_1 = 0$ , deci

$$n_0 \frac{\pi}{2} + n_1 \pi = 0.$$

Conform primului criteriu de stabilitate Nyquist, sistemul închis este stabil atunci când variația argumentului vectorului  $\vec{v}_0$  cu originea în punctul critic  $-1$  și vârful pe ramurile locului de transfer este  $\Delta \arg \vec{v}_0 = 0$ , adică atunci când punctul  $-1$  se află la stânga punctului cu abscisa  $U_0 = \cos \tau \omega_0$ , unde pulsația  $\omega_0$  este dată de ecuația

$$T_1 \omega_0 + \operatorname{tg} \tau \omega_0 = 0, \quad \frac{\pi}{2} < \tau \omega_0 < \pi.$$

Deoarece  $-1 < \cos \tau \omega_0 = U_0$ , sistemul este stabil.

## 8.4. APLICAȚII DE AUTOCONTROL

◆ **C8.1.** Să se studieze stabilitatea internă și externă a sistemului cu ecuația

$$\ddot{y} + \dot{y} + y + ky = 2\ddot{u} - \dot{u} - u,$$

unde  $k$  este un parametru real.

◆ **C8.2.** Să se studieze stabilitatea internă și externă a sistemului cu ecuația

$$k\ddot{y} + (k+1)\dot{y} + (3k+1)y = -\dot{u} + u,$$

unde  $k$  este un parametru real.

◆ **C8.3.** Să se studieze stabilitatea internă și externă a sistemului continuu  $\Sigma(A, B, C, D)$  cu

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 6 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C = [k \ 1 \ 0], \quad D = 0,$$

unde  $k$  este un parametru real.

- ◆ C8.4. Să se studieze stabilitatea internă a sistemului

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + kx_3 - 3u \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_3 - u \\ \dot{x}_3 = 2x_1 - 2x_2 - x_3 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1 = 2x_1 - u \\ y_2 = x_1 - x_2 \end{cases},$$

unde  $k$  este un parametru real.

- ◆ C8.5. Să se studieze stabilitatea internă și externă a sistemului

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 = kx_2 + u \\ \dot{x}_3 = x_1 + 2x_2 - 5x_3 + u \end{cases}, \\ y = -2x_1 + x_2 + 2x_3,$$

unde  $k$  este un parametru real.

- ◆ C8.6. Să se studieze stabilitatea internă și externă a sistemului

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 + u \\ \dot{x}_3 = -kx_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3u \end{cases}, \\ y = x_1,$$

unde  $k$  este un parametru real.

- ◆ C8.7. Să se studieze stabilitatea externă a sistemului de reglare cu

$$G_R = k, \quad G_E = \frac{2}{2s+1}, \\ G_P = \frac{s+2}{15s^2+8s+1}, \quad G_T = 1,$$

unde  $k$  este un parametru real.

- ◆ C8.8. Să se studieze stabilitatea externă a sistemului de reglare cu

$$G_R = k\left(1 + \frac{1}{4s}\right), \quad G_E = G_T = \frac{1}{2s+1}, \\ G_P = \frac{2}{4s+1},$$

pentru  $k > 0$ .

- ♦ **C8.9.** Să se studieze stabilitatea externă a sistemului de reglare cu

$$G_R = 1 + \frac{1}{T_i s}, \quad G_E = G_T = 1,$$

$$G_P = \frac{1}{(2s+1)(8s+1)},$$

pentru  $T_i > 0$ .

- ♦ **C8.10.** Fie sistemul de reglare automată caracterizat prin

$$G_R = K, \quad K > 0, \quad G_E = \frac{1}{4(2s+1)}, \quad G_P = \frac{1}{4s+1}, \quad G_T = 1.$$

Să se determine  $K$  astfel încât polii sistemului să fie situați în stânga dreptei  $s = -\frac{1}{3}$ .

- ♦ **C8.11.** Pentru ce valori ale parametrului real  $k$ , sistemul discret cu ecuația

$$10y(t) + 17y(t-1) + 8y(t-2) + ky(t-3) = u(t-1) + u(t-2)$$

este strict intern stabil?

- ♦ **C8.12.** Pentru ce valori ale parametrului real  $k$ , sistemul discret cu ecuația

$$\begin{cases} 2x_1(t+1) = -x_1(t) + kx_2(t) \\ 2x_1(t+1) = x_1(t) + x_2(t) - u(t) \end{cases}, \quad y(t) = x_1(t) - x_2(t).$$

este strict intern stabil?

- ♦ **C8.13.** Să se studieze stabilitatea sistemului de reglare automată având

$$G_R = k, \quad k > 0, \quad G_E = \frac{1}{5s+1}, \quad G_P = \frac{1}{10s+1}, \quad G_T = \frac{1}{2s+1},$$

utilizând primul criteriu Nyquist.

- ♦ **C8.14.** Să se studieze stabilitatea sistemului de reglare automată având

$$G_R = k(1 + \frac{1}{4s}), \quad k > 0, \quad G_E = \frac{1}{5s+1}, \quad G_P = \frac{1}{10s+1}, \quad G_T = \frac{1}{4s+1},$$

utilizând al doilea criteriu Nyquist.

- ♦ **C8.15.** Să se studieze stabilitatea sistemului de reglare cu eșantionare, în care

$$T = 2,77, \quad G_R(z) = k,$$

$$G_E(s) = \frac{1}{s}, \quad G_P(s) = \frac{1}{4s+1}, \quad G_T(s) = 1.$$

# 9

---

## CALITATEA REGLĂRII

---

În aplicațiile practice, sistemele de reglare automată trebuie să fie *robuste, stabile* și să satisfacă unele *performanțe de regim staționar și dinamic*, astfel încât abaterea mărimii reglate față de mărimea de referință, produsă ca urmare a variației în timp a referinței, a unor perturbații externe sau a unor factori perturbatori interni, să aibă o valoare cât mai redusă în timpul regimului tranzitoriu și, mai ales, la sfârșitul acestuia; în plus, acțiunea de reglare să se realizeze cu consum mic de energie și grad redus de uzură, iar forma și intensitatea semnalului de comandă să nu afecteze securitatea instalației reglate sau calitatea produsului finit. Deoarece procesele reale nu sunt perfect liniare și nici perfect invariante (cu caracteristici dinamice constante în timp), *robustețea* algoritmului de reglare (care exprimă gradul de insensibilitate a performanțelor de reglare la modificarea caracteristicilor dinamice ale procesului și a parametrilor regulatorului) reprezintă un factor major al calității reglării.

Compararea directă a mărimii fizice reglate (presiune, temperatură, debit, nivel etc.) cu semnalul de referință unificat 4...20 mA c.c. are sens în condițiile exprimării procentuale a ambelor mărimi. Exprimarea în procente a mărimii reglate se face prin raportare la domeniul de măsurare al traductorului, care generează semnalul de măsurare unificat 4...20 mA.

### 9.1. CALITATEA REGLĂRII ÎN REGIM STAȚIONAR

În regim staționar, calitatea reglării unui sistem de reglare stabil este dată de valoarea *erorii (abatere) staționare* la referință sau perturbație tip treaptă unitară sau rampă unitară:

$$\varepsilon_{st} = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) . \quad (1)$$

Un sistem de reglare este cu atât mai precis în regim staționar cu cât eroarea staționară (numită uneori *offset*) are valoarea mai apropiată de zero. În majoritatea aplicațiilor practice se impune condiția de a avea eroare staționară nulă la referință sau perturbație treaptă. Interpretarea grafică a erorii staționare la intrare treaptă este ilustrată în fig. 9.1.

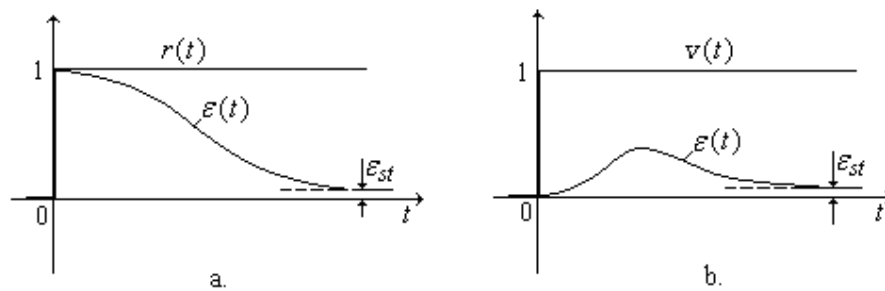


Fig. 9.1. Interpretarea erorii staționare pentru referință și perturbație treaptă.

Lema care urmează pune în evidență relațiile de calcul al erorii staționare atunci când se cunosc funcțiile de transfer ale elementelor sistemului automat de reglare (fig. 9.2).

**Lema erorii staționare.** Considerăm un sistem continuu de reglare automată strict stabil, cu funcția de transfer a sistemului deschis  $G_d = G_R G_E G_P G_T$ . Atunci

$$a) \quad \varepsilon_{st} = \lim_{s \rightarrow 0} G_{ER}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G_d}, \text{ pentru } r(t) = 1(t);$$

$$b) \quad \varepsilon_{st} = \lim_{s \rightarrow 0} G_{EV}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-G_V G_T}{1 + G_d}, \text{ pentru } v(t) = 1(t);$$

$$c) \quad \varepsilon_{st} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} G_{ER}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s(1 + G_d)}, \text{ pentru } r(t) = t \cdot 1(t);$$

$$d) \quad \varepsilon_{st} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} G_{EV}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-G_V G_T}{s(1 + G_d)}, \text{ pentru } v(t) = t \cdot 1(t).$$

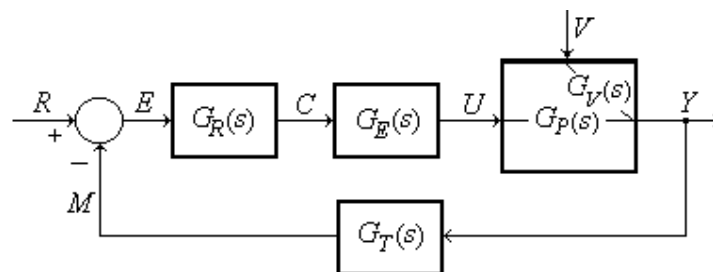


Fig. 9.2. Sistem de reglare automată.

Formulele de calcul al erorii staționare se obțin imediat pe baza proprietății valorii finale a transformării Laplace:

$$\varepsilon_{st} = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$$

și a relațiilor

$$E(s) = G_{ER}(s)R(s), \quad E(s) = G_{EV}(s)V(s),$$

$$\mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s}, \quad \mathcal{L}[t \cdot 1(t)] = \frac{1}{s^2}.$$

Toate relațiile de calcul al erorii staționare sunt valabile numai dacă sistemul de reglare este strict stabil, relația  $\varepsilon_{st} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$  fiind validă numai atunci când produsul  $sE(s)$  are toți polii cu partea reală negativă. Prin urmare, obținerea cu formulele lemei a unei valori finite sau chiar nule a erorii staționare nu implică stabilitatea sistemului de reglare.

Un sistem de reglare automată se consideră a fi *precis* în raport cu un semnal treaptă sau rampă aplicat la intrare (referință sau perturbație) atunci când eroarea staționară este zero.

În conformitate cu relațiile de calcul al erorii staționare, eroarea staționară a unui sistem liniar strict stabil la intrare rampă este de infinit ori mai mare în modul decât eroarea staționară la intrare treaptă. Prin urmare, dacă eroarea staționară la intrare treaptă este nenulă, atunci ea este infinită la intrare rampă. În cazurile practice, acest rezultat trebuie adaptat convenabil, ținând seama că domeniul de liniaritate al unui sistem fizic este mărginit.

***Teorema preciziei reglării – pentru procese de tip proporțional.***  
*Considerăm un sistem de reglare automată liniar și strict stabil, cu ambele canale (de execuție și de perturbație) ale părții fixate de tip proporțional (cu factor static de proporționalitate finit și nenul).*

a) *Dacă regulatorul este de tip proporțional, atunci eroarea staționară este nenulă și finită la intrare treaptă, cu atât mai mică în modul cu cât factorul de proporționalitate al regulatorului este mai mare.*

b) *Dacă regulatorul conține o componentă integrală simplă, atunci eroarea staționară este nulă la intrare treaptă, respectiv finită și nenulă la intrare rampă.*

c) *Dacă regulatorul conține o componentă integrală dublă, atunci eroarea staționară este nulă la intrare rampă, deci și la intrare treaptă.*



Teorema preciziei reglării, cunoscută și sub numele *teorema erorii staționare*, poate fi ușor demonstrată pe baza relațiilor de calcul al erorii staționare. În schema din fig. 9.3, funcția de transfer a sistemului deschis  $G_d(s)$  este egală cu produsul dintre funcția de transfer a regulatorului  $G_R(s)$  și funcția de transfer a părții fixate  $G_F(s)$ :

$$G_d(s) = G_R(s)G_F(s), \quad G_F(s) = G_E(s)G_P(s)G_T(s).$$

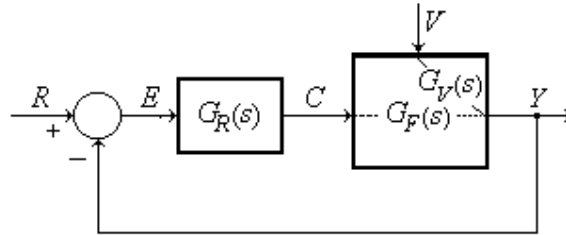


Fig. 9.3. Sistem de reglare automată – schemă simplificată.

În cazul a), pentru  $r = 1(t)$ , avem

$$\varepsilon_{st} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G_R(s)G_F(s)} = \frac{1}{1 + K_R K_F}, \quad (2)$$

unde  $K_R$  și  $K_F$  sunt factorii statici de proporționalitate ai regulatorului și părții fixate. Prin urmare, eroarea staționară este nenulă și cu atât mai mică cu cât factorul de proporționalitate  $K_R$  al regulatorului este mai mare.

În cazul b), considerând un regulator de tip PI cu funcția de transfer

$$G_R(s) = K_R \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right),$$

pentru  $r = 1(t)$ , avem

$$\varepsilon_{st} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + K_R \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) G_F(s)} = \frac{1}{1 + K_R (1 + \infty) K_F} = 0,$$

iar pentru  $r(t) = t \cdot 1(t)$ , avem

$$\varepsilon_{st} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 + K_R \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) G_F(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s + K_R \left(s + \frac{1}{T_i}\right) G_F(s)} = \frac{T_i}{K_R K_F}.$$

Prin urmare, eroarea staționară la referință treaptă este nulă, iar la referință rampă este finită și nenulă, cu atât mai mică cu cât factorul de

proporționalitate  $K_R$  al regulatorului este mai mare și constanta de timp integrală  $T_i$  mai mică.

În cazul c), în care

$$G_R(s) = \frac{1}{s^2} G_R^*(s), \quad G_R^*(0) \neq 0,$$

pentru  $r(t) = t \cdot 1(t)$ , avem

$$\varepsilon_{st} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 + G_R(s)G_F(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s^2 + G_R^*(s)G_F(s)} = \frac{0}{0^2 + G_R^*(0)K_F} = 0.$$

Prin urmare, eroarea staționară este nulă la referință rampă, deci și la referință treaptă.

**Observații.** 1°. Dintre cele trei cazuri ale teoremei preciziei reglării, cazul b) – cu regulator cu componentă integrală simplă, este cel mai întâlnit în aplicațiile practice industriale, deoarece este relativ simplă și anulează eroarea staționară la referință și perturbație treaptă.

2°. În cazul unui proces de tip proporțional, elementul de execuție este ales dimensional astfel încât factorul de proporționalitate  $K_F$  al părții fixate să aibă o valoare ușor supraunitară, pentru a permite modificarea mărimii reglate pe întregul domeniu de măsurare (adică de la 0 la 100%). Prin urmare, dacă regulatorul este de tip proporțional și  $K_F \approx 1$ , atunci

$$\varepsilon_{st} = \frac{1}{1 + K_R K_F} \approx \frac{1}{1 + K_R}. \quad (3)$$

La sistemele de reglare a proceselor de ordinul doi sau mai mare, la care partea fixată este de ordinul trei sau mai mare (ca în cazul reglării debitului, presiunii, temperaturii etc.), factorul de proporționalitate al regulatorului (de tip P, PI sau PID) nu poate fi mărit prea mult, deoarece sistemul de reglare devine oscilant sau chiar instabil. Totuși, în domeniul echipamentelor de automatizare, există dispozitive electronice cu reacție negativă, deci având structura unui sistem de reglare automată după abatere, în care “regulatorul” este un amplificator de tensiune cu factorul de amplificare de ordinul sutelor sau miilor. Aceste dispozitive electronice de automatizare sunt totuși stabile deoarece “procesul” are un grad de inerție neglijabil și o dinamică rapidă. Datorită valorii ridicate a factorului de proporționalitate al regulatorului, eroarea staționară este practic nulă pentru orice variație treaptă a mărimii de intrare (cu rol de “referință”) și a factorilor perturbatori. De exemplu, orice

aparatură electronică generator de semnal unificat 4...20 mA c.c. (sursă, traductor, adaptor etc.) este un sistem de reglare după abatere, deoarece numai o structură închisă cu reacție negativă poate menține semnalul de ieșire la o valoare independentă de rezistența de sarcină - principala perturbație a sistemului. Adaptorul din componența unui traductor de semnal unificat are ca referință semnalul primit de la senzor (detector, element sensibil), iar ca mărime reglată - semnalul unificat de ieșire. Deoarece amplificatorul de tensiune de pe calea directă are factorul de amplificare de ordinul miilor, semnalul de ieșire urmărește rapid și fără abatere variațiile mărimii de intrare, nefiind afectat de valoarea rezistenței electrice a elementelor receptoare înseriate (250  $\Omega$  pentru un receptor, 500  $\Omega$  pentru două receptoare, 750  $\Omega$ , pentru trei receptoare).

3°. Teorema preciziei reglării aplicată la procesele de tip integral are următorul enunț:

***Teorema preciziei reglării - pentru procese de tip integral.*** Considerăm un sistem de reglare automată liniar și strict stabil, cu ambele canale ale părții fixate de tip simplu integral.

a) Dacă funcția de transfer a regulatorului este de tip proporțional, atunci eroarea staționară este nulă la referință treaptă, respectiv finită și nenulă la perturbație treaptă.

b) Dacă funcția de transfer a regulatorului conține o componentă integrală simplă, atunci eroarea staționară este nulă la referință rampă și la perturbație treaptă.

Ținând seama că bucla deschisă a sistemului de reglare are caracter simplu integral în cazul a) și dublu integral în cazul b), demonstrația teoremei este similară demonstrației punctelor b) și c) ale teoremei precedente.

Varianta b), cu regulator cu componentă integrală simplă, este frecvent întâlnită în aplicațiile industriale la care ambele canale ale procesului sunt de tip integral, deoarece asigură eroare staționară nulă la perturbație treaptă, cu efect rampă asupra ieșirii procesului (cazul proceselor de acumulare, unde nivelul de lichid din rezervor este mărime de ieșire, iar debitul admis și cel evacuat sunt mărimi de intrare). Regulatorul de tip PI trebuie să aibă însă o componentă integrală de intensitate redusă (cu constanta de timp integrală  $T_i$  de circa 3...5 ori mai mare decât durata regimului tranzitoriu al sistemului de reglare cu  $T_i \approx \infty$ ) pentru evitarea regimului oscilant, favorizat de caracterul dublu integral al elementelor de pe calea directă.

4°. Teoremele preciziei reglării pentru procesele de tip proporțional și integral sunt valabile și pentru sistemele de reglare discrete și cu eșantionare. În ultimul caz, eroarea staționară la intrare treaptă unitară și rampă unitară se calculează cu relațiile (74)-(76) de la cap. 6.

## 9.2. CALITATEA REGLĂRII ÎN REGIM DINAMIC

În regim dinamic, calitatea sistemelor de reglare este descrisă de regulă cu ajutorul unor indici de performanță asociați răspunsului sistemului la referință sau perturbație tip treaptă. Unele aspecte ale calității regimului dinamic pot fi evidențiate și cu ajutorul caracteristicilor de frecvență, care permit aprecierea comportării sistemului la semnale de intrare sinusoidale de diferite frecvențe.

### 9.2.1. Indici direcți de calitate

Dintre indicii direcți de calitate mai frecvent utilizați în analiza și sinteza sistemelor de reglare automată menționăm: timpul de stabilizare, suprareglajul, gradul de amortizare a oscilațiilor (indicele de oscilație) și indicii de tip integral. Acești indicatori de calitate sunt asociați răspunsurilor indiciale ale sistemului de reglare la o variație de tip treaptă a mărimii de referință sau a mărimii perturbatoare.

**Timpul de stabilizare**  $T_s$  reprezintă intervalul de timp cuprins între momentul inițial  $t=0$  la care referința s-a modificat sub formă de treaptă și momentul  $t=T_s$  la care mărimea reglată  $y$  atinge pentru ultima dată una dintre limitele  $y_{st} \pm \Delta$  fără a mai ieși din zona cuprinsă între cele două limite, unde  $y_{st}$  este valoarea staționară a ieșirii, iar  $\Delta$  este  $0,05y_{st}$  sau  $0,02y_{st}$  (fig. 9.4).

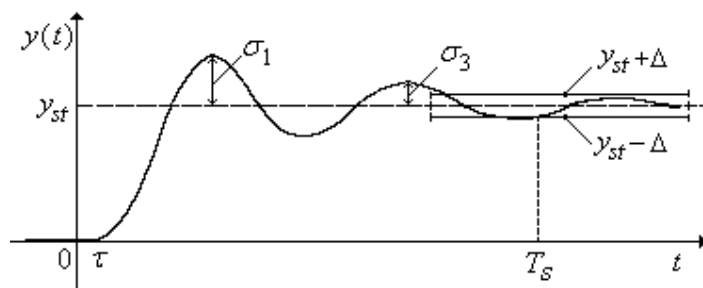


Fig. 9.4. Indici de calitate asociați răspunsului indicial.

Matematic, timpul de stabilizare este egal cu cea mai mică valoare a parametrului  $T$  astfel încât

$$|y(t) - y_{st}| \leq \Delta \quad \forall t \geq T. \quad (4)$$

Reamintim că la sistemele de întârziere de ordinul unu fără timp mort și cu constanta de timp de întârziere  $T_1$ , timpul de stabilizare este  $T_{s95} \approx 3T_1$  pentru  $\Delta = 0,05y_{st}$ , respectiv  $T_{s98} \approx 3.91T_1$  pentru  $\Delta = 0,02y_{st}$ . De asemenea, la sistemele de întârziere de ordinul doi cu constantele de timp pozitive  $T_1$  și  $T_2$ , timpul de stabilizare este

$$T_{s95} \approx 3(T_1 + T_2), \quad T_{s98} \approx 3.91(T_1 + T_2).$$

În proiectare, se impune limitarea timpului de stabilizare printr-o condiție de forma

$$T_s \leq (T_s)_{\text{impus}}.$$

Prin definiție, *durata regimului tranzitoriu* este diferența dintre timpul de stabilizare și timpul mort, adică

$$T_{tr95} = T_{s95} - \tau, \quad T_{tr98} = T_{s98} - \tau.$$

La sistemele fără timp mort, durata regimului tranzitoriu este egală cu timpul de stabilizare.

**Suprareglajul relativ**  $\sigma$  se definește ca fiind depășirea procentuală maximă a valorii staționare a mărimii reglate la modificarea treaptă a referinței ( fig. 9.4), adică

$$\sigma = \frac{\sigma_1}{y_{st}} \cdot 100\%. \quad (5)$$

Sistemele cu răspuns crescător și mărginit la referință treaptă au suprareglajul nul. În proiectarea sistemelor de reglare se impune limitarea superioară a suprareglajului  $\sigma$  la o valoare cuprinsă între 0 și 15%, în funcție de specificul procesului reglat. În majoritatea aplicațiilor, cele mai bune răspunsuri ale sistemului de reglare în raport cu factorul de proporționalitate  $K_R$  al regulatorului PID corespund unui suprareglaj în gama 2 ... 10%.

De regulă, în proiectarea unui sistem de reglare automată, se impun condițiile de calitate:

$$T_s \leq (T_s)_{\text{impus}}, \quad \sigma \leq \sigma_{\text{impus}}.$$

**Gradul de amortizare**  $\delta$  este asociat sistemelor de reglare cu răspuns indicial oscilant amortizat, fiind o măsură a raportului subunitar al primelor două depășiri pozitive ale valorii staționare ( fig. 9.4):

$$\delta = 1 - \frac{\sigma_3}{\sigma_1} . \quad (6)$$

Gradul de amortizare al sistemelor cu răspuns oscilant amortizat ia valori cuprinse între 0 și 1. Pentru limitarea duratei regimului tranzitoriu, gradul de amortizare trebuie să aibă valoarea apropiată de 1.

**Indici de calitate integrali.** Atunci când sunt aleși convenabil, indicii integrali pot asigura o caracterizare mai completă a calității regimului dinamic și o proiectare *optimală* a regulatorului, prin *minimizarea* valorii indicelui integral ales în raport cu structura și parametrii regulatorului.

La sistemele de reglare cu eroare staționară nulă la referință și perturbație treaptă, printre cei mai utilizați indici de tip integral menționăm următorii:

$$I_1 = \int_0^{\infty} |\varepsilon(t)| dt , \quad (7)$$

$$I_2 = \int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt , \quad (8)$$

$$I_3 = \int_0^{\infty} [\varepsilon^2(t) + \tau^2 \dot{\varepsilon}^2(t)] dt , \quad (9)$$

$$I_4 = \int_0^{\infty} [\varepsilon^2(t) + k(c(t) - c_{st})^2] dt , \quad (10)$$

unde  $\varepsilon$  este eroarea (abaterea),  $c$  - mărimea de comandă,  $c_{st}$  - valoarea staționară a mărimii de comandă, iar  $\tau$  și  $k$  - constante pozitive de ponderare.

Indicele  $I_1$  este rar utilizat în analiza și sinteza analitică a sistemelor de reglare din cauza operatorului de tip modul, care face imposibil calculul analitic al integralei. Ceilalți indici integrali pătratici pot fi calculați analitic. Sinteza regulatorului prin minimizarea indicelui integral pătratic  $I_2$  asigură performanțe dinamice de bună calitate, fără a garanta însă obținerea unui suprareglaj suficient de mic și un consum energetic redus. Minimizarea indicelui  $I_3$  asigură, prin comparație cu  $I_2$ , o reducere a vitezei de variație a erorii  $\varepsilon$  (cu atât mai mult cu cât constanta de ponderare  $\tau$  este mai mare) și, prin aceasta, o reducere a suprareglajului, în timp ce minimizarea indicelui  $I_4$  asigură o reducere a consumului de energie în timpul operației de stabilizare a mărimii reglate.

Se observă că indicii  $I_2$ ,  $I_3$  și  $I_4$  pot fi scriși sub forma unei sume de integrale de forma

$$I = \int_0^{\infty} z(t)^2 dt, \quad (11)$$

în care  $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$ .

În cazul modificării treaptă unitară a referinței unui sistem de reglare strict stabil cu structura din fig. 9.3, transformata Laplace a funcției

$$z(t) = \varepsilon(t)$$

este

$$Z(s) = G_{ER}(s)R(s) = \frac{1}{s[1 + G_R(s)G_F(s)]}, \quad (12)$$

iar transformata Laplace a funcției

$$z(t) = c(t) - c_{st}$$

este

$$Z(s) = \frac{G_{CR}(s) - G_{CR}(0)}{s}, \quad (13)$$

unde

$$G_{CR}(s) = \frac{G_R(s)}{1 + G_R(s)G_F(s)}. \quad (14)$$

Intr-adevăr, ținând seama de proprietatea valorii finale, avem

$$c_{st} = \lim_{s \rightarrow 0} sC(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sG_{CR}(s)R(s) = G_{CR}(0),$$

deci

$$Z(s) = C(s) - \frac{c_{st}}{s} = \frac{G_{CR}(s)}{s} - \frac{G_{CR}(0)}{s}.$$

***Teorema indicelui integral-pătratic.*** Dacă transformata Laplace

$$Z_n(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1s + a_0}$$

are numitorul hurwitzian, atunci integrala  $I = \int_0^{\infty} z(t)^2 dt$ , are valoarea

$$I = \frac{\Delta_n}{2a_n\Delta}, \quad (15)$$

în care

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_0 & -a_2 & a_4 & & 0 \\ 0 & a_1 & -a_3 & & * \\ 0 & -a_0 & a_2 & & * \\ & & & \ddots & \\ 0 & * & * & & a_{n-1} \end{vmatrix},$$

iar  $\Delta_n$  se obține din  $\Delta$  prin înlocuirea ultimei linii cu  $[B_0 \ B_1 \ B_2 \ \dots \ B_{n-1}]$ , unde

$$\begin{aligned} B_0 &= b_0^2, \\ B_1 &= b_1^2 - 2b_0b_2, \\ B_2 &= b_2^2 - 2b_1b_3 + 2b_0b_4, \\ &\vdots \\ B_{n-2} &= b_{n-2}^2 - 2b_{n-3}b_{n-1}, \\ B_{n-1} &= b_{n-1}^2. \end{aligned}$$

Principalele forme particulare ale formulei de calcul al indicelui integral  $I$  sunt prezentate mai jos.

1. Pentru  $n=4$ , funcției

$$Z_4(s) = \frac{b_3s^3 + b_2s^2 + b_1s + b_0}{a_4s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0} \quad (16)$$

îi corespunde integrala  $I = \frac{\Delta_4}{2a_4\Delta}$ , unde

$$\Delta = a_0(a_1a_2a_3 - a_1^2a_4 - a_0a_3^2) \quad (17)$$

și

$$\begin{aligned} \Delta_4 &= a_4(a_2a_3 - a_1a_4)b_0^2 + a_0a_3a_4(b_1^2 - 2b_0b_2) \\ &\quad + a_0a_1a_4(b_2^2 - 2b_1b_3) + a_0(a_1a_2 - a_0a_3)b_3^2. \end{aligned} \quad (18)$$

2. Pentru  $n=3$ , funcției

$$Z_3(s) = \frac{b_2s^2 + b_1s + b_0}{a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0} \quad (19)$$



îi corespunde integrala

$$I = \frac{a_2 a_3 b_0^2 + a_0 a_3 (b_1^2 - 2b_0 b_2) + a_0 a_1 b_2^2}{2a_0 a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3)}. \quad (20)$$

Formula (20) a indicelui  $I$  pentru  $Z_3(s)$  se obține din formula pentru  $Z_4(s)$  efectuând  $b_3 = 0$ , simplificând apoi prin  $a_4$  și efectuând în final  $a_4 = 0$ .

3. Pentru  $n=2$ , funcției

$$Z_2(s) = \frac{b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (21)$$

îi corespunde integrala

$$I = \frac{a_2 b_0^2 + a_0 b_1^2}{2a_0 a_1 a_2}. \quad (22)$$

Formula (21) a indicelui  $I$  pentru  $Z_2(s)$  se obține din formula (20) pentru  $Z_3(s)$  efectuând  $b_2 = 0$ , simplificând apoi prin  $a_3$  și efectuând în final  $a_3 = 0$ .

**Observații.** 1°. În cazul unui sistem de reglare cu regulator PID și funcția de transfer a părții fixate cunoscută (fără timp mort), indicii integrali de performanță  $I_2$ ,  $I_3$  și  $I_4$  pot fi calculați analitic în raport de parametrii de acordare ai regulatorului (factorul de proporționalitate  $K_R$ , constanta de timp integrală  $T_i$  și constanta de timp derivativă  $T_d$ ). De regulă, în proiectarea regulatorului PID pe baza indicilor de calitate nu se utilizează condiții de forma  $I \leq I_{impus}$ , ci se urmărește *minimizarea indicelui de calitate* ales  $I$  în raport cu parametrii de acordare ai regulatorului. Astfel, după determinarea expresiei analitice a indicelui de calitate

$$I = f(K_R, T_i, T_d),$$

*problema optimizării sistemului de reglare* se reduce la problema minimizării algebrice a funcției  $f$  în raport cu cei trei parametri. Metoda este însă rar utilizată în aplicații practice, deoarece necesită cunoașterea foarte exactă a funcției de transfer a părții fixate.

2°. Performanțele dinamice ale unui sistem de reglare cu regulator PID sunt determinate de valorile parametrilor de acordare ai regulatorului. În cazul aplicațiilor practice de reglare a proceselor cu funcția de transfer necunoscută, *acordarea* regulatorului PID se face *experimental*, pe baza răspunsului procesului (aflat inițial în regim staționar) la un semnal de intrare de tip treaptă (generat cu regulatorul în regim MANUAL). Astfel, la procesele cu răspuns

indicial  $h(t)$  mărginit și monoton (fără supradepășire), din graficul răspunsului putem determina ușor trei parametri: factorul de proporționalitate  $K_P$ , timpul de stabilizare  $T_{s95}$  (dat de momentul la care răspunsul atinge 95% din valoarea finală) și timpul mort  $\tau$ . În cazul acestui tip de proces, se recomandă fixarea următoarelor valori ale parametrilor regulatorului (vezi capitolul 11):

$$K_R = \frac{1}{K_P \left(1 + \frac{5\tau}{T_{s95}}\right)}, \quad T_i = \frac{T_{s95}}{3 \dots 4}, \quad T_d = 0. \quad (23)$$

Metoda poate fi aplicată și la procesele cu supradepășire (la momentul  $t_1$ ), prin înlocuirea procesului  $\mathbf{P}$  cu procesul  $\bar{\mathbf{P}}$  având răspunsul indicial  $\bar{h}(t)$  astfel încât  $\bar{h}(t) = h(t)$  pentru  $t \leq t_1$  și  $\bar{h}(t) = h(t_1)$  pentru  $t \geq t_1$ . De asemenea, metoda de acordare poate fi aplicată la procesele de fază neminimă, având răspunsul indicial  $h(t)$  pe intervalul  $[0, t_0]$  de semn opus semnului valorii finale. În acest scop, se înlocuiește procesul  $\mathbf{P}$  cu procesul  $\bar{\mathbf{P}}$  având răspunsul indicial  $\bar{h}(t)$  astfel încât  $\bar{h}(t) = 0$  pentru  $t \leq t_0$  și  $\bar{h}(t) = h(t)$  pentru  $t \geq t_0$ . În cazul proceselor cu supradepășire și de fază neminimă, se aplică relațiile (23) procesului  $\bar{\mathbf{P}}$  având răspunsul indicial  $\bar{h}(t)$  astfel încât  $\bar{h}(t) = 0$  pentru  $t \leq t_0$ ,  $\bar{h}(t) = h(t)$  pentru  $t \in [t_0, t_1]$  și  $\bar{h}(t) = h(t_1)$  pentru  $t \geq t_1$ .

Parametrii regulatorului, inclusiv constanta de timp derivativă  $T_d$ , pot fi ulterior ajustați în timpul desfășurării operației de reglare automată, în scopul îmbunătățirii performanțelor de reglare.

**3°.** Teorema indicelui integral-pătratic permite reducerea formei și ordinului unui sistem liniar prin minimizarea parametrică a indicelui integral-pătratic

$$I = \int_0^{\infty} [h(t) - h_r(t)]^2 dt, \quad (24)$$

unde  $h(t)$  este funcția indicială a sistemului, iar  $h_r(t)$  funcția indicială a sistemului redus. Condiția  $h(\infty) = h_r(\infty)$ , echivalentă cu  $G(0) = G_r(0)$ , este necesară pentru ca integrala  $I$  să fie convergentă.

Cu notația  $z(t) = h(t) - h_r(t)$ , avem

$$Z(s) = H(s) - H_r(s) = \frac{1}{s} [G(s) - G_r(s)], \quad (25)$$

iar calculul indicelui  $I$  se poate face cu ajutorul relației (15) a teoremei indicelui integral-pătratic.

Metoda este mai greoaie decât metoda Padé, dar mai precisă și mai sigură, deoarece conservă stabilitatea sistemului.

### 9.2.2. Indici indirecți de calitate

Indicii indirecți de calitate mai frecvent utilizați în analiza și sinteza sistemelor de reglare automată sunt: banda de trecere, banda de alocare a polilor și alocarea explicită a fiecărui pol în planul complex.

**Banda de frecvență** (banda de trecere sau lărgimea de bandă) este un indicator ce caracterizează *proprietatea de filtru trece-jos* a sistemului de reglare, reprezentând intervalul  $(0, \omega_b)$  în care factorul de amplificare în regim sinusoidal permanent al canalului intrare-ieșire analizat nu scade sub  $1/\sqrt{2}$  din valoarea maximă, adică

$$M(\omega) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} M_{\max}, \quad (26)$$

unde  $M(\omega)$  este modulul funcției de frecvență.

Pentru ca mărimea reglată  $y$  să urmărească referința  $r$  cu bune performanțe dinamice, modulul funcției de frecvență  $G_{YR}(j\omega)$  trebuie să aibă valoarea apropiată de 1 pe un domeniu cât mai larg de frecvențe. Așadar, în proiectare se impune limitarea inferioară a *pulsației de bandă*  $\omega_b$  a canalului mărime reglată-referință, adică

$$\omega_b \geq \omega_{impus}. \quad (27)$$

Pe de altă parte, pentru reducerea efectului perturbației  $v$  asupra mărimii reglate  $y$ , banda de frecvență asociată funcției de frecvență  $G_{YV}(j\omega)$ , trebuie să fie cât mai mică. În proiectare se impune limitarea superioară a *pulsației de bandă*  $\omega_b$  a canalului mărime reglată-perturbație al sistemului de reglare, adică

$$\omega_b \leq \omega_{impus}. \quad (28)$$

**Alocarea polilor.** Performanțele dinamice ale unui sistem de reglare liniar sunt determinate, în mod dominant, de poziția în planul complex a polilor funcției de transfer a sistemului. Astfel, în cazul unui sistem de reglare

de ordinul  $n$  care are numai poli simpli de forma  $s_i = a_i + jb_i$  cu  $a_i < 0$ ,  $i=1,2,\dots,n$ , variabila timp  $t$  apare în componenta tranzitorie a răspunsului indicial la referință sau perturbație treaptă numai prin intermediul exponențialelor

$$e^{p_i t} = e^{a_i t} (\cos b_i t + j \sin b_i t).$$

În mod evident, dacă părțile reale  $a_i$  ale polilor au valori negative mai mici, componenta tranzitorie este atenuată și eliminată mai rapid, iar durata regimului tranzitoriu este mai mică.

Problema alocării polilor în planul complex al variabilei  $s$  poate fi abordată în două moduri: prin alocarea polilor la stânga dreptei  $s = \alpha$  ( $\alpha < 0$ ) paralelă cu axa ordonatelor și prin alocarea explicită a fiecărui pol în semiplanul stâng al planului complex.

*Prima variantă* are la bază conceptul de **bandă de alocare a polilor**, definită ca fiind cel mai mic interval negativ  $(-\infty, \alpha]$  care conține toate părțile reale ale polilor sistemului de reglare. Dacă  $P(s)$  este polinomul polilor sistemului de reglare, condiția ca toți polii să aibă partea reală mai mică sau egală cu  $\alpha$  este echivalentă cu condiția ca ecuația polinomială

$$P(s + \alpha) = 0 \quad (29)$$

să aibă toate rădăcinile  $s_i$  cu partea reală negativă, ceea ce poate fi analizat cu criteriul de stabilitate Hurwitz. În proiectare se impune fie minimizarea indicelui de calitate  $\alpha$  în raport cu parametrii de acordare ai regulatorului, fie restricționarea acestui indice printr-o condiție de forma

$$\alpha \leq \alpha_{impus}, \quad (30)$$

unde  $\alpha_{impus} < 0$ . Minimizarea indicelui de calitate  $\alpha$  asigură, de regulă, un răspuns indicial rapid de tip oscilant amortizat. Ambele metode de proiectare a calității dinamice a unui sistem de reglare, ca și celelalte metode prezentate anterior, sunt de tip *parametric*, în sensul că permit determinarea parametrilor unui regulator cu structura dinamică dată (de exemplu, de tip PID) astfel încât să fie satisfăcute cerințele impuse prin proiectare.

*A doua variantă*, aceea a **alocării explicite a polilor** sistemului de reglare, permite *sinteza structurii și parametrilor* regulatorului.

**Teorema alocării polilor la sistemele fără timp mort.** Considerăm un sistem de reglare cu funcția de transfer a părții fixate  $G_F(s)$  sub forma unei raționale ireductibile având numitorul de gradul  $n$  și numărătorul hurwitzian de gradul  $k$ . Dacă

$$P_{n-k}(s) = c_{n-k}s^{n-k} + c_{n-k-1}s^{n-k-1} + \dots + c_1s + 1 \quad (31)$$

este un polinom hurwitzian arbitrar, atunci există un regulator simplu propriu, de ordinul  $n$  sau mai mic, astfel încât sistemul de reglare să aibă funcția de transfer

$$G_0(s) = \frac{1}{P_{n-k}(s)}, \quad (32)$$

iar sistemul deschis să fie simplu integral.

*Demonstrație.* Deoarece polinomul  $P_{n-k}(s)$  este hurwitzian, toți coeficienții acestuia sunt pozitivi. Din formula funcției de transfer  $G_0(s)$  a sistemului de reglare reprezentat în fig. 9.3,

$$G_0(s) = \frac{G_R(s)G_F(s)}{1 + G_R(s)G_F(s)},$$

obținem funcția de transfer simplu proprie a regulatorului

$$G_R(s) = \frac{1}{G_F(s)[G_0^{-1}(s) - 1]} = \frac{1}{G_F(s)[P_{n-k}(s) - 1]} \quad (33)$$

și funcția de transfer a sistemului deschis

$$G_d(s) = G_R(s)G_F(s) = \frac{1}{P_{n-k}(s) - 1}, \quad (34)$$

care este de tip simplu integral, indiferent dacă partea fixată este de tip proporțional sau integral. Regulatorul este simplu propriu deoarece

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G_R(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{G_F(s)P_{n-k}(s)} \neq 0.$$

**Observații. 1°.** Funcția de transfer (33) a regulatorului are numărătorul și numitorul de același grad ( $n$  sau mai mic). Dacă partea fixată este de tip proporțional, atunci regulatorul este de tip simplu integral. Dacă partea fixată este de tip simplu integral, atunci regulatorul este de tip proporțional, având numărătorul și numitorul de gradul  $n-1$  sau mai mic. În general, dacă ecuația

$P_{n-k}(s) = 1$  are ca rădăcină un pol al funcției de transfer a părții fixate  $G_F(s)$ , atunci ordinul funcția de transfer a regulatorului este mai mic decât  $n$ .

2°. Prin alegerea convenabilă a polinomului polilor sistemului de reglare  $P_{n-k}(s)$ , răspunsul sistemului de reglare la referință sau perturbație treaptă poate fi teoretic oricât de rapid. În cazul aplicațiilor practice, unde modelul părții fixate este cunoscut cu un anumit grad de incertitudine, polinomul polilor sistemului de reglare trebuie ales astfel încât constantele de timp ale acestuia să fie comparabile cu cele ale părții fixate. De exemplu, în cazul în care partea fixată este de tip *proporțional*, regulatorul trebuie proiectat astfel încât durata răspunsului indicial al sistemului de reglare să fie cel mult de 2 ... 5 ori mai mică decât durata răspunsului indicial al părții fixate. Un asemenea mod practic de abordare a sintezei regulatorului asigură o corelație mai bună între rezultatele teoretice și cele practice, precum și o limitare a magnitudinii semnalului de comandă generat de regulator la o variație treaptă a referinței.

3°. Dacă polinomul polilor sistemului de reglare are forma

$$P_{n-k}(s) = (T_1s + 1)(T_2s + 1) \cdots (T_{n-k}s + 1), \quad (35)$$

unde toate constantele de timp sunt reale și pozitive, atunci regulatorul este *stabil*. În continuare, vom demonstra această afirmație. Din forma (33) a funcției de transfer a regulatorului rezultă că acesta este stabil atunci când toate rădăcinile nenule ale ecuației  $P_{n-k}(s) = 1$  au partea reală negativă. Presupunând că  $s = x + jy \neq 0$  este o rădăcină nenulă a ecuației  $P_{n-k}(s) = 1$ , trebuie să arătăm că  $x < 0$ . Din  $P_{n-k}(x + jy) = 1$  rezultă  $|P_{n-k}(x + jy)| = 1$ , deci

$$\prod_{i=1}^{n-k} [(T_i x + 1)^2 + T_i^2 y^2] = 1.$$

Din această relație rezultă  $x < 0$ , deoarece  $x \geq 0$  ar implica  $(T_i x + 1)^2 + T_i^2 y^2 > 1$ , deci

$$\prod_{i=1}^{n-k} [(T_i x + 1)^2 + T_i^2 y^2] > 1.$$

În plus, utilizând criteriul de stabilitate Hurwitz, este relativ ușor de arătat că dacă ordinul relativ al părții fixate este mai mic sau egal cu patru, adică  $n - k \leq 4$ , atunci regulatorul este stabil pentru orice polinom hurwitzian  $P_{n-k}(s)$  ales. De exemplu, dacă  $n - k = 3$ , ecuația  $P_{n-k}(s) = 1$  are o rădăcină nulă și două rădăcini (reale sau complex-conjugate) cu partea reală negativă

(întrucât sunt rădăcinile trinomialului de gradul doi  $c_3s^2 + c_2s + c_1$  cu coeficienți pozitivi).

4°. La reglarea proceselor de tip proporțional, *factorul de magnitudine* al semnalului de comandă la referință treaptă, egal cu raportul dintre valoarea inițială  $c(0_+)$  și cea finală  $c(\infty)$ , este dat de relația

$$M = \frac{G_F(0)}{\lim_{s \rightarrow \infty} G_F(s)P_{n-k}(s)}. \quad (36)$$

Intr-adevăr, avem

$$G_{CR}(s) = \frac{G_0(s)}{G_F(s)} = \frac{1}{G_F(s)P_{n-k}(s)}, \quad (37)$$

$$c(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} G_{CR}(s) = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow \infty} G_F(s)P_{n-k}(s)},$$

$$c(\infty) = G_{CR}(0) = \frac{1}{G_F(0)},$$

deci

$$M = \frac{c(0_+)}{c(\infty)} = \frac{G_F(0)}{\lim_{s \rightarrow \infty} G_F(s)P_{n-k}(s)}.$$

Dacă polinomul  $P_{n-k}(s)$  al polilor sistemului de reglare are toate constantele de timp pozitive, din (36) rezultă

$$M = \frac{G_F(0)}{T_1 T_2 \cdots T_{n-k}} \cdot \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^{n-k}}{G_F(s)}, \quad (38)$$

deci

$$T_1 T_2 \cdots T_{n-k} = \frac{G_F(0)}{M} \cdot \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^{n-k}}{G_F(s)},$$

iar din inegalitatea mediilor, avem:

$$\left( \frac{T_1 + T_2 + \cdots + T_{n-k}}{n-k} \right)^{n-k} \geq T_1 T_2 \cdots T_{n-k} = \frac{G_F(0)}{M} \cdot \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^{n-k}}{G_F(s)},$$

cu egalitate pentru

$$T_1 = T_2 = \cdots = T_{n-k}.$$

Așadar, pentru  $M$  dat, suma

$$T_{\Sigma} = T_1 + T_2 + \dots + T_{n-k}$$

este minimă atunci când  $T_1 = T_2 = \dots = T_{n-k}$ . Pe de altă parte, binomul  $T_{\Sigma}s + 1$  este cea mai bună aproximație Padé de ordinul unu a lui  $P_{n-k}(s)$ , adică

$$P_{n-k}(s) \approx T_{\Sigma}s + 1;$$

deci

$$G_0(s) = \frac{1}{P_{n-k}(s)} \approx \frac{1}{T_{\Sigma}s + 1}.$$

Prin urmare, pentru  $M$  dat, timpul de răspuns al sistemului de reglare la referință treaptă este (aproximativ) minim atunci când constanta de timp  $T_{\Sigma}$  este minimă, deci atunci când

$$T_1 = T_2 = \dots = T_{n-k}. \quad (39)$$

În aplicațiile practice la care partea fixată este de tip proporțional și de ordin superior ( $n \geq 2$ ), factorul de magnitudine  $M$  al semnalului de comandă la referință treaptă trebuie limitat la o valoare mai mică decât 20 pentru evitarea amplificării excesive a zgomotului, a consumului energetic sporit, a uzurii și a regimurilor de funcționare periculoase.

***Teorema alocării polilor la sistemele cu timp mort.*** Considerăm un sistem de reglare cu funcția de transfer a părții fixate

$$G_F(s) = G(s) e^{-\tau s},$$

unde  $G(s)$  este o funcție rațională ireductibilă, cu numitorul de gradul  $n$  și numărătorul hurwitzian de gradul  $k$ . Pentru

$$P_{n-k}(s) = (T_1s + 1)(T_2s + 1) \dots (T_{n-k}s + 1), \quad T_1, T_2, \dots, T_{n-k} > 0,$$

există un regulator stabil și simplu propriu astfel încât sistemul de reglare să aibă funcția de transfer

$$G_0(s) = \frac{e^{-\tau s}}{P_{n-k}(s)}, \quad (40)$$

iar sistemul deschis să fie simplu integral.

*Demonstrație.* Din (40) și relația



$$G_0(s) = \frac{G_R(s)G_F(s)}{1 + G_R(s)G_F(s)},$$

rezultă funcția de transfer a regulatorului

$$G_R(s) = \frac{1}{G_F(s)[G_0^{-1}(s) - 1]} = \frac{1}{G(s)[P_{n-k}(s) - e^{-\tau s}]}. \quad (41)$$

Regulatorul este simplu propriu deoarece

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G_R(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{G(s)[P_{n-k}(s) - 0]} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{G(s)P_{n-k}(s)} \neq 0.$$

Funcția de transfer a sistemului deschis, cu expresia

$$G_d(s) = G_R(s)G_F(s) = \frac{e^{-\tau s}}{P_{n-k}(s) - e^{-\tau s}}, \quad (42)$$

este de tip simplu integral, deoarece

$$\begin{aligned} P_{n-k}(0) - e^{-\tau \cdot 0} &= 1 - 1 = 0, \\ \lim_{s \rightarrow 0} sG_d(s) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{e^{\tau s} P_{n-k}(s) - 1} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\tau e^{\tau s} P_{n-k}(s) + e^{\tau s} P'_{n-k}(s)} \\ &= \frac{1}{\tau + T_1 + T_2 + \dots + T_{n-k}} \neq 0, \end{aligned}$$

indiferent dacă partea fixată este de tip proporțional sau integral. Dacă partea fixată este de tip proporțional, atunci regulatorul este de tip simplu integral, iar dacă partea fixată este de tip integral, atunci regulatorul este de tip proporțional.

Deoarece  $G(s)$  are numărătorul hurwitzian, regulatorul este stabil atunci când ecuația  $P_{n-k}(s) - e^{-\tau s} = 0$  are toate rădăcinile nenule situate în semiplanul stâng. Dacă  $s = x + jy \neq 0$  este o rădăcină a acestei ecuații, atunci

$$\prod_{i=1}^{n-k} (T_i x + 1 + j T_i y) = e^{-\tau(x+jy)},$$

iar prin egalarea modulelor, obținem

$$\prod_{i=1}^{n-k} [(T_i x + 1)^2 + T_i^2 y^2] = e^{-2\tau x}.$$

Această relație nu este adevărată pentru  $x \geq 0$ , deoarece

$$\prod_{i=1}^{n-k} [(T_i x + 1)^2 + T_i^2 y^2] > 1 \geq e^{-2\tau x}.$$

Prin urmare, avem  $x < 0$ , deci regulatorul este stabil.

**Observații. 5°.** Deoarece funcția de transfer

$$G_{CR}(s) = \frac{G_0(s)}{G_F(s)} = \frac{1}{G(s)P_{n-k}(s)}$$

nu depinde de timpul mort  $\tau$  al părții fixate, răspunsul  $c(t)$  al sistemului de reglare la referință treaptă este identic cu cel din cazul în care partea fixată este fără timp mort. Prin urmare, la reglarea proceselor de tip proporțional, *factorul de magnitudine* al semnalului de comandă la referință treaptă (egal cu raportul dintre valoarea inițială și cea finală a semnalului de comandă), este dat de relațiile (36) și (38), în care s-a înlocuit  $G_F(s)$  cu  $G(s)$ :

$$M = \frac{G(0)}{\lim_{s \rightarrow \infty} G(s)P_{n-k}(s)} = \frac{G(0)}{T_1 T_2 \cdots T_{n-k}} \cdot \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^{n-k}}{G(s)}. \quad (43)$$

Ca și în cazul reglării proceselor proporționale fără timp mort, timpul de răspuns al sistemului de reglare la referință treaptă pentru  $M$  dat este aproximativ minim atunci când

$$T_1 = T_2 = \cdots = T_{n-k}.$$

**6°.** Funcția de transfer a regulatorului (41) poate fi scrisă sub forma

$$G_R(s) = \frac{1}{G(s)P_{n-k}(s)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{G(s)P_{n-k}(s)} \cdot G(s) e^{-\tau s}} = \frac{R_1(s)}{1 - R_1(s)R_2(s)}$$

unde

$$R_1(s) = \frac{1}{G(s)P_{n-k}(s)} \quad (44)$$

este funcția de transfer simplu proprie a regulatorului intern, iar

$$R_2(s) = G_F(s) = G(s) e^{-\tau s} \quad (45)$$

este funcția de transfer a *modelului părții fixate*. Prin urmare, regulatorul poate fi reprezentat și implementat sub forma schemei bloc din fig. 9.5, care conține modelul părții fixate.

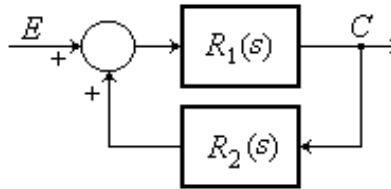


Fig. 9.5. Schema bloc a regulatorului cu modelul părții fixate.

Scriind funcția de transfer a regulatorului sub forma

$$G_R(s) = \frac{1}{G(s)P_{n-k}(s)} \cdot \frac{1}{1 - e^{-\tau s} / P_{n-k}(s)} = \frac{R_1(s)}{1 - R_3(s)},$$

unde

$$R_3(s) = G_0(s) = \frac{e^{-\tau s}}{P_{n-k}(s)} \quad (46)$$

este funcția de transfer a *modelului sistemului de reglare*, regulatorul poate fi reprezentat sub forma schemei bloc din fig. 9.6, care conține modelul dorit al sistemului de reglare.

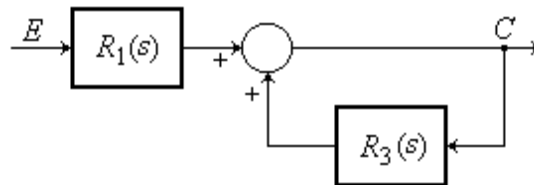


Fig. 9.6. Schema bloc a regulatorului cu modelul dorit al sistemului de reglare.

### 9.3. APLICAȚII REZOLVATE

♦ **Aplicația 9.1.** Elementele unui sistem de reglare automată (fig. 9.2) au următoarele ecuații:

$$\mathbf{R:} \quad c = k\varepsilon, \quad \varepsilon = r - m, \quad k > 0,$$

$$\mathbf{E:} \quad 2\dot{u} + u = 2c;$$

$$\mathbf{P:} \quad 5\dot{y} + y = u - 0,25v;$$

$$\mathbf{T:} \quad \dot{m} + m = y.$$

Să se calculeze eroarea staționară la referință și perturbație treaptă unitară, respectiv rampă unitară. Care este valoarea minimă a erorii staționare la referință treaptă unitară?

**Soluție.** Avem

$$G_R = k, \quad G_P = \frac{1}{5s+1}, \quad G_V = \frac{-1}{4(5s+1)},$$

$$G_E = \frac{2}{2s+1}, \quad G_T = \frac{1}{s+1},$$

$$G_d = G_R G_E G_P G_T = \frac{2k}{(2s+1)(5s+1)(s+1)}.$$

Așadar,

$$\text{pentru } r(t) = 1(t): \quad \varepsilon_{st} = \lim_{s \rightarrow 0} G_{ER}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1+G_d} = \frac{1}{1+2k};$$

$$\text{pentru } v(t) = 1(t): \quad \varepsilon_{st} = \lim_{s \rightarrow 0} G_{EV}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-G_V G_T}{1+G_d} = \frac{-1}{4(1+2k)}.$$

Eroarea staționară la intrare rampă este de infinit ori mai mare (în modul) decât la intrare treaptă. Prin urmare, eroarea staționară la referință rampă și perturbație rampă este  $\infty$ , respectiv  $-\infty$ .

Scriind ecuația polilor  $1+G_d=0$  sub forma

$$10s^3 + 17s^2 + 8s + 1 + 2k = 0,$$

din criteriul de stabilitate Hurwitz rezultă că sistemul de reglare este strict stabil atunci când  $\Delta_2 > 0$ , unde

$$\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 = 8 \cdot 17 - 10(1+2k) = 2(63 - 10k).$$

Așadar, valorile erorii staționare calculate sunt valabile numai atunci când sistemul de reglare este strict stabil, adică pentru  $0 < k < 6,3$ . Prin urmare, eroarea staționară la treaptă unitară satisface condiția

$$\varepsilon_{st} > \frac{1}{1+2 \cdot 6,3} \approx 0,0735 = 7,35 \text{ \%}.$$

♦ **Aplicația 9.2.** Fie sistemul de reglare automată caracterizat prin

$$G_R = K\left(1 + \frac{1}{4s}\right), \quad K > 0, \quad G_E = \frac{4}{2s+1}, \quad G_P = \frac{1}{4s+1}, \quad G_T = \frac{1}{s+1}.$$

Să se determine  $K$  astfel încât

- polii sistemului să fie situați în stânga dreptei  $s = -0,2$ ;
- banda de alocare a polilor sistemului să fie cât mai la stânga posibil.

**Soluție.** Sistemul de reglare are

$$G_d = \frac{K}{s(2s+1)(s+1)}$$

și polinomul polilor

$$P(s) = 2s^3 + 3s^2 + s + K.$$

Din criteriul Hurwitz rezultă că sistemul este stabil pentru  $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$ , adică

$$0 < K < \frac{3}{2}.$$

a) Polii sistemului de reglare sunt situați în stânga dreptei  $s = -0,2$  dacă polinomul

$$\begin{aligned} P(s-0,2) &= 2(s-0,2)^3 + 3(s-0,2)^2 + (s-0,2) + K \\ &= 2s^3 + 1,8s^2 + 0,04s - 0,096 + K \end{aligned}$$

are toate rădăcinile cu partea reală negativă. Conform criteriului Hurwitz, este necesar și suficient ca toți coeficienții  $a_i$  ai polinomului  $P(s)$  și minorul principal

$$\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 = 2(0,132 - K)$$

să fie pozitivi. În concluzie, sistemul de reglare are toți polii situați în stânga dreptei  $s = -0,2$  pentru

$$0,096 < K < 0,132.$$

În fig. 9.7 sunt prezentate răspunsurile indiciale  $y(t)$  ale sistemului de reglare la referință treaptă unitară pentru cele două valori extreme ale factorului de proporționalitate  $K$ .

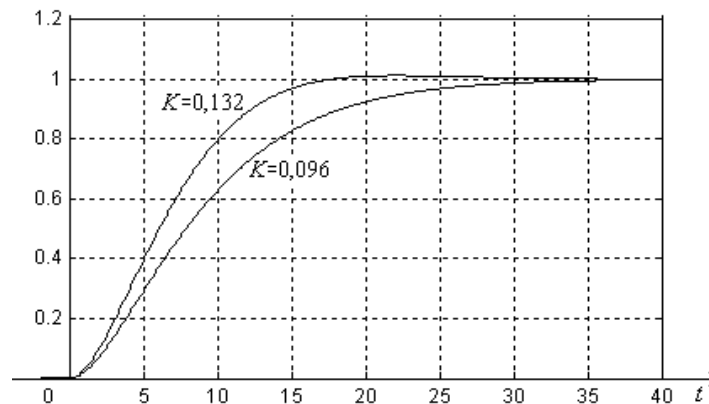


Fig. 9.7. Răspunsuri ale sistemului de reglare la referință treaptă unitară.

b) Trebuie să găsim cea mai mică valoare a lui  $\alpha$  astfel încât polinomul

$$\begin{aligned} P(s+\alpha) &= 2(s+\alpha)^3 + 3(s+\alpha)^2 + (s+\alpha) + K \\ &= 2s^3 + (3+6\alpha)s^2 + (6\alpha^2+6\alpha+1)s + 2\alpha^3 + 3\alpha^2 + \alpha + K \end{aligned}$$

să fie hurwitzian. Coeficienții

$$a_1 = 6\alpha^2 + 6\alpha + 1, \quad a_2 = 3(1 + 2\alpha), \quad a_3 = 2$$

sunt pozitivi pentru  $\alpha > \alpha_0$ , unde

$$\alpha_0 = \frac{-3 + \sqrt{3}}{6} \approx -0,2113.$$

În continuare, vom arăta că există o singură valoare reală a lui  $K$  astfel încât toți polii sistemului de reglare să fie situați la stânga sau pe dreapta  $s = \alpha_0$ . Acest lucru este posibil dacă  $a_0 = 2\alpha^3 + 3\alpha^2 + \alpha + K \geq 0$  și  $\Delta_2 = a_1a_2 - a_0a_3 \geq 0$  pentru  $\alpha = \alpha_0$ . Într-adevăr, pentru  $\alpha = \alpha_0$ , avem  $\Delta_2 = -a_0a_3 = -2a_0$ , iar din condițiile  $a_0 \geq 0$  și  $\Delta_2 \geq 0$ , rezultă  $a_0 = 0$ , deci

$$K = -2\alpha_0^3 - 3\alpha_0^2 - \alpha_0 = \frac{\sqrt{3}}{18} \approx 0,0962.$$

Valoare  $K = \sqrt{3}/18$  nu asigură totuși cel mai rapid răspuns indicial al sistemului de reglare (fig. 9.7), răspunsul pentru  $K = 0,132$  fiind mai rapid, deci mai convenabil sub aspect dinamic.

♦ **Aplicația 9.3.** Pentru  $\omega_n$  pozitiv dat, să se afle valoarea factorului de amortizare  $\xi > 0$  al sistemului de întârziere de ordinul doi, cu funcția de transfer

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2},$$

astfel încât indicele integral pătratic  $I_2 = \int_0^\infty (y(t) - y_{st})^2 dt$  să aibă valoarea minimă, unde  $y(t)$  este răspunsul indicial al sistemului.

**Soluție.** Cu notația

$$z(t) = y(t) - y_{st},$$

avem

$$Z(s) = \frac{G(s) - G(0)}{s} = \frac{-(s + 2\xi\omega_n)}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2},$$

iar din (22) rezultă

$$I_2 = \frac{1}{2\omega_n} \left( 2\xi + \frac{1}{2\xi} \right).$$

Deoarece

$$2\xi + \frac{1}{2\xi} = \frac{(2\xi - 1)^2}{2\xi} + 2 \geq 2,$$

cu egalitate pentru  $\xi = \frac{1}{2}$ , rezultă că indicele de calitate  $I_2$  are valoarea minimă

$(I_2)_{\min} = \frac{1}{\omega_n}$  pentru  $\xi_{\text{opt}} = \frac{1}{2}$ . Pentru această valoare a lui  $\xi$ , răspunsul indicial are o supradepășire de 16,3% (fig. 9.8).

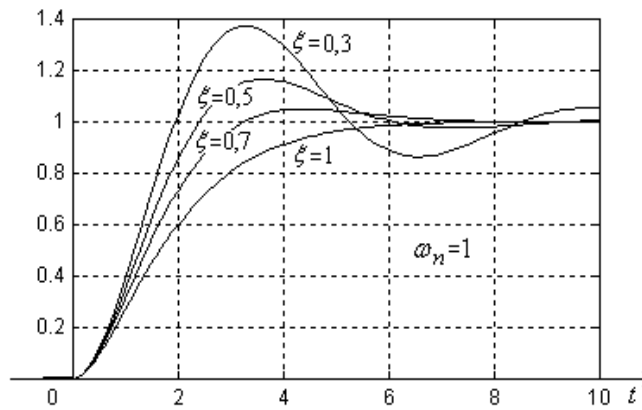


Fig. 9.8. Răspunsuri indiciale ale sistemului cu  $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$ .

♦ **Aplicația 9.4.** Pentru sistemul de întârziere de ordinul doi din aplicația precedentă, să se determine valoarea factorului de amortizare  $\xi$  astfel încât indicele de calitate

$$I_3 = \int_0^{\infty} [(y(t) - y_{st})^2 + \tau^2 \dot{y}^2(t)] dt$$

să fie minim.

**Soluție.** Se observă că

$$I_3 = I_2 + \tau^2 I,$$

unde

$$I_2 = \frac{1}{2\omega_n} \left( 2\xi + \frac{1}{2\xi} \right)$$

și

$$I = \int_0^{\infty} z^2(t) dt,$$

cu

$$z(t) = \dot{y}(t).$$

Ținând seama că

$$Z(s) = sY(s) = sG(s)U(s) = G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2},$$

cu relația (22) obținem

$$I = \frac{\omega_n}{4\xi};$$

prin urmare,

$$I_3 = \frac{1}{2\omega_n} \left( 2\xi + \frac{1 + \tau^2 \omega_n^2}{2\xi} \right).$$

Pentru  $\omega_n$  dat și  $\xi$  variabil,  $I_3$  are valoarea minimă

$$(I_3)_{\min} = \sqrt{\frac{1}{\omega_n^2} + \tau^2},$$

obținută pentru

$$\xi_{\text{opt}} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \tau^2 \omega_n^2}.$$

Pentru  $\tau=0$ , avem  $\xi_{\text{opt}}=0,5$  (cazul problemei precedente); pentru  $\tau = \frac{1}{\omega_n}$ , avem  $\xi_{\text{opt}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,71$ ; pentru  $\tau = \frac{\sqrt{3}}{\omega_n}$  avem  $\xi_{\text{opt}}=1$ . În conformitate cu relația (5.80) și fig. 5.11, lui  $\xi=0,5$  îi corespunde suprareglajul  $\sigma_1 \approx 16,3\%$ , lui  $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}$  îi corespunde suprareglajul  $\sigma_1 \approx 4,3\%$ , iar lui  $\xi=1$  îi corespunde suprareglajul  $\sigma_1=0$ .

♦ **Aplicația 9.5.** Pentru sistemul de reglare automată caracterizat prin

$$G_R = K, \quad G_F = \frac{1}{5s(2s+1)(5s+1)}, \quad K > 0,$$

să se calculeze și să se minimizeze indicele de calitate

$$I_2 = \int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt$$

în raport cu factorul de proporționalitate  $K$ , unde  $\varepsilon(t)$  este funcția de variație a erorii la referință treaptă unitară.

**Soluție.** Avem:

$$G_{ER}(s) = \frac{1}{1 + G_R G_F} = \frac{5s(2s+1)(5s+1)}{50s^3 + 35s^2 + 5s + K},$$

$$Z(s) = E(s) = \frac{G_{ER}(s)}{s} = \frac{5(2s+1)(5s+1)}{50s^3 + 35s^2 + 5s + K},$$

iar din (20) obținem

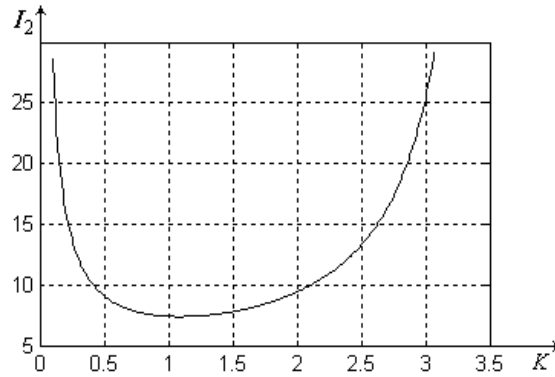
$$I_2(K) = \frac{39K + 35}{2K(7 - 2K)}.$$

Indicele de calitate  $I_2$  este minim atunci când derivata sa în raport cu  $K$  este nulă. Rezultă

$$78K^2 + 140K - 245 = 0,$$

de unde obținem  $K_{\text{opt}} \approx 1,09$ . Din reprezentarea grafică a indicelui  $I_2$  (fig. 9.9), se observă că indicele de calitate  $I_2$  are o variație foarte mică atunci când factorul de proporționalitate  $K$  ia valori între 0,7 și 1,6.



Fig. 9.9. Caracteristica  $I_2(K)$ .

♦ **Aplicația 9.6.** Pentru sistemul de reglare automată cu

$$G_R = \frac{K}{s}, \quad K > 0, \quad G_F = \frac{1}{4(8s+1)},$$

să se afle  $K$  astfel încât, la modificarea treaptă unitară a referinței, consumul de energie pentru comanda procesului să fie minim.

**Soluție.** Vom calcula și minimiza indicele integral

$$I = \int_0^{\infty} z^2(t) dt,$$

unde  $z(t) = c(t) - c_{st}$ . Avem

$$G_{CR}(s) = \frac{G_R}{1 + G_R G_F} = \frac{4K(8s+1)}{32s^2 + 4s + K},$$

$$Z(s) = \frac{G_{CR}(s) - G_{CR}(0)}{s} = \frac{16(-8s + 2K - 1)}{32s^2 + 4s + K},$$

iar din (22) obținem

$$I = 32\left(4K + \frac{1}{K} - 2\right).$$

Indicele de calitate  $I$  este minim pentru  $K = 0,5$ .

♦ **Aplicația 9.7.** Utilizând metoda indicelui integral-pătratic, să se reducă sistemul cu funcția de transfer

$$G(s) = \frac{1}{(2s+1)(6s+1)},$$

la sistemul cu funcția de transfer

$$G_r(s) = \frac{1}{Ts+1}.$$

**Soluție.** Vom minimiza indicele integral-pătratic

$$I(T) = \int_0^{\infty} [h(t) - h_r(t)]^2 dt,$$

unde  $h(t)$  este funcția indicială a sistemului cu funcția de transfer  $G(s)$ , iar  $h_r(t)$  funcția indicială a sistemului redus. Pentru  $z(t) = h(t) - h_r(t)$ , avem

$$Z(s) = \frac{1}{s} [G(s) - G_r(s)] = \frac{b_1 s + b_0}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0},$$

unde

$$a_0 = 1, \quad a_1 = T + 6, \quad a_2 = 8T + 12, \quad a_3 = 12T, \\ b_0 = T - 8, \quad b_1 = -12.$$

Ținând seama de relația (20) particularizată la cazul  $b_2 = 0$ , rezultă

$$I = \frac{a_2 b_0^2 + a_0 b_1^2}{2a_0(a_1 a_2 - a_0 a_3)} = \frac{(2T+3)(T-8)^2 + 36}{(T+6)(2T+3) - 3T} = \frac{(2T+3)(T-8)^2 + 36}{2(T+3)^2}.$$

Indicele integral-pătratic  $I$  are valoarea minimă pentru  $T_{opt} \approx 8,17$  (fig. 9.10).

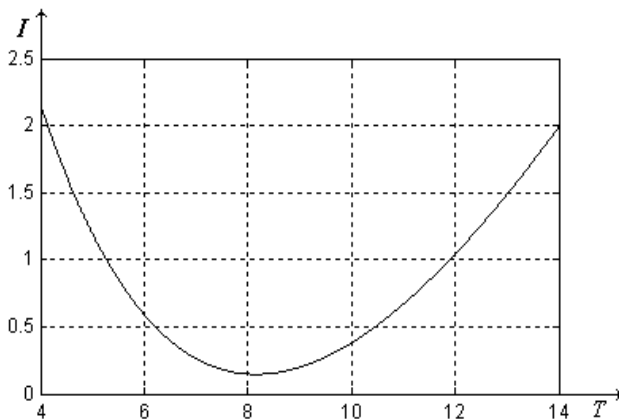


Fig. 9.10. Dependența  $I(T)$

Valoarea optimă a constantei de timp  $T_{opt}$  este apropiată de valoarea  $T = 8$  care rezultă din metoda de reducere Padé:

$$G(s) = \frac{1}{(2s+1)(6s+1)} = \frac{1}{12s^2 + 8s + 1} \approx \frac{1}{8s+1}.$$

◆ **Aplicația 9.8.** Pentru sistemul de reglare cu partea fixată

$$G_F(s) = \frac{K_F}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

unde  $T_1$  este constanta de timp dominantă, iar  $T_\Sigma$  este suma constantelor de timp parazite ( $T_1 \gg T_\Sigma > 0$ ), să se determine  $G_R(s)$  de tip simplu integral astfel încât sistemul de reglare să aibă polinomul polilor

$$P_2(s) = (xT_\Sigma s + 1)^2, \quad x > 0.$$

Particularizare pentru

$$\text{a) } G_F(s) = \frac{2}{(10s+1)(2s+1)}, \quad x=2;$$

$$\text{b) } G_F(s) = \frac{2}{(10s+1)(2s+1)}, \quad x=1.$$

**Soluție.** Partea fixată are numitorul de gradul  $n=2$  și numărătorul de gradul  $k=0$ . Deoarece polinomul polilor impus sistemului de reglare are gradul doi, adică egal cu  $n-k$ , putem utiliza teorema alocării polilor la sistemele fără timp mort. Astfel, în conformitate cu (33), (32) și (36), funcția de transfer a regulatorului, funcția de transfer a sistemului de reglare și factorul de magnitudine al semnalului de comandă la referință treaptă au expresiile:

$$G_R(s) = \frac{1}{G_F(s)[P_2(s)-1]} = \frac{(T_1s+1)(T_\Sigma s+1)}{xK_F T_\Sigma s(xT_\Sigma s+2)}, \quad (47)$$

$$G_0(s) = \frac{1}{P_2(s)} = \frac{1}{(xT_\Sigma s+1)^2}, \quad (48)$$

$$M = \frac{c(0_+)}{c(\infty)} = \frac{G_F(0)}{\lim_{s \rightarrow \infty} G_F(s)P_3(s)} = \frac{T_1}{x^2 T_\Sigma}. \quad (49)$$

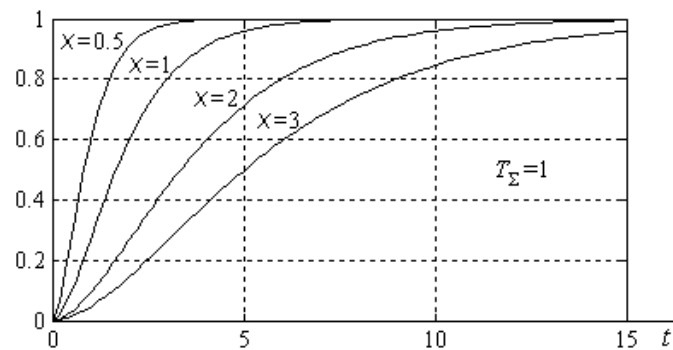


Fig. 9.11. Răspunsuri  $y(t)$  la referință treaptă unitară ale sistemului de reglare cu funcția de transfer (48).

a) Pentru  $x=2$ , regulatorul este de tip PI, cu funcția de transfer

$$G_R(s) = \frac{T_1 s + 1}{4K_F T_\Sigma s},$$

adică

$$G_R(s) = K_R \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right),$$

unde

$$K_R = \frac{T_1}{4K_F T_\Sigma}, \quad T_i = T_1.$$

Sistemul de reglare are funcția de transfer

$$G_0(s) = \frac{1}{(2T_\Sigma s + 1)^2},$$

iar comanda regulatorului la referință treaptă are factorul de magnitudine

$$M = \frac{T_1}{4T_\Sigma}.$$

Pentru  $T_1 = 10$  și  $T_\Sigma = 2$ , adică

$$G_F(s) = \frac{2}{(10s + 1)(2s + 1)},$$

avem

$$G_R(s) = K_R \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right), \quad K_R = \frac{5}{8}, \quad T_i = 10,$$

$$G_0(s) = \frac{1}{(4s + 1)^2}, \quad M = \frac{5}{4}.$$

Răspunsul indicial al părții fixate  $y_F(t)$  și răspunsurile la referință treaptă  $c(t)$  și  $y(t)$  ale sistemului de reglare sunt reprezentate în fig. 9.12.

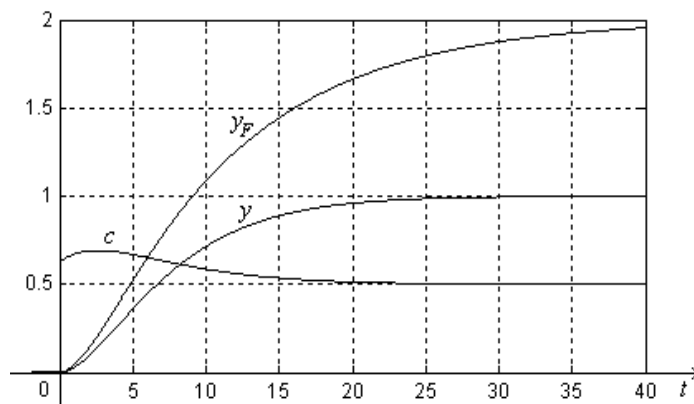


Fig. 9.12. Răspunsurile indiciale ale părții fixate ( $y_F$ ) și sistemului de reglare ( $y$  și  $c$ )

$$\text{pentru } G_F = \frac{2}{(10s + 1)(2s + 1)} \text{ și } G_R = \frac{5}{8} \left(1 + \frac{1}{10s}\right).$$

b) Pentru  $x = 1$ , regulatorul este de tip PI, cu funcția de transfer

$$G_R(s) = \frac{(T_1s+1)(T_\Sigma s+1)}{K_F T_\Sigma s(T_\Sigma s+2)},$$

adică

$$G_R(s) = K_R \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{\tau_d s + 1} \right),$$

unde

$$K_R = \frac{1}{4k_F} \left( 1 + \frac{2T_1}{T_\Sigma} \right), \quad T_i = T_1 + \frac{T_\Sigma}{2},$$

$$\tau_d = \frac{T_\Sigma}{2}, \quad T_d = \frac{T_\Sigma(2T_1 - T_\Sigma)}{2(2T_1 + T_\Sigma)}.$$

Aceste relații pot fi obținute alegând  $\tau_d = \frac{T_\Sigma}{2}$ , scriind apoi identitatea

$$K_R \left[ \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right) (T_\Sigma s + 2) + 2T_d s \right] = \frac{(T_1 s + 1)(T_\Sigma s + 1)}{K_F T_\Sigma s}$$

sub forma

$$K_F K_R [(T_\Sigma + 2T_d)s + \left( \frac{T_\Sigma}{T_i} + 2 \right) + \frac{2}{T_i s}] = T_1 s + \left( \frac{T_1}{T_2} + 1 \right) + \frac{1}{T_\Sigma s},$$

determinând  $K_R$  și  $T_i$  prin egalarea coeficienților termenilor liberi și în  $\frac{1}{s}$ , iar apoi  $T_d$  - prin egalarea coeficienților termenilor în  $s$ .

Sistemul de reglare are funcția de transfer

$$G_0(s) = \frac{1}{(T_\Sigma s + 1)^2},$$

iar comanda regulatorului are factorul de magnitudine

$$M = \frac{T_1}{T_\Sigma}.$$

Pentru  $T_1 = 10$  și  $T_\Sigma = 2$ , adică  $G_F(s) = \frac{2}{(10s+1)(2s+1)}$ , avem

$$G_0(s) = \frac{1}{(2s+1)^2}, \quad M = 5,$$

$$G_R(s) = \frac{(10s+1)(2s+1)}{8s(s+1)} = K_R \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{\tau_d s + 1} \right),$$

unde

$$K_R = \frac{11}{8}, \quad T_i = 11, \quad \tau_d = 1, \quad T_d = \frac{9}{11},$$

Răspunsul indicial al părții fixate  $y_F(t)$  și răspunsurile la referință treaptă  $c(t)$  și  $y(t)$  ale sistemului de reglare sunt reprezentate în fig. 9.13.

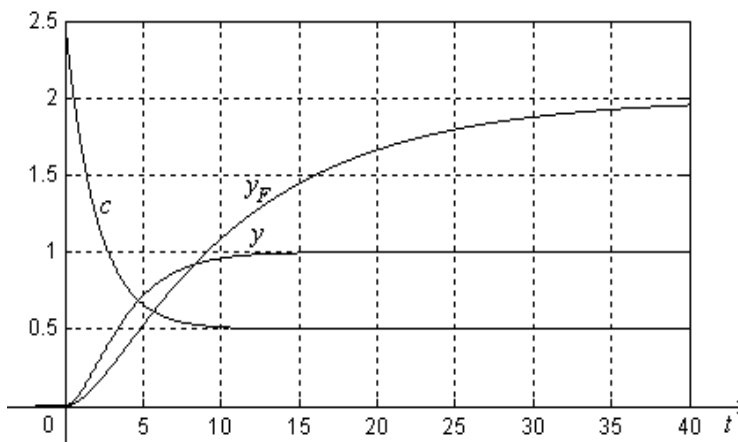


Fig. 9.13. Răspunsurile indiciale ale părții fixate ( $y_F$ ) și sistemului de reglare ( $y$  și  $c$ )

pentru  $G_F = \frac{2}{(10s+1)(2s+1)}$  și  $G_R = \frac{(10s+1)(2s+1)}{8s(s+1)}$ .

◆ **Aplicația 9.9.** Pentru sistemul de reglare cu partea fixată

$$G_F(s) = \frac{K_F e^{-\tau s}}{(T_1 s + 1)(T_\Sigma s + 1)}$$

unde  $T_1$  este constanta de timp dominantă, iar  $T_\Sigma$  este suma constantelor de timp parazite ( $T_1 \gg T_\Sigma > 0$ ), să se determine  $G_R(s)$  de tip simplu integral astfel încât sistemul de reglare să aibă funcția de transfer

$$G_0(s) = \frac{e^{-\tau s}}{(xT_\Sigma s + 1)^2}, \quad x > 0.$$

Particularizare pentru  $G_F(s) = \frac{2e^{-4s}}{(10s+1)(2s+1)}$  și  $x = 1$ .

**Soluție.** Partea fixată are partea rațională a funcției de transfer

$$G(s) = \frac{K_F}{(T_1 s + 1)(T_\Sigma s + 1)},$$

cu numitorul de gradul  $n = 2$  și numărătorul de gradul  $k = 0$ . Deoarece polinomul polilor impus sistemului de reglare,

$$P_2(s) = (xT_\Sigma s + 1)^2,$$

are gradul doi, adică  $n - k$ , putem utiliza teorema alocării polilor la sistemele cu timp mort. În conformitate cu (44) și (45), regulatorul cu structura din fig. 9.5 are funcțiile de transfer

$$R_1(s) = \frac{1}{G(s)P_2(s)} = \frac{(T_1 s + 1)(T_\Sigma s + 1)}{K_F (xT_\Sigma s + 1)^2}, \quad R_2(s) = G_F(s). \tag{50}$$

În conformitate cu (43), factorul de magnitudine al semnalului de comandă la referință treaptă este

$$M = \frac{G(0)}{x^2 T_\Sigma^2} \cdot \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2}{G(s)} = \frac{T_1}{x^2 T_\Sigma} . \quad (51)$$

În cazul particular  $x = 1$ , avem:

$$R_1(s) = \frac{T_1 s + 1}{K_F (T_\Sigma s + 1)}, \quad R_2(s) = G_F(s), \quad (52)$$

$$M = \frac{T_1}{T_\Sigma}, \quad G_0(s) = \frac{e^{-\tau s}}{(T_\Sigma s + 1)^2} . \quad (53)$$

În plus, pentru  $G_F(s) = \frac{2e^{-4s}}{(10s+1)(2s+1)}$ , rezultă:

$$R_1(s) = \frac{10s+1}{2(2s+1)}, \quad R_2(s) = G_F(s), \quad G_0(s) = \frac{e^{-\tau s}}{(2s+1)^2}, \quad M = 5 .$$

Graficele răspunsurilor din fig. 9.14 au fost obținute cu programul Matlab::

```
s=tf('s'); t=0:0.01:40;
F=2/(10*s+1)/(2*s+1); F.iodelay=4; F=pade(F,5);
R1=(10*s+1)/2/(2*s+1); R2=F; R=R1/(1-R1*R2);
C=R/(1+R*F); Y=R*F/(1+R*F);
step(F,C,Y,t); grid on
```

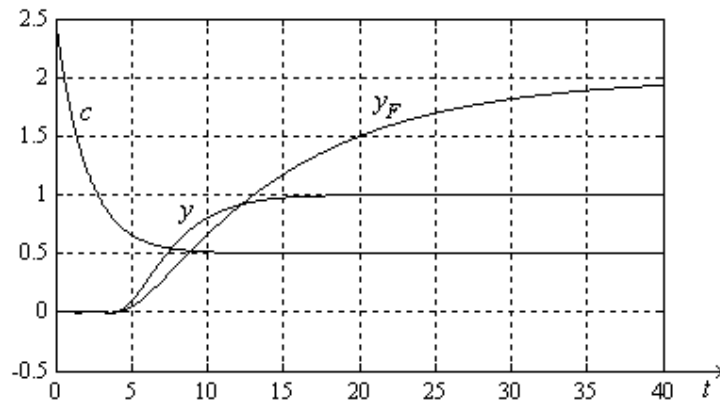


Fig. 9.14. Răspunsurile indiciale ale părții fixate ( $y_F$ ) și sistemului de reglare ( $y$  și  $c$ )

$$\text{pentru } G_F = \frac{2e^{-4s}}{(10s+1)(2s+1)} \text{ și } R_1(s) = \frac{10s+1}{2(2s+1)} .$$

◆ **Aplicația 9.10.** Pentru sistemul de reglare cu partea fixată

$$G_F(s) = \frac{K_F e^{-\tau s}}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_\Sigma s + 1)}$$

unde  $T_1$  și  $T_2$  sunt constante de timp dominante, iar  $T_\Sigma$  este suma constantelor de timp parazite ( $T_1 \geq T_2 \gg T_\Sigma > 0$ ), să se determine  $G_R(s)$  de tip simplu integral astfel încât sistemul de reglare să aibă funcția de transfer

$$\text{a) } G_0(s) = \frac{e^{-\tau s}}{(\tau_1 s + 1)^2 (\tau_2 s + 1)}, \quad \tau_1 > 0, \tau_2 > 0.$$

$$\text{b) } G_0(s) = \frac{e^{-\tau s}}{(2T_\Sigma^2 s^2 + 2T_\Sigma s + 1)(xT_\Sigma s + 1)}, \quad x > 0.$$

**Soluție.** Partea fixată are partea rațională a funcției de transfer

$$G(s) = \frac{K_F}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_\Sigma s + 1)},$$

cu numitorul de gradul  $n = 3$  și numărătorul de gradul  $k = 0$ . Deoarece polinomul polilor impus sistemului de reglare are gradul trei, adică  $n - k$ , putem utiliza teorema alocării polilor la sistemele cu timp mort.

a) Pentru

$$P_3(s) = (\tau_1 s + 1)^2 (\tau_2 s + 1),$$

în conformitate cu (44) și (45), regulatorul cu model intern cu structura din fig. 9.5 are funcțiile de transfer

$$R_1(s) = \frac{1}{G(s)P_3(s)} = \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_\Sigma s + 1)}{K_F (\tau_1 s + 1)^2 (\tau_2 s + 1)}, \quad R_2(s) = G_F(s) \quad (54)$$

În conformitate cu (43), factorul de magnitudine al semnalului de comandă la referință treaptă este

$$M = \frac{G(0)}{\tau_1^2 \tau_2} \cdot \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^3}{G(s)} = \frac{T_1 T_2 T_\Sigma}{\tau_1^2 \tau_2}. \quad (55)$$

Pentru  $\tau_2 = T_\Sigma$ , rezultă:

$$R_1(s) = \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{K_F (\tau_1 s + 1)^2}, \quad R_2(s) = G_F(s), \quad (56)$$

$$M = \frac{T_1 T_2}{\tau_1^2}, \quad G_0(s) = \frac{e^{-\tau s}}{(\tau_1 s + 1)^2 (T_\Sigma s + 1)}. \quad (57)$$

În plus, pentru  $G_F(s) = \frac{e^{-4s}}{(6s + 1)(4s + 1)(2s + 1)}$ , avem:

$$R_1(s) = \frac{(6s + 1)(4s + 1)}{(2s + 1)^2}, \quad R_2(s) = \frac{e^{-4s}}{(6s + 1)(4s + 1)(2s + 1)}, \quad M = 6.$$



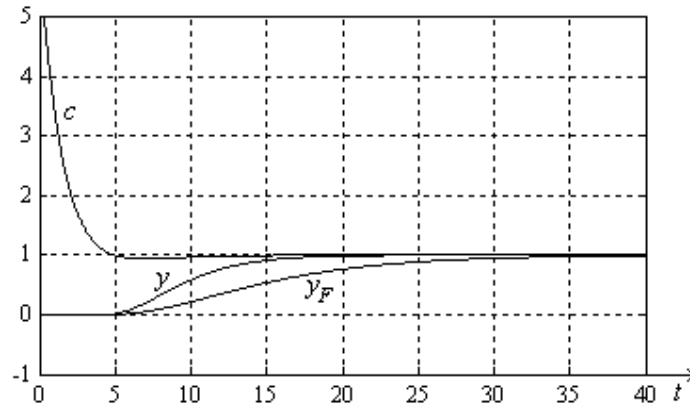


Fig. 9.15. Răspunsurile indiciale ale părții fixate ( $y_F$ ) și sistemului de reglare ( $y$  și  $c$ )

$$\text{pentru } G_F(s) = \frac{e^{-4s}}{(6s+1)(4s+1)(2s+1)} \text{ și } R_1(s) = \frac{(6s+1)(4s+1)}{(2s+1)^2}.$$

Pentru  $\tau_1 = T_\Sigma$ , rezultă:

$$R_1(s) = \frac{(T_1s+1)(T_2s+1)}{K_F(T_\Sigma s+1)(\tau_2s+1)}, \quad R_2(s) = G_F(s), \quad (58)$$

$$M = \frac{T_1T_2}{T_\Sigma\tau_2}, \quad G_0(s) = \frac{e^{-\tau s}}{(T_\Sigma s+1)^2(\tau_2s+1)}. \quad (59)$$

În plus, pentru  $\tau_2 \rightarrow 0$ , avem:

$$R_1(s) = \frac{(T_1s+1)(T_2s+1)}{K_F(T_\Sigma s+1)}, \quad R_2(s) = G_F(s), \quad (60)$$

$$M \rightarrow \infty, \quad G_0(s) = \frac{e^{-\tau s}}{(T_\Sigma s+1)^2}. \quad (61)$$

b) Pentru

$$P_3(s) = (2T_\Sigma^2 s^2 + 2T_\Sigma s + 1)(xT_\Sigma s + 1),$$

răspunsul sistemului la referință treaptă va fi de tip oscilant amortizat (fig. 9.16). În conformitate cu (44) și (45), regulatorul cu model intern cu structura din fig. 9.5 are funcțiile de transfer

$$R_1(s) = \frac{1}{G(s)P_3(s)} = \frac{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_\Sigma s+1)}{K_F(2T_\Sigma^2 s^2 + 2T_\Sigma s + 1)(xT_\Sigma s + 1)}, \quad R_2(s) = G_F(s). \quad (62)$$

În conformitate cu (43), factorul de magnitudine al semnalului de comandă la referință treaptă este

$$M = \frac{G(0)}{2xT_\Sigma^3} \cdot \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^3}{G(s)} = \frac{T_1T_2}{2xT_\Sigma^2}. \quad (63)$$

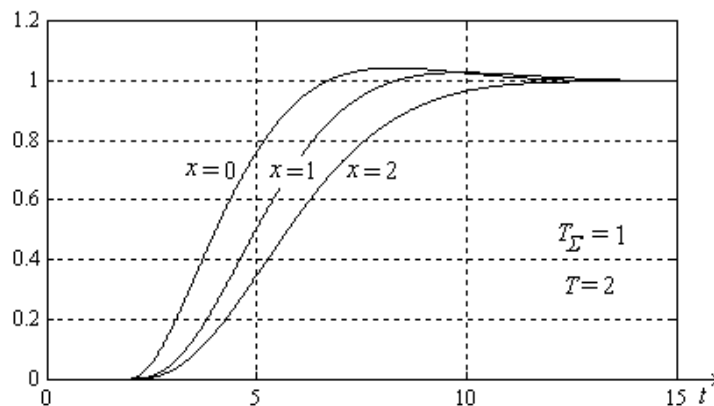


Fig. 9.16. Răspunsuri  $y(t)$  la referință treaptă unitară ale sistemului de reglare cu funcția de

$$\text{transfer } G_0(s) = \frac{e^{-\tau s}}{(2T_{\Sigma}^2 s^2 + 2T_{\Sigma} s + 1)(xT_{\Sigma} s + 1)} \text{ pentru } T_{\Sigma} = 1 \text{ și } \tau = 2 .$$

Pentru  $x = 1$ , rezultă:

$$R_1(s) = \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{K_F(2T_{\Sigma}^2 s^2 + 2T_{\Sigma} s + 1)}, \quad R_2(s) = G_F(s), \quad (64)$$

$$M = \frac{T_1 T_2}{2T_{\Sigma}^2}, \quad G_0(s) = \frac{e^{-Ts}}{(2T_{\Sigma}^2 s^2 + 2T_{\Sigma} s + 1)(T_{\Sigma} s + 1)}, \quad (65)$$

iar pentru  $x \rightarrow 0$ , avem:

$$R_1(s) = \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_{\Sigma} s + 1)}{K_F(2T_{\Sigma}^2 s^2 + 2T_{\Sigma} s + 1)}, \quad R_2(s) = G_F(s), \quad (66)$$

$$M \rightarrow \infty, \quad G_0(s) = \frac{e^{-Ts}}{2T_{\Sigma}^2 s^2 + 2T_{\Sigma} s + 1}. \quad (67)$$

Am regăsit varianta Kessler a criteriului modulului pentru acordarea optimală a regulatorului. Dacă partea fixată este fără timp mort, regulatorul este de tip PID impropriu:

$$G_R(s) = \frac{R_1(s)}{1 - R_1(s)R_2(s)} = \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{2K_F T_{\Sigma} s}.$$

◆ **Aplicația 9.11.** Pentru sistemul de reglare cu partea fixată

$$G_F(s) = \frac{2(2s + 1)e^{-10s}}{(3s + 1)^2(6s + 1)(8s + 1)},$$

să se determine  $G_R(s)$  de tip simplu integral astfel încât sistemul de reglare să aibă funcția de transfer

$$G_0(s) = \frac{e^{-10s}}{(T_1s+1)^3}$$

și factorul de magnitudine

- a)  $M = 1$ ;
- b)  $M = 8$ .

**Soluție.** Partea rațională a funcției de transfer  $G_F(s)$  are expresia

$$G(s) = \frac{2(2s+1)}{(3s+1)^2(6s+1)(8s+1)},$$

cu numitorul de gradul  $n = 4$  și numărătorul de gradul  $k = 1$ . Deoarece polinomul polilor  $(T_1s+1)^3$  impus sistemului de reglare are gradul  $n-k$ , putem utiliza teorema alocării polilor la sistemele cu timp mort. În conformitate cu relația (43), avem

$$M = \frac{G(0)}{T_1 T_2 \cdots T_n} \cdot \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^{n-k}}{G(s)} = \frac{2}{T_1^3} \cdot 108 = \frac{216}{T_1^3},$$

deci

$$T_1 = \sqrt[3]{\frac{216}{M}}.$$

a) Pentru  $M = 1$ , rezultă

$$T_1 = \sqrt[3]{\frac{216}{1}} = 6,$$

iar cu relațiile (40), (44) și (45), obținem funcțiile de transfer ale regulatorului

$$\begin{aligned} G_R(s) &= \frac{1}{G(s)[P_{n-k}(s) - e^{-\tau s}]} \\ &= \frac{(3s+1)^2(6s+1)(8s+1)}{2(2s+1)[(6s+1)^3 - e^{-10s}]} \end{aligned}$$

respectiv

$$\begin{aligned} R_1(s) &= \frac{1}{G(s)P_{n-k}(s)} = \frac{(3s+1)^2(8s+1)}{2(2s+1)(6s+1)^2}, \\ R_2(s) &= G_0(s) = \frac{e^{-10s}}{(6s+1)^3}. \end{aligned}$$

Răspunsul indicial al părții fixate  $y_F(t)$  și răspunsurile  $c(t)$  și  $y(t)$  ale sistemului de reglare la referință treaptă sunt reprezentate în fig. 9.17.

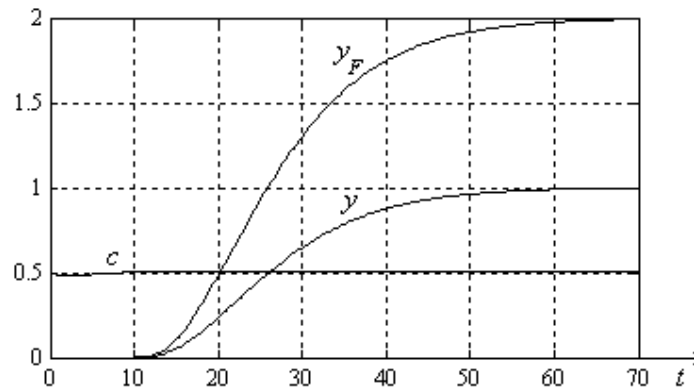


Fig. 9.17. Răspunsurile indiciale ale părții fixate ( $y_F$ ) și ale sistemului de reglare ( $y$  și  $c$ ).

b) Pentru  $M = 8$ , rezultă

$$T_1 = \sqrt[3]{\frac{216}{M}} = 3,$$

iar cu relațiile (40), (44) și (45), obținem funcțiile de transfer ale regulatorului

$$G_R(s) = \frac{1}{G(s)[P_{n-k}(s) - e^{-\tau s}]} = \frac{(3s+1)^2(6s+1)(8s+1)}{2(2s+1)[(3s+1)^3 - e^{-12s}]},$$

respectiv

$$R_1(s) = \frac{1}{G(s)P_{n-k}(s)} = \frac{(6s+1)(8s+1)}{2(2s+1)(3s+1)},$$

$$R_2(s) = G_0(s) = \frac{e^{-10s}}{(3s+1)^3}.$$

Răspunsul indicial al părții fixate  $y_F(t)$  și răspunsurile la referință treaptă  $c(t)$  și  $y(t)$  ale sistemului de reglare sunt reprezentate în fig. 9.18

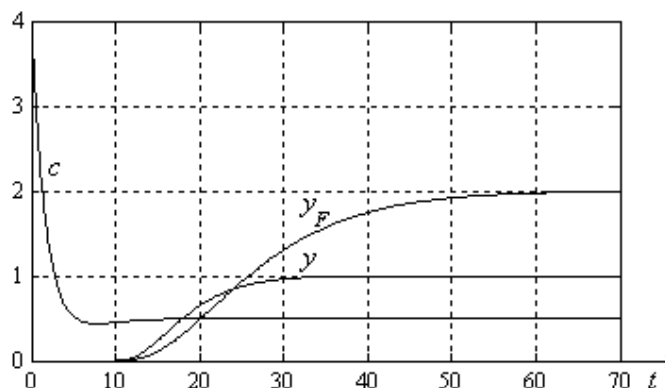


Fig. 9.18. Răspunsurile indiciale ale părții fixate ( $y_F$ ) și ale sistemului de reglare ( $y$  și  $c$ ).

## 9.4. APLICAȚII DE AUTOCONTROL

♦ **C9.1.** Să se calculeze eroarea staționară la perturbație treaptă unitară a sistemului de reglare automată caracterizat prin:

$$G_R = K > 0, \quad G_E = \frac{1}{3s+1}, \quad G_T = 1,$$

$$G_P = \frac{2}{20s^2 + 9s + 1}, \quad G_V = \frac{-1}{20s^2 + 12s + 1}.$$

Care este valoarea minimă posibil a erorii staționare ?

♦ **C9.2.** Să se calculeze eroarea staționară la referință rampă unitară a sistemului de reglare automată caracterizat prin:

$$G_R = 2\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right), \quad G_E = \frac{1}{2s+1},$$

$$G_P = \frac{1}{9s+1}, \quad G_T = 1.$$

♦ **C 9.3.** Pentru sistemul de reglare automată caracterizat prin

$$G_R = K\left(1 + \frac{1}{4s}\right), \quad G_E = \frac{1}{2s+1},$$

$$G_P = \frac{1}{8s+1}, \quad G_T = \frac{1}{4s+1},$$

să se determine  $K$  astfel încât polii sistemului să fie situați în stânga dreptei  $s = \frac{-1}{20}$ .

♦ **C9.4.** Se consideră sistemul cu funcția de transfer

$$G(s) = \frac{\tau s + 1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)},$$

având constantele de timp  $T_1$  și  $T_2$  pozitive și fixate. Pentru intrare treaptă unitară, să se arate că indicele integral pătratic

$$I_2 = \int_0^{\infty} (y(t) - y_{st})^2 dt$$

este minim atunci când

$$\tau = T_1 + T_2.$$

♦ **C9.5.** Elementele unui sistem de reglare automată au funcțiile de transfer

$$G_R = \frac{k}{s}, \quad k > 0, \quad G_E = 1, \quad G_P = \frac{2}{3s+1},$$

$$G_V = \frac{1}{2(4s+1)}, \quad G_T = \frac{1}{2s+1}.$$

a) Să se afle eroarea staționară la referință treaptă unitară și la perturbație rampă unitară.

b) Pentru referință treaptă unitară, să se afle valoarea optimă a parametrului  $k$  în raport cu indicele integral pătratic  $I_2 = \int_0^\infty \varepsilon^2(t) dt$ .

◆ C9.6. Elementele unui sistem de reglare automată au funcțiile de transfer

$$G_R = 1 + \frac{1}{T_i s} + 3s, \quad G_F = \frac{1}{s^2 + 1},$$

Pentru referință treaptă unitară, să se afle valoarea optimă a constantei de timp integrale  $T_i$  în raport cu indicele integral pătratic  $I_2 = \int_0^\infty \varepsilon^2(t) dt$ .

◆ C9.7. Fie sistemul cu funcția de transfer

$$G(s) = \frac{s+1}{4s+1}.$$

Utilizând metoda minimizării indicelui integral pătratic, să se reducă sistemul la forma

$$G_r(s) = \frac{1}{T_1 s + 1}.$$

◆ C9.8. Pentru sistemul de reglare cu partea fixată

$$G_F(s) = \frac{2}{(3s+1)(4s+1)},$$

să se determine funcția de transfer  $G_R(s)$  a regulatorului de tip simplu integral, astfel încât semnalul de comandă generat de regulator la referință treaptă unitară să fie de tip treaptă.

◆ C9.9. Pentru sistemul de reglare cu partea fixată

$$G_F(s) = \frac{3}{(s+1)(4s+3)(10s+1)},$$

să se determine  $G_R(s)$  de tip simplu integral astfel încât sistemul de reglare să aibă polinomul polilor

a)  $P_3(s) = (4s+1)^2(s+1);$

b)  $P_3(s) = (2s+1)^2(s+1).$

În ambele cazuri, să se determine factorul de magnitudine al comenzii regulatorului.

◆ **C9.10.** Pentru sistemul de reglare cu partea fixată

$$G_F(s) = \frac{5s+1}{(s+1)(4s+1)(10s+1)},$$

să se determine  $G_R(s)$  de tip simplu integral astfel încât sistemul de reglare să aibă polinomul polilor

a)  $P_2(s) = (3s+1)\left(\frac{3}{2}s+1\right);$

b)  $P_2(s) = (2s+1)^2;$

c)  $P_2(s) = (2s+1)(s+1).$

În toate cazurile, să se determine factorul de magnitudine al comenzii regulatorului.

◆ **C9.11.** Pentru sistemul de reglare cu partea fixată

$$G_F(s) = \frac{3s+1}{3s(s+1)(10s+1)},$$

să se determine  $G_R(s)$  de tip proporțional astfel încât sistemul de reglare să aibă polinomul polilor

a)  $P_2(s) = (2s+1)^2;$

b)  $P_2(s) = (2s+1)(s+1).$

◆ **C9.12.** Pentru sistemul de reglare cu partea fixată

$$G_F(s) = \frac{(2s+1)e^{-5s}}{(s+1)(4s+1)(8s+1)},$$

să se determine  $G_R(s)$  de tip simplu integral astfel încât sistemul de reglare să aibă funcția de transfer

$$G_0(s) = \frac{e^{-5s}}{(T_1s+1)^2}$$

și factorul de magnitudine

a)  $M = 1;$

b)  $M = 16.$

◆ **C9.13.** Pentru sistemul de reglare cu partea fixată de tip integral

$$G_F(s) = \frac{e^{-6s}}{10s(2s+1)(8s+1)},$$

să se determine  $G_R(s)$  de tip proporțional astfel încât sistemul de reglare să aibă funcția de transfer

$$G_0(s) = \frac{e^{-6s}}{(2s+1)^3}.$$

# 10

---

## SISTEME DE REGLARE MULTIVARIABILE

---

Sistemele de reglare automată multivariabile (multi input-multi output) sunt acelea la care partea fixată, formată din elementul de execuție, procesul propriu-zis și elementul traductor, reprezintă un sistem continuu multivariabil (fig. 10.1). În continuare, pentru simplitate, partea fixată va fi denumită proces.

În cazul în care procesul  $\mathbf{P}$  este liniar și are două mărimi de intrare ( $U_1$  și  $U_2$ ) și două mărimi de ieșire ( $Y_1$  și  $Y_2$ ), dependența în complex intrare-ieșire se exprimă astfel:

$$\begin{cases} Y_1(s) = G_{11}(s)U_1(s) + G_{12}(s)U_2(s) \\ Y_2(s) = G_{21}(s)U_1(s) + G_{22}(s)U_2(s) \end{cases}$$

sau, sub formă matriceal-vectorială,

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix},$$

$$Y(s) = \mathbf{G}(s)U(s).$$

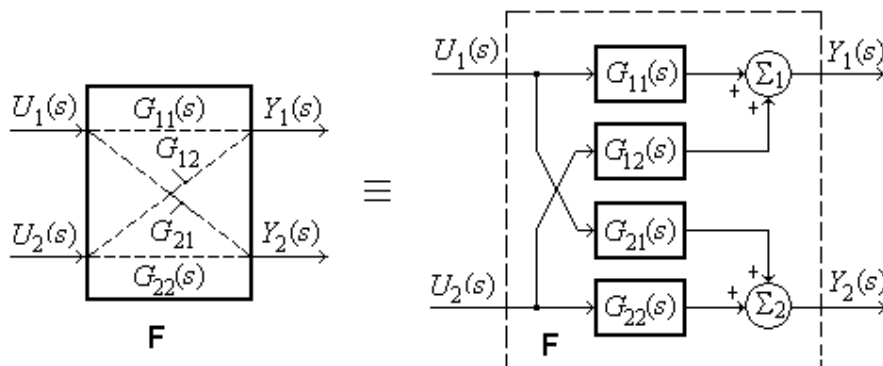


Fig. 10.1. Reprezentarea procesului multivariabil.



În cazul proceselor fizice de tip proporțional, mărimile de intrare  $U_1$  și  $U_2$  sunt alese astfel încât transferul pe canalele directe intrare-ieșire să fie mai puternic decât pe canalele indirecte. Astfel, presupunând că mărimile de comandă și de ieșire ale procesului **P** sunt exprimate în procente, între factorii statici de proporționalitate ai canalelor directe și indirecte există inegalitățile

$$|K_{11}| > |K_{12}|, \quad |K_{22}| > |K_{21}|. \quad (1)$$

Dacă aceste condiții nu sunt îndeplinite, proiectarea unui sistem performant de reglare a mărimilor de ieșire  $Y_1$  și  $Y_2$  este o operație relativ dificilă.

În fig. 10.2 este reprezentată schema unui SRA multivariabil cu *reglatoare monovariabile* (**R1** și **R2**), iar în fig. 10.3 - schema unui SRA multivariabil cu *regulator multivariabil* (**RM**).

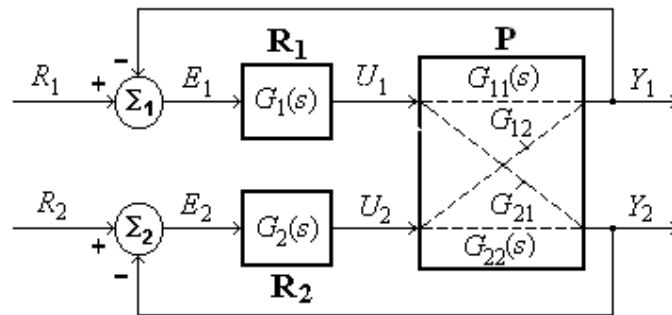


Fig. 10.2. Sistem de reglare multivariabil cu reglatoare monovariabile.

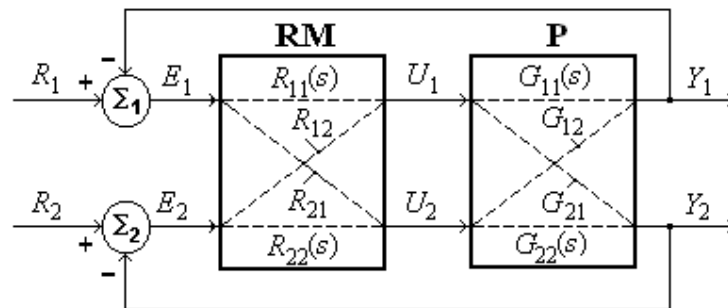


Fig. 10.3. Sistem de reglare multivariabil cu regulator multivariabil.

Regulatorul multivariabil cu patru canale (două directe și două indirecte) are matricea de transfer

$$\mathbf{R}(s) = \begin{bmatrix} R_{11}(s) & R_{12}(s) \\ R_{21}(s) & R_{22}(s) \end{bmatrix}. \quad (2)$$

În lipsa canalelor indirecte (cazul schemei din fig. 10.2, cu reglatoare monovariabile), matricea de transfer  $\mathbf{R}(s)$  a regulatorului este de tip diagonal

$$\mathbf{R}(s) = \begin{bmatrix} G_1(s) & 0 \\ 0 & G_2(s) \end{bmatrix}. \quad (3)$$

### 10.1. STABILITATEA SISTEMELOR DE REGLARE MULTIVARIABILE

Se cunoaște faptul că un sistem multivariabil este extern strict stabil atunci când polinomul polilor matricei de transfer a sistemului este hurwitzian, adică are toate rădăcinile cu partea reală negativă. În cazul sistemelor de reglare multivariabile din fig. 10.2 și fig. 10.3, din

$$Y(s) = \mathbf{G} U(s),$$

$$U(s) = \mathbf{R} E(s),$$

$$E(s) = R(s) - Y(s),$$

rezultă

$$Y(s) = \mathbf{G}_{YR}(s) R(s),$$

$$E(s) = \mathbf{G}_{ER}(s) R(s),$$

unde

$$\mathbf{G}_{YR}(s) = [\mathbf{I} + \mathbf{G}(s)\mathbf{R}(s)]^{-1} \mathbf{G}(s)\mathbf{R}(s), \quad (4)$$

$$\mathbf{G}_{ER}(s) = [\mathbf{I} + \mathbf{G}(s)\mathbf{R}(s)]^{-1}. \quad (5)$$

Pe baza acestor relații se poate formula

***Teorema de stabilitate externă a SRA multivariabile.*** În cazul practic în care toate elementele componente ale unui sistem de reglare multivariabil sunt extern stabile, sistemul de reglare este extern strict stabil dacă și numai dacă toate rădăcinile ecuației polilor

$$\det[\mathbf{I} + \mathbf{G}(s)\mathbf{R}(s)] = 0 \quad (6)$$

au partea reală negativă.

## 10.2. SISTEME DE REGLARE MULTIVARIABILE CU REGULATOARE MONOVARIABILE

Un sistem de reglare multivariabil cu  $p$  mărimi de referință,  $p$  mărimi reglate și  $p$  regulatoare monovariabile, câte unul pentru fiecare mărime reglată, nu echivalează cu  $p$  sisteme de reglare monovariabile autonome, deoarece între cele  $p$  bucle de reglare există interacțiuni reciproce, care nu poate fi echivalată cu acțiunea unor perturbații independente (de exemplu, interacțiunea poate genera instabilitate, dar perturbațiile sistemelor liniare nu). Astfel, în cazul sistemului de reglare multivariabil din fig. 10.2, modificarea referinței  $R_1$  implică variația mărimii de comandă  $U_1$ , care modifică mărimea reglată  $Y_2$  (prin canalul  $G_{21}$ ), deci eroarea  $E_2$ , apoi mărimea de comandă  $U_2$ , mărimea reglată  $Y_1$  (prin canalul  $G_{12}$ ) ș.a.m.d. De aceea, reglarea proceselor multivariabile cu regulatoare monovariabile este eficientă numai la procesele cu interacțiuni încrucișate relativ slabe. Dacă aceste interacțiuni sunt puternice, sistemul de reglare devine oscilant (cu oscilații greu amortizabile) sau chiar instabil.

Pentru sistemul de reglare din fig. 10.2, din relațiile (3), (4) și (5), rezultă

$$\mathbf{G}_{YR} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} G_1(G_{11} + G_2\Delta_1) & G_2G_{12} \\ G_1G_{21} & G_2(G_{22} + G_1\Delta_1) \end{bmatrix} \quad (7)$$

și

$$\mathbf{G}_{ER} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 1 + G_2G_{22} & -G_2G_{12} \\ -G_1G_{21} & 1 + G_1G_{11} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

unde

$$\Delta = 1 + G_1G_{11} + G_2G_{22} + G_1G_2\Delta_1, \quad (9)$$

$$\Delta_1 = \det \mathbf{G} = G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21}. \quad (10)$$

Din (7) și (8) se observă că oricum am alege funcțiile de transfer nenule  $G_1(s)$  și  $G_2(s)$  ale celor două regulatoare monovariabile, matricele de transfer  $\mathbf{G}_{YR}(s)$  și  $\mathbf{G}_{ER}(s)$  nu pot fi aduse la forma diagonală. Prin urmare, sistemul de reglare nu permite *decuplarea dinamică* a mărimilor reglate sau a mărimilor de eroare în raport cu mărimile de referință (astfel încât mărimea reglată  $Y_1$  și eroarea  $E_1$  să nu depindă de referința  $R_2$ , iar mărimea

reglată  $Y_2$  și eroarea  $E_2$  să nu depindă de referința  $R_1$ ). În schimb, prin alegerea convenabilă a funcțiilor de transfer  $G_1(s)$  și  $G_2(s)$ , este posibil (și de dorit) ca matricele  $\mathbf{G}_{YR}(0)$  și  $\mathbf{G}_{ER}(0)$  să aibă forma diagonală, adică sistemul de reglare să fie *decuplat staționar*. De exemplu, dacă procesul este strict stabil și are toate cele patru canale intrare-ieșire de tip proporțional, adică

$$G_{ij}(0) = K_{ij} \neq 0,$$

și, în plus,

$$K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21} \neq 0,$$

alegând cele două regulatoare de tip simplu integral, cu funcțiile de transfer  $G_1(s) = \frac{1}{s}G_1^*(s)$  și  $G_2(s) = \frac{1}{s}G_2^*(s)$ , unde  $G_1^*(0) \neq 0$  și  $G_2^*(0) \neq 0$ , rezultă

$$\mathbf{G}_{YR}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

$$\mathbf{G}_{ER}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Deoarece matricea  $\mathbf{G}_{YR}(0)$  este de tip diagonal, sistemul de reglare (presupus strict stabil) este decuplat staționar. În plus, la modificarea treaptă a mărimilor de referință și a perturbațiilor (însumate la ieșirea procesului), sistemul aduce mărimile reglate  $y_1$  și  $y_2$  respectiv la valorile referințelor  $r_1$  și  $r_2$ .

În cazul în care regulatorul  $\mathbf{R}_1$  este de tip integral, iar regulatorul  $\mathbf{R}_2$  este de tip static, adică  $G_2(0) = K_2 \neq 0$ , rezultă

$$\mathbf{G}_{YR}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{K_{21}}{\Delta_0} & 1 - \frac{K_{11}}{\Delta_0} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

cu

$$\Delta_0 = K_{11} + K_2(K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}). \quad (14)$$

Dacă procesul are  $K_{21} \neq 0$ , atunci mărimea reglată  $Y_2$  nu este decuplată staționar în raport cu mărimea de referință  $R_1$ .

În fig. 10.4 sunt prezentate, calitativ, răspunsurile la referință treaptă unitară ale unui sistem de reglare multivariabil stabil, echipat cu regulatoare monovariabile, decuplat staționar pe canalul  $R_1-Y_2$  și decuplat dinamic pe canalul  $R_2-Y_1$ .

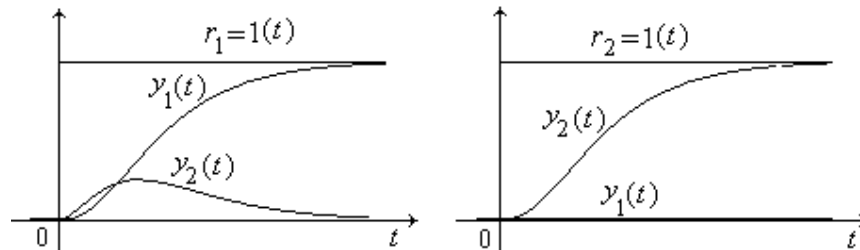


Fig. 10.4. Exemplu de decuplare staționară pe canalul  $R_1-Y_2$  și decuplare dinamică pe canalul  $R_2-Y_1$ .

### 10.3. SISTEME DE REGLARE MULTIVARIABILE CU REGULATOR MULTIVARIABIL

Prin utilizarea unui regulator multivariabil (fig. 10.3), interacțiunile procesului pot fi compensate, astfel încât fiecare mărime reglată să fie influențată numai de mărimea de referință asociată. În acest caz, sistemul de reglare multivariabil se numește *decuplat* sau *autonom*.

Prin decuplare, un sistem de reglare multivariabil cu  $p$  mărimi de referință și  $p$  mărimi reglate se descompune în  $p$  sisteme de reglare monovariabile independente (autonome), ale căror regulatoare monovariabile pot fi proiectate prin metode și proceduri specifice sistemelor de reglare monovariabile. În fig. 10.5 este prezentată schema unui sistem de reglare multivariabil cu  $p=2$ , la care regulatorul multivariabil  $\mathbf{R}$  este compus din blocul reglatoarelor monovariabile  $\mathbf{Rm}$  și blocul decuplor  $\mathbf{DC}$ . Sistemul de reglare este decuplat dinamic dacă subsistemul serie  $\mathbf{DC-P}$  format din decuplorul  $\mathbf{DC}$  și procesul  $\mathbf{P}$  este decuplat, adică nu conține canale încrucișate (ieșirea  $Y_2$  nu depinde de intrarea  $C_1$ , iar ieșirea  $Y_1$  nu depinde de intrarea  $C_2$ ).

Relațiile aferente canalelor încrucișate  $C_2-Y_1$  și  $C_1-Y_2$  ale subsistemului  $\mathbf{DC-P}$  au forma

$$Y_1(s) = (G_{11}D_{12} + G_{12}D_{22})C_2(s),$$

$$Y_2(s) = (G_{21}D_{11} + G_{22}D_{21})C_1(s),$$

din care rezultă relațiile de decuplare

$$G_{11}D_{12} + G_{12}D_{22} = 0, \quad (15)$$

$$G_{21}D_{11} + G_{22}D_{21} = 0. \quad (16)$$

Aceste relații pot fi obținute și din condiția ca matricea de transfer  $\mathbf{M}(s)$  a procesului decuplat (a conexiunii serie **DC-P**), anume

$$\mathbf{M}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{D}(s) = \begin{bmatrix} G_{11}D_{11} + G_{12}D_{21} & G_{11}D_{12} + G_{12}D_{22} \\ G_{21}D_{11} + G_{22}D_{21} & G_{21}D_{12} + G_{22}D_{22} \end{bmatrix}, \quad (17)$$

să fie de tip diagonal (cu  $M_{12} = M_{21} = 0$ ). Elementele diagonale au expresiile

$$M_{11} = G_{11}D_{11} + G_{12}D_{21}, \quad (18)$$

$$M_{22} = G_{21}D_{12} + G_{22}D_{22}. \quad (19)$$

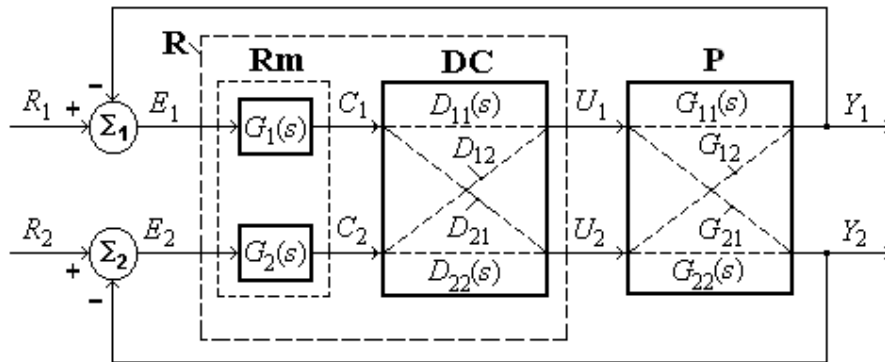


Fig. 10.5. SRA multivariabil cu regulator multivariabil cu decuplor.

În cele ce urmează, sunt prezentate două variante de proiectare a decuplorului dinamic **DC**, caracterizat prin matricea de transfer  $\mathbf{D}(s)$ , în ipoteza că procesul și decuplorul au fiecare câte două mărimi de intrare și două mărimi de ieșire.

*O primă variantă de decuplare* este aceea în care elementele diagonale  $D_{11}(s)$  și  $D_{22}(s)$  ale matricei de transfer  $\mathbf{D}(s)$  a decuplorului sunt apriori fixate. Din relațiile de decuplare (15) și (16) rezultă celelalte funcții de transfer ale decuplorului, sub forma

$$D_{12}(s) = \frac{-G_{12}(s)}{G_{11}(s)} \cdot D_{22}(s), \quad D_{21}(s) = \frac{-G_{21}(s)}{G_{22}(s)} \cdot D_{11}(s), \quad (20)$$

iar din relațiile (18), (19) și (20), obținem funcțiile de transfer diagonale ale procesului decuplat:

$$M_{11}(s) = \left(G_{11} - \frac{G_{12}G_{21}}{G_{22}}\right) D_{11}(s), \quad M_{22}(s) = \left(G_{22} - \frac{G_{12}G_{21}}{G_{11}}\right) D_{22}(s). \quad (21)$$

Alegând decuplorul cu funcțiile de transfer

$$D_{11}(s) = G_{22}(s), \quad D_{22}(s) = G_{11}(s), \quad (22)$$

rezultă

$$D_{12}(s) = -G_{12}(s), \quad D_{21}(s) = -G_{21}(s), \quad (23)$$

și funcțiile de transfer diagonale ale procesului decuplat

$$M_{11} = M_{22} = G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21}. \quad (24)$$

Așadar, matricele de transfer ale decuplорului și procesului decuplat au formele fizic realizabile:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} G_{22} & -G_{12} \\ -G_{21} & G_{11} \end{bmatrix}, \quad (25)$$

$$\mathbf{M} = (G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Ținând seama de relația  $\mathbf{M}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{D}(s)$ , dacă decuplorul (25) și procesul decuplat (26) sunt strict proprii, putem utiliza decuplorul

$$\bar{\mathbf{D}}(s) = (T_1 s + 1)\mathbf{D}(s), \quad (27)$$

pentru a obține procesul decuplat mai rapid (propriu sau simplu propriu), cu matricea de transfer

$$\bar{\mathbf{M}}(s) = (T_1 s + 1)\mathbf{M}(s), \quad (28)$$

unde  $T_1$  este o constantă de timp pozitivă convenabil aleasă.

Un neajuns al metodei îl constituie forma relativ greoaie a funcțiilor de transfer (26) și (28) ale procesului decuplat, mai ales în cazul proceselor cu timp mort.

A doua variantă de decuplare este aceea în care funcțiile de transfer nenule  $M_{11}$  și  $M_{22}$  ale matricei diagonale  $\mathbf{M}(s)$  sunt apriori fixate, astfel încât procesul decuplat să aibă caracteristici dinamice dorite. Din relațiile (15), (16), (18) și (19) rezultă matricea de transfer a decuplorului

$$\mathbf{D}(s) = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta_1} \begin{bmatrix} G_{22}M_{11} & -G_{12}M_{22} \\ -G_{21}M_{11} & G_{11}M_{22} \end{bmatrix}, \quad (29)$$

unde

$$\Delta_1 = \det \mathbf{G} = G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21}. \quad (30)$$

În majoritatea aplicațiilor practice, zerourile funcției  $\Delta_1(s)$  au partea reală negativă, deci decuplorul este stabil. Prin alegerea adecvată a funcțiilor de transfer  $M_{11}(s)$  și  $M_{22}(s)$ , decuplorul cu matricea de transfer (29) este propriu, deci fizic realizabil.

Alegând

$$M_{11} = M_{22} = G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21},$$

obținem decuplorul cu matricea de transfer (25).

Alegând

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} G_{11} & 0 \\ 0 & G_{22} \end{bmatrix}, \quad (31)$$

obținem decuplorul cu matricea de transfer

$$\mathbf{D} = \frac{1}{1 - \frac{G_{12}G_{21}}{G_{11}G_{22}}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{G_{12}}{G_{11}} \\ -\frac{G_{21}}{G_{22}} & 1 \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Ținând seama de relația  $\mathbf{M}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{D}(s)$ , dacă decuplorul (32) este simplu impropriu, putem utiliza decuplorul simplu propriu

$$\bar{\mathbf{D}}(s) = \frac{1}{T_1 s + 1} \mathbf{D}(s), \quad (33)$$



pentru a obține procesul decuplat

$$\bar{\mathbf{M}}(s) = \frac{1}{T_1 s + 1} \mathbf{M}(s), \quad (34)$$

unde  $T_1$  este o constantă de timp pozitivă convenabil aleasă.

Un neajuns al metodei îl constituie forma relativ greoaie a funcțiilor de transfer (32) și (33) ale decuplorului, mai ales în cazul proceselor cu timp mort.

**Observații. 1<sup>0</sup>.** *Decuplorul static* asociat unui proces de tip proporțional cu două mărimi de intrare și două mărimi de ieșire se proiectează pe baza relației

$$\mathbf{G}(0)\mathbf{D}(0) = \mathbf{M}(0), \quad (35)$$

echivalentă cu

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 \\ 0 & m_{22} \end{bmatrix}, \quad (36)$$

unde  $d_{ij}$  sunt factorii de proporționalitate ai decuplorului, iar  $m_{11}$  și  $m_{22}$  sunt factorii statici de proporționalitate ai procesului decuplat. Din (36), rezultă relațiile de decuplare

$$K_{11}d_{12} + K_{12}d_{22} = 0, \quad K_{21}d_{11} + K_{22}d_{21} = 0 \quad (37)$$

și expresiile factorilor statici de proporționalitate ai procesului decuplat

$$m_{11} = K_{11}d_{11} + K_{12}d_{21}, \quad m_{22} = K_{21}d_{12} + K_{22}d_{22}. \quad (38)$$

Pe de altă parte, matricea factorilor de proporționalitate ai decuplorului static poate fi obținută din matricea de transfer a decuplorului dinamic  $\mathbf{D}(s)$  prin înlocuirea variabilei  $s$  cu 0. Astfel, ținând seama de (25), putem alege decuplorul static

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} G_{22}(0) & -G_{12}(0) \\ -G_{21}(0) & G_{11}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{22} & -K_{12} \\ -K_{21} & K_{11} \end{bmatrix}. \quad (39)$$

Din (26) rezultă matricea de proporționalitate a părții fixate decuplate staționar

$$\mathbf{M} = (K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (40)$$

2<sup>o</sup>. În conformitate cu (25), putem realiza *decuplarea dinamică* a unui proces de tip proporțional cu ajutorul unui *decuplor tipizat*, cu matricea de transfer de forma

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{K_{22}e^{-\tau_{22}s}}{T_{22}s+1} & \frac{-K_{12}e^{-\tau_{12}s}}{T_{12}s+1} \\ \frac{-K_{21}e^{-\tau_{21}s}}{T_{21}s+1} & \frac{K_{11}e^{-\tau_{11}s}}{T_{11}s+1} \end{bmatrix}, \quad (41)$$

în care factorii statici de proporționalitate  $K_{ij}$ , constantele de timp de întârziere  $T_{ij}$  și timpii morți  $\tau_{ij}$  sunt asociați canalelor  $ij$  ale procesului.

Toți parametrii decuplurii dinamice tipizate pot fi determinați *experimental* pe baza răspunsurilor procesului la intrare treaptă, din regim staționar (fig. 10.6).

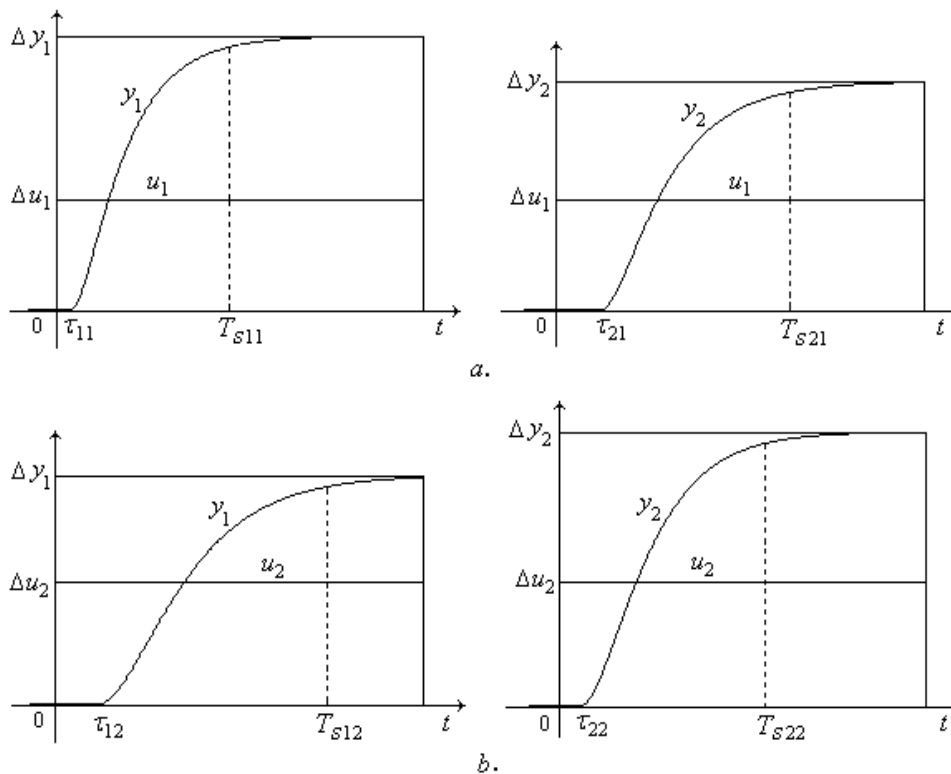


Fig. 10.6. Răspunsul procesului la intrare treaptă.

Factorii statici de proporționalitate  $K_{11}$  și  $K_{21}$  ai procesului pot fi determinați cu relațiile

$$K_{11} = \frac{\Delta y_1}{\Delta u_1}, \quad (42)$$

$$K_{21} = \frac{\Delta y_2}{\Delta u_1}, \quad (43)$$

unde  $\Delta y_1$  și  $\Delta y_2$  sunt variațiile totale (finale) ale ieșirilor  $y_1$  și  $y_2$  la o variație treaptă  $\Delta u_1$  a intrării  $u_1$ , aplicată în regim staționar (fig. 10.6, a). În mod similar,  $K_{12}$  și  $K_{22}$  se determină cu relațiile (fig. 10.6, b):

$$K_{12} = \frac{\Delta y_1}{\Delta u_2}, \quad (44)$$

$$K_{22} = \frac{\Delta y_2}{\Delta u_2}. \quad (45)$$

Fiecare constantă de timp  $T_{ij}$  se alege aproximativ egală cu o treime din durata regimului tranzitoriu  $(T_{tr95})_{ij}$  a răspunsului indicial al canalului respectiv al procesului:

$$T_{ij} \approx \frac{(T_{tr95})_{ij}}{3} = \frac{(T_{s95})_{ij} - \tau_{ij}}{3}, \quad (46)$$

unde  $(T_{s95})_{ij}$  este timpul de stabilizare a răspunsului indicial.

Dacă

$$\tau_{ij} \approx m_{ij}T, \quad m_{ij} \in \mathbf{Z}, \quad (47)$$

atunci echivalentul discret (discretizatul) cu perioada  $T$  al decuplorului are matricea de transfer

$$\mathbf{D}^o(z) = \begin{bmatrix} \frac{K_{22}(1-p_{22})z^{-m_{22}-1}}{1-p_{22}z^{-1}} & \frac{-K_{12}(1-p_{12})z^{-m_{12}-1}}{1-p_{12}z^{-1}} \\ \frac{-K_{21}(1-p_{21})z^{-m_{21}-1}}{1-p_{21}z^{-1}} & \frac{K_{11}(1-p_{11})z^{-m_{11}-1}}{1-p_{11}z^{-1}} \end{bmatrix}, \quad (48)$$

unde

$$p_{ij} = e^{-T/T_{ij}}. \quad (49)$$

## 10.4. APLICAȚII REZOLVATE

♦ **Aplicația 10.1.** Să se analizeze stabilitatea sistemului de reglare multivariabil cu reglatoare monovariabile din fig. 10.2, caracterizat prin

$$G_1(s) = G_2(s) = \frac{1}{T_i s}, \quad \mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} & \frac{-1}{s+1} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}.$$

**Soluție.** Deoarece reglatoarele monovariabile și canalele intrare-ieșire ale părții fixate sunt extern stabile, putem aplica teorema de stabilitate externă a SRA multivariabile. Avem

$$\mathbf{I} + \mathbf{GR} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} & \frac{-1}{s+1} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{T_i s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{T_i s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{2}{T_i s(s+1)} & \frac{-1}{T_i s(s+1)} \\ \frac{1}{T_i s(s+1)} & 1 + \frac{1}{T_i s(s+1)} \end{bmatrix},$$

deci

$$\det(\mathbf{I} + \mathbf{GR}) = 1 + \frac{3}{T_i s(s+1)} + \frac{3}{T_i^2 s^2 (s+1)^2},$$

iar ecuația  $\det(\mathbf{I} + \mathbf{GR}) = 0$  are forma

$$T_i^2 s^4 + 2T_i^2 s^3 + T_i(T_i + 3)s^2 + 3T_i s + 3 = 0.$$

Coeficienții ecuației sunt pozitivi pentru  $T_i > 0$ , iar minorii

$$\Delta_2 = a_2 a_3 - a_1 a_4 = T_i^3 (2T_i + 3), \quad \Delta_3 = a_1 \Delta_2 - a_0 a_3^2 = 3T_i^4 (2T_i - 1),$$

sunt pozitivi pentru  $T_i > \frac{1}{2}$ . Prin urmare, în conformitate cu criteriul de stabilitate

Hurwitz, sistemul de reglare este strict stabil dacă și numai dacă  $T_i > \frac{1}{2}$ .

♦ **Aplicația 10.2.** Să se analizeze stabilitatea sistemului de reglare multivariabil cu reglatoare monovariabile din fig. 10.2, caracterizat prin

$$G_1(s) = 1, \quad G_2(s) = 2, \quad \mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{-2}{s-1} & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Soluție.** Avem

$$\mathbf{I} + \mathbf{GR} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-2}{s-1} & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s-3}{s-1} & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G}_{ER}(s) = (\mathbf{I} + \mathbf{GR})^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \frac{3(s-1)}{s-3} & \frac{-2(s-1)}{s-3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Deoarece matricea de transfer  $\mathbf{G}_{ER}(s)$  are polul  $s=3$  situat în dreapta axei imaginare, sistemul de reglare este instabil.

♦ **Aplicația 10.3.** Se dă procesul linear multivariabil cu matricea de transfer

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{2s+1} & \frac{1}{4s+1} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+1} \end{bmatrix}.$$

Să se efectueze:

- decuplarea staționară;
- decuplarea dinamică astfel încât procesul decuplat să aibă

$$M_{11}(s) = M_{22}(s);$$

- decuplarea dinamică astfel încât procesul decuplat să aibă matricea de transfer

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2s+1} \end{bmatrix}.$$

**Soluție.** a) În conformitate cu (39) și (40), decuplorul static are matricea factorilor de proporționalitate

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} G_{22}(0) & -G_{12}(0) \\ -G_{21}(0) & G_{11}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

iar procesul decuplat staționar are matricea factorilor de proporționalitate

$$\mathbf{M} = (K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

- În conformitate cu (25) și (26), avem

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} G_{22} & -G_{12} \\ -G_{21} & G_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} & \frac{-1}{4s+1} \\ \frac{-1}{s+1} & \frac{2}{2s+1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M} = (G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{14s+3}{(s+1)(2s+1)(4s+1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Deoarece decuplorul și procesul decuplat sunt strict proprii, putem utiliza decuplorul simplu propriu

$$\bar{\mathbf{D}} = (s+1)\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{s+1}{4s+1} \\ -1 & \frac{2(s+1)}{2s+1} \end{bmatrix},$$

pentru a obține procesul decuplat

$$\bar{\mathbf{M}} = (s+1)\mathbf{M} = \frac{14s+3}{(2s+1)(4s+1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

c) În conformitate cu (29) și (30), avem

$$\Delta_1 = G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21} = \frac{14s+3}{(s+1)(2s+1)(4s+1)},$$

$$\mathbf{D}(s) = \frac{1}{\Delta_1} \begin{bmatrix} G_{22}M_{11} & -G_{12}M_{22} \\ -G_{21}M_{11} & G_{11}M_{22} \end{bmatrix} = \frac{4s+1}{14s+3} \begin{bmatrix} \frac{4(2s+1)}{s+1} & \frac{-(s+1)}{4s+1} \\ \frac{-2(2s+1)}{s+1} & \frac{2(s+1)}{2s+1} \end{bmatrix}.$$

♦ **Aplicația 10.4.** Se dă procesul linear multivariabil cu matricea de transfer

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{2s+1} & \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{2}{2s+1} \end{bmatrix}.$$

Să se efectueze:

- decuplarea staționară;
- decuplarea dinamică astfel încât procesul decuplat să aibă

$$M_{11}(s) = M_{22}(s);$$

- decuplarea dinamică astfel încât procesul decuplat să aibă matricea de transfer

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{2}{2s+1} & 0 \\ 0 & \frac{2}{2s+1} \end{bmatrix}.$$

**Soluție.** a) În conformitate cu (39) și (40), decuplorul static are matricea factorilor de proporționalitate

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} G_{22}(0) & -G_{12}(0) \\ -G_{21}(0) & G_{11}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

iar procesul decuplat staționar are matricea factorilor de proporționalitate

$$\mathbf{M} = (K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

b) În conformitate cu (25) și (26), avem

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} G_{22} & -G_{12} \\ -G_{21} & G_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{2s+1} & \frac{-1}{s+1} \\ \frac{-1}{s+1} & \frac{2}{2s+1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M} = (G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{4s+3}{(s+1)^2(2s+1)^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Deoarece decuplorul și procesul decuplat sunt strict proprii, putem utiliza decuplorul simplu propriu

$$\bar{\mathbf{D}} = (2s+1)\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{2s+1}{s+1} \\ -\frac{2s+1}{s+1} & 2 \end{bmatrix},$$

pentru a obține procesul decuplat

$$\bar{\mathbf{M}} = (2s+1)\mathbf{M} = \frac{4s+3}{(s+1)^2(2s+1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

c) În conformitate cu (31) și (32), avem

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} G_{11} & 0 \\ 0 & G_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{2s+1} & 0 \\ 0 & \frac{2}{2s+1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{1 - \frac{G_{12}G_{21}}{G_{11}G_{22}}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{G_{12}}{G_{11}} \\ -\frac{G_{21}}{G_{22}} & 1 \end{bmatrix} = \frac{4(s+1)^2}{4s+3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2s+1}{2(s+1)} \\ -\frac{2s+1}{2(s+1)} & 1 \end{bmatrix}.$$

Deoarece decuplorul este impropriu, problema nu are soluție implementabilă. Se poate însă utiliza decuplorul simplu propriu

$$\bar{\mathbf{D}} = \frac{1}{2(s+1)} \mathbf{D} = \frac{2(s+1)}{4s+3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2s+1}{2(s+1)} \\ -\frac{2s+1}{2(s+1)} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2(s+1)}{4s+3} & -\frac{2s+1}{4s+3} \\ -\frac{2s+1}{4s+3} & \frac{2(s+1)}{4s+3} \end{bmatrix},$$

pentru a obține procesul decuplat

$$\bar{\mathbf{M}} = \frac{1}{2(s+1)} \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(2s+1)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s+1)(2s+1)} \end{bmatrix}.$$

♦ **Aplicația 10.5.** Se dă procesul linear multivariabil cu matricea de transfer

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{(s+1)(3s+1)} & \frac{e^{-2s}}{(2s+1)(4s+1)} \\ -\frac{e^{-4s}}{(3s+1)(5s+1)} & \frac{4}{(s+1)(2s+1)} \end{bmatrix}.$$

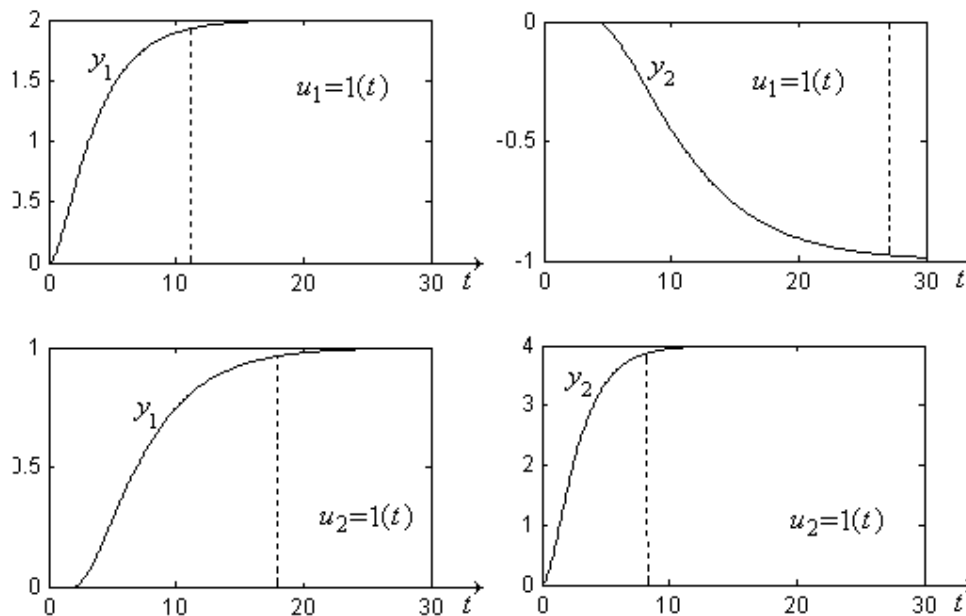
Să se proiecteze:

- decuplorul static cu elementele diagonale  $d_{11} = d_{22} = 1$ ;
- decuplorul dinamic cu funcțiile de transfer diagonale

$$D_{11}(s) = D_{22}(s) = 1;$$

c) decuplorul dinamic tipizat, pe baza graficelor răspunsurilor procesului la intrare treaptă unitară din figura de mai jos.

- regulatorul multivariabil cu decuplor tipizat:





**Soluție.** a) Determinăm matricea factorilor de proporționalitate ai procesului:

$$\mathbf{K} = \mathbf{G}(0) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Din (37), rezultă

$$d_{12} = \frac{-K_{12}}{K_{11}} d_{22} = -0,5, \quad d_{21} = \frac{-K_{21}}{K_{22}} d_{11} = 0,25,$$

deci decuplorul static are matricea factorilor de proporționalitate

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & d_{12} \\ d_{21} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0,5 \\ 0,25 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) În conformitate cu relațiile (20), rezultă

$$D_{12}(s) = \frac{-G_{12}(s)}{G_{11}(s)} = \frac{-(s+1)(3s+1)e^{-2s}}{2(2s+1)(4s+1)},$$

$$D_{21}(s) = \frac{-G_{21}(s)}{G_{22}(s)} = \frac{(s+1)(2s+1)e^{-4s}}{4(3s+1)(5s+1)},$$

deci

$$\mathbf{D}(s) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-(s+1)(3s+1)e^{-2s}}{2(2s+1)(4s+1)} \\ \frac{(s+1)(2s+1)e^{-4s}}{4(3s+1)(5s+1)} & 1 \end{bmatrix}.$$

Aplicând relațiile (21), determinăm elementele diagonale ale matricei de transfer a procesului decuplat:

$$M_{11} = G_{11} - \frac{G_{12}G_{21}}{G_{22}} = \frac{2}{(s+1)(3s+1)} + \frac{(s+1)e^{-6s}}{4(3s+1)(4s+1)(5s+1)},$$

$$M_{22} = G_{22} - \frac{G_{12}G_{21}}{G_{11}} = \frac{4}{(s+1)(2s+1)3s+1} + \frac{(s+1)e^{-6s}}{2(2s+1)(4s+1)(5s+1)}.$$

c) Din reprezentările grafice ale răspunsurilor indiciale ale procesului (presupus a fi determinate experimental), rezultă:

$$K_{11} = \frac{\Delta y_1}{\Delta u_1} = 2, \quad K_{21} = \frac{\Delta y_2}{\Delta u_1} = -1,$$

$$K_{12} = \frac{\Delta y_1}{\Delta u_2} = 1, \quad K_{22} = \frac{\Delta y_2}{\Delta u_2} = 4,$$

$$\tau_{11} = 0, \quad \tau_{21} = 4, \quad \tau_{12} = 2, \quad \tau_{22} = 0,$$

$$T_{s11} \approx 11,4, \quad T_{s21} \approx 27, \quad T_{s12} \approx 18, \quad T_{s22} \approx 8,$$

$$T_{11} = \frac{T_{s11} - \tau_{11}}{3} = 3,8, \quad T_{21} = \frac{T_{s21} - \tau_{21}}{3} \approx 7,7,$$

$$T_{12} = \frac{T_{s12} - \tau_{12}}{3} \approx 5,3, \quad T_{22} = \frac{T_{s22} - \tau_{22}}{3} \approx 2,7.$$

În conformitate cu (41), decuplul tipizat are matricea de transfer

$$D(s) = \begin{bmatrix} 4 & -e^{-2s} \\ \frac{2}{2,7s+1} & \frac{2}{5,3s+1} \\ e^{-4s} & 2 \\ \frac{2}{7,7s+1} & \frac{2}{3,8s+1} \end{bmatrix}.$$

În fig. 10.7 este reprezentat răspunsul procesului decuplat cu decuplul tipizat pentru o variație treaptă unitară a fiecărei mărimi de intrare. Graficele au fost obținute în MATLAB, prin înlocuirea funcțiilor exponențiale cu aproximații Padé de ordinul 5:

```
s=tf('s'); t=0:0.1:30;
g11=2/(s+1)/(3*s+1);
g12=1/(2*s+1)/(4*s+1); g12.iodelay=2; g12=pade(g12,5);
g21=-1/(3*s+1)/(5*s+1); g21.iodelay=4; g21=pade(g21,5);
g22=4/(s+1)/(2*s+1);
proc=[g11 g12; g21 g22];
d11=4/(2.7*s+1); d22=2/(3.8*s+1);
d12=-1/(5.3*s+1); d12.iodelay=2; d12=pade(d12,5);
d21=1/(7.7*s+1); d21.iodelay=4; d21=pade(d21,5);
dec=[d11 d12; d21 d22];
sis=proc*dec; step(sis,t);
grid on;
```

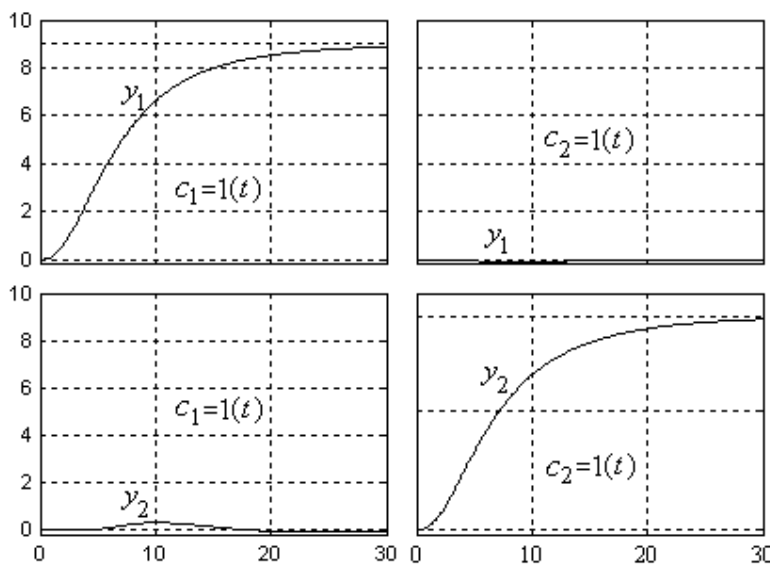


Fig. 10.7. Răspunsurile indiciale ale canalelor procesului decuplat cu decuplul tipizat.

d) Canalele 11 și 22 ale procesului decuplat (fig. 10.7) au răspunsuri indiciale cvasiidentice, caracterizate prin factorul static de proporționalitate, timpul de stabilizare și timpul mort

$$K_P = 9, \quad T_s = 21, \quad \tau = 2.$$

Prin urmare, regulatoarele monovariabile din fig. 10.5 vor avea aceeași funcție de transfer. Le alegem de tip PI, cu funcțiile de transfer

$$G_1(s) = G_2(s) = K_R \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right).$$

Cu formulele (23) de la capitolul 9, determinăm parametrii de acordare

$$K_R = \frac{1}{K_P \left(1 + \frac{5\tau}{T_{s95}}\right)} = \frac{1}{9 \left(1 + \frac{10}{21}\right)} \approx 0.075, \quad T_i = \frac{T_{s95}}{3 \dots 4} = \frac{21}{3} = 7.$$

În fig. 10.8 este reprezentat răspunsul sistemului de reglare pentru o variație treaptă unitară a fiecărei mărimi de referință.

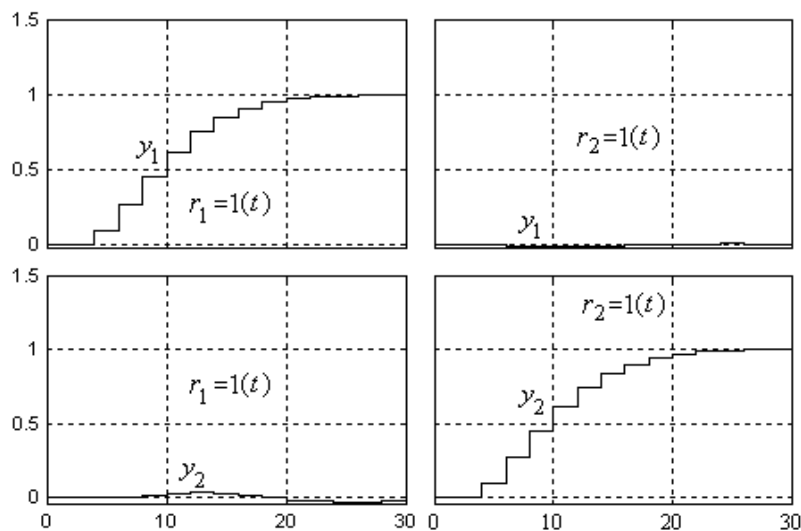


Fig. 10.8. Răspunsurile indiciale ale canalelor procesului decuplat cu decuplor tipizat.

Graficele au fost obținute în MATLAB, cu programul:

```
T=2; s=tf('s'); t=0:T:30;
g11=2/(s+1)/(3*s+1);
g12=1/(2*s+1)/(4*s+1); g12.iodelay=2;
g21=-1/(3*s+1)/(5*s+1); g21.iodelay=4;
g22=4/(s+1)/(2*s+1);
proc=[g11 g12; g21 g22]; procd=c2d(proc,T);
d11=4/(2.7*s+1);
d22=2/(3.8*s+1);
d12=-1/(5.3*s+1); d12.iodelay=2;
d21=1/(7.7*s+1); d21.iodelay=4;
```

```

dec=[d11 d12; d21 d22]; decd=c2d(dec,T);
sisd=procd*decd;
Kp=9; Ts=21; tau=2;
K=1/Kp/(1+5*tau/Ts);
Ti=Ts/3;
R=[K*(1+1/Ti/s) 0; 0 K*(1+1/Ti/s)]; Rd=c2d(R,T);
sis1=inv(eye(2)+sisd*Rd)*sisd*Rd;
step(sis1,t);
grid on

```

♦ **Aplicația 10.6.** Se dă procesul linear multivariabil cu matricea de transfer

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{(s+1)(3s+1)} & \frac{e^{-2s}}{4s+1} \\ -e^{-2s} & \frac{3e^{-3s}}{(s+1)(2s+1)} \end{bmatrix}.$$

Să se efectueze:

a) decuplarea staționară cu un decuplor având elementele diagonale

$$d_{11} = d_{22} = 1;$$

b) decuplarea dinamică cu un decuplor având funcțiile de transfer diagonale

$$D_{11}(s) = D_{22}(s) = 1.$$

**Soluție.** a) Determinăm matricea factorilor de proporționalitate ai procesului:

$$K = G(0) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Deoarece

$$d_{12} = \frac{-K_{12}}{K_{11}} d_{22} = -1/2, \quad d_{21} = \frac{-K_{21}}{K_{22}} d_{11} = 1/3,$$

decuplorul static are matricea factorilor de proporționalitate

$$D = \begin{bmatrix} 1 & d_{12} \\ d_{21} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 1/3 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) In conformitate cu relațiile (22), rezultă

$$D_{12}(s) = \frac{-G_{12}(s)}{G_{11}(s)} = \frac{-(s+1)(3s+1)e^{-2s}}{2(4s+1)},$$

$$D_{21}(s) = \frac{-G_{21}(s)}{G_{22}(s)} = \frac{(s+1)(2s+1)e^s}{3(3s+1)(4s+1)},$$

deci alegem decuplorul implementabil

$$\mathbf{D}(s) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-(s+1)(3s+1)e^{-2s}}{2(Ts+1)(4s+1)} \\ \frac{(s+1)(2s+1)}{3(3s+1)(4s+1)} & 1 \end{bmatrix},$$

unde  $0 < T < 0,2$ .

## 10.5. APLICAȚII DE AUTOCONTROL

♦ **C10.1.** Să se analizeze stabilitatea sistemului de reglare multivariabil cu regulatoare monovariabile din figura 10.2, caracterizat prin

$$G_1(s) = 2, \quad G_2(s) = k, \quad \mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} & \frac{-1}{2s+1} \\ \frac{1}{2s+1} & \frac{2}{s+1} \end{bmatrix}.$$

♦ **C10.2.** Se dă procesul liniar multivariabil cu matricea de transfer

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{3}{(2s+1)^2} & \frac{1}{(4s+1)(2s+1)} \\ \frac{1}{(s+1)(4s+1)} & \frac{2}{(s+1)^2} \end{bmatrix}.$$

Să se efectueze:

a) decuplarea staționară cu un decuplor având elementele diagonale

$$d_{11} = d_{22} = 1;$$

b) decuplarea dinamică cu un decuplor având funcțiile de transfer diagonale

$$D_{11}(s) = D_{22}(s) = 1;$$

c) decuplarea dinamică astfel încât procesul decuplat să aibă matricea de transfer

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}.$$

♦ **C10.3.** Se dă procesul liniar multivariabil cu matricea de transfer

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{(2s+1)(3s+1)} & \frac{-1}{3s+1} \\ \frac{1}{2s+1} & \frac{2}{3s+1} \end{bmatrix}.$$

Să se efectueze:

- decuplarea staționară;
- decuplarea dinamică astfel încât procesul decuplat să aibă matricea de transfer

$$M(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{(2s+1)(3s+1)} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3s+1} \end{bmatrix};$$

- decuplarea dinamică cu un decuplor având funcțiile de transfer diagonale

$$D_{11}(s) = D_{22}(s) = 1.$$

- ♦ C10.4. Se dă procesul liniar multivariabil cu matricea de transfer

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{2e^{-2s}}{6s+1} & \frac{e^{-4s}}{(6s+1)(3s+1)} \\ -e^{-4s} & \frac{2e^{-s}}{2s+1} \end{bmatrix}.$$

Să se efectueze:

- decuplarea staționară cu un decuplor având elementele diagonale  $d_{11} = d_{22} = 1$ ;
- decuplarea dinamică cu un decuplor având funcțiile de transfer diagonale

$$D_{11}(s) = D_{22}(s) = 1;$$

- decuplarea dinamică astfel încât procesul decuplat să aibă

$$M_{11}(s) = M_{22}(s).$$

- ♦ C10.5. Se dă procesul liniar multivariabil cu matricea de transfer

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{3e^{-3s}}{6s+1} & \frac{-e^{-2s}}{(6s+1)(3s+1)} \\ -e^{-3s} & \frac{e^{-s}}{(4s+1)(2s+1)} \end{bmatrix}.$$

Să se efectueze:

- decuplarea staționară cu un decuplor având elementele diagonale  $d_{11} = d_{22} = 1$ ;
- decuplarea dinamică cu un decuplor având funcțiile de transfer diagonale

$$D_{11}(s) = D_{22}(s) = 1.$$

- decuplarea dinamică astfel încât procesul decuplat să aibă

$$M_{11}(s) = M_{22}(s).$$



# 11

---

## SISTEME ȘI ALGORITMI DE REGLARE DUPĂ PERTURBAȚIE

---

Conform *principiului reglării după perturbație* (cauză), sistemul de reglare sesizează cauza perturbatoare (perturbația) și, anticipând efectul acesteia asupra mărimii reglate, intervine asupra procesului, în paralel cu acțiunea perturbatoare, pentru a genera un *efect opus* (egal și de semn contrar în cazul ideal) asupra mărimii reglate. În raport cu perturbația considerată, sistemul de reglare urmărește realizarea la ieșirea procesului a unui efect de compensare pe toată durata regimului tranzitoriu (în cazul regulatorului de tip dinamic) sau numai la finalul acestuia (în cazul regulatorului de tip static).

### 11.1. CARACTERISTICI ALE REGLĂRII DUPĂ PERTURBAȚIE

În schema bloc a sistemului de reglare după perturbație din fig. 11.1, unde canalul de execuție  $P_0$  al procesului include elementul de execuție, canalul procesului propriu-zis și traductorul mărimii reglate, operația de reglare se efectuează în raport cu valorile curente ale mărimii de intrare perturbatoare  $V_1$  și ale mărimii de referință  $R$ . Deoarece acțiunea compensatoare are loc *în paralel*, deci *simultan* cu acțiunea directă a perturbației, sistemul de reglare poate *preveni*, într-o măsură mai mare sau mai mică, modificarea mărimii reglate de către perturbația considerată. Pe de altă parte, efectul perturbațiilor nemăsurate asupra procesului reglat rămâne în totalitate *necompensat*.

Sistemele de reglare după perturbație sunt sisteme cu structură *deschisă*, deoarece elementul de comandă (*compensator* sau *regulator*) nu primește informație despre valoarea mărimii reglate, deci despre efectul acțiunii sale asupra procesului reglat. În consecință, la sistemele de reglare



după perturbație *lipsesc operațiile de autocorecție* necesare unei reglări sigure și precise, operația de reglare bazându-se numai pe acuratețea modelului celor două canale ale procesului reglat. Teoretic, în cazul proceselor liniare la care timpul mort al canalului de execuție este mai mic sau egal cu cel al canalului perturbator, sistemele de reglare după perturbație pot realiza compensarea perfectă a efectului perturbației măsurate, prin utilizarea unui regulator ideal (uneori impropriu), proiectat pe baza cunoașterii perfecte a modelului dinamic al procesului.

În practică, efectul perturbației măsurate asupra mărimii reglate poate fi redus substanțial, atât în regim staționar, cât și în regim dinamic, prin utilizarea unui algoritm de compensare adecvat. Reglarea după perturbație (tip *feedforward*) însoțește, de regulă, reglarea mai sigură după abatere (tip *feedback*), deoarece numai la ultimul tip de reglare, datorită operației de autocorecție, se pot reduce și elimina efectele tuturor perturbațiilor asupra mărimii reglate. Prin adăugarea, în paralel, a unui subsistem de reglare după perturbația cea mai importantă, sistemul de reglare după abatere realizează o reglare mai bună, cu abateri mai mici ale mărimii reglate față de mărimea de referință, ca urmare a compensării efectului perturbației respective asupra mărimii reglate.

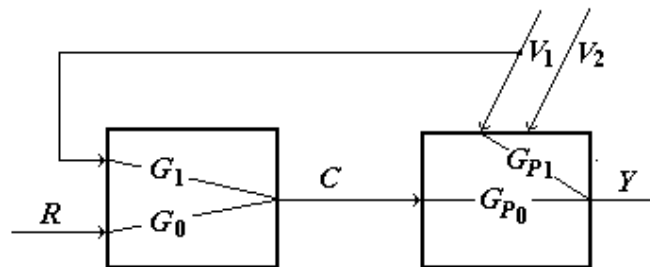


Fig. 11.1. Sistem de reglare după perturbație.

Presupunând că toate elementele din componența sistemului de reglare sunt liniare, relația operațională care exprimă dependența în regim dinamic a mărimii reglate în raport cu mărimile de intrare  $R$  și  $V_1$  are forma

$$Y(s) = G_{YR}(s)R(s) + G_{YV_1}(s)V_1(s), \quad (1)$$

unde

$$G_{YR}(s) = G_0(s)G_{P_0}(s), \quad (2)$$

$$G_{YV_1}(s) = G_1(s)G_{P_0}(s) + G_{P_1}(s). \quad (3)$$

Condițiile de reglare perfectă

$$G_{YR}(s)=1, \quad G_{YV_1}(s)=0, \quad (4)$$

se îndeplinesc atunci când compensatorul are funcțiile de transfer ideale

$$G_0^{id}(s)=\frac{1}{G_{P_0}(s)}, \quad G_1^{id}(s)=\frac{-G_{P_1}(s)}{G_{P_0}(s)}. \quad (5)$$

De regulă, funcția de transfer  $G_0^{id}(s)$  este improprie (cu ordinul relativ negativ), uneori chiar necauzală (cu timp mort negativ, când canalul de execuție  $\mathbf{P}_0$  al procesului are timp mort), deci imposibil de implementat fizic în forma (5). De asemenea, funcția de transfer  $G_1^{id}(s)$  poate fi improprie sau chiar necauzală (cu timp mort negativ, când canalul de execuție  $\mathbf{P}_0$  al procesului are timpul mort mai mare decât cel al canalului perturbator  $\mathbf{P}_1$ ). În plus, ambele funcții de transfer pot fi instabile (când canalul de execuție  $\mathbf{P}_0$  al procesului este de fază neminimă, adică are zerouri în dreapta axei imaginare), iar implementarea lor în această formă nu este acceptabilă. În faza de implementare fizică, ambele canale ale compensatorului trebuie să fie *proprii, cauzale și stabile*. În consecință, chiar în condițiile unui proces liniar cu modelul perfect, există cazuri în care efectul perturbator nu poate fi perfect compensat în regim dinamic oricum am alege structura și parametrii compensatorului. Un exemplu în acest sens este procesul cu timp mort, la care timpul mort al canalului de execuție este mai mare decât timpul mort al canalului perturbator.

## 11.2. REGLAREA CU COMPENSATOR DE TIP STATIC

Reglarea după perturbație cu compensator (regulator) de tip static (pur proporțional) reprezintă o soluție de reglare simplă și robustă, cu performanțe acceptabile în multe cazuri practice și efort de implementare minim. La procesele stabile, prin utilizarea unui compensator de tip static, cu ecuația

$$c(t)=K_0r(t)+K_1v_1(t), \quad (6)$$

se poate asigura compensarea finală (în regim staționar) a mărimii reglate  $y(t)$  la perturbație tip treaptă, precum și aducerea mărimii reglate la valoarea de referință. La perturbație sau referință treaptă, mărimea de comandă  $c(t)$  are, de asemenea, formă de treaptă. Performanțele de reglare în regim

tranzitoriu sunt relativ slabe, dependente de caracteristicile dinamice ale procesului (părții fixate).

La sistemele liniare de tip proporțional, factorul de proporționalitate se obține din funcția de transfer prin înlocuirea variabilei complexe  $s$  cu 0. Așadar, prin înlocuirea variabilei  $s$  cu 0 în relațiile de compensare dinamică (5), obținem următoarele expresii ale parametrilor regulatorului static:

$$K_0 = \frac{1}{K_{P_0}}, \quad K_1 = \frac{-K_{P_1}}{K_{P_0}}. \quad (7)$$

*Experimental*, factorii de proporționalitate ai procesului sunt determinați cu relațiile

$$K_{P_0} = \frac{(\Delta y_0)_{final}}{\Delta c}, \quad K_{P_1} = \frac{(\Delta y_1)_{final}}{\Delta v_1}, \quad (8)$$

unde  $y_0(t)$  este răspunsul procesului la intrarea treaptă  $c(t) = (\Delta c) \cdot 1(t)$ , iar  $y_1(t)$  este răspunsul procesului la intrarea treaptă  $v_1(t) = (\Delta v_1) \cdot 1(t)$ .

Pentru procesul cu răspunsurile indiciale  $y_0(t)$  și  $y_1(t)$  din fig. 11.2, avem

$$K_{P_0} = \frac{(\Delta y_0)_{final}}{\Delta c} = \frac{1}{1} = 1, \quad K_{P_1} = \frac{(\Delta y_1)_{final}}{\Delta v_1} = \frac{0,5}{1} = \frac{1}{2}.$$

Prin urmare, compensatorul are factorii de proporționalitate

$$K_0 = \frac{1}{K_{P_0}} = 1, \quad K_1 = \frac{-K_{P_1}}{K_{P_0}} = \frac{-1}{2}.$$

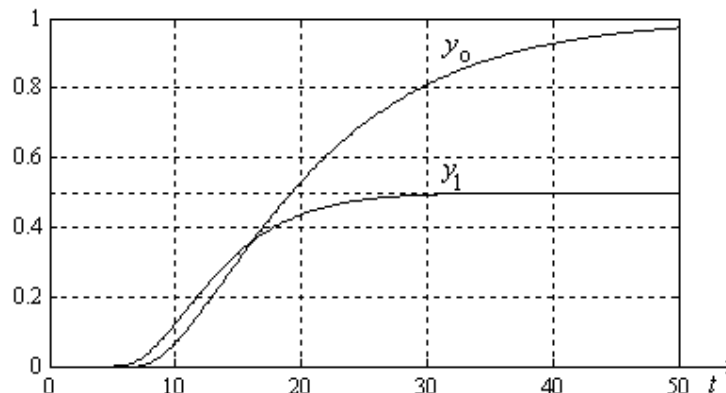


Fig. 11.2. Răspunsurile indiciale al părții fixate:  
 $y_0$  – pentru  $c=1(t)$ ;  $y_1$  – pentru  $v_1=1(t)$ .

În ipoteza că procesul cu răspunsurile indiciale din fig. 11.2 are funcțiile de transfer

$$G_{P_0}(s) = \frac{e^{-7s}}{(5s+1)(10s+1)}, \quad G_{P_1}(s) = \frac{e^{-5s}}{2(2s+1)(3s+1)(4s+1)}, \quad (9)$$

În fig. 11.3 sunt reprezentate grafic răspunsurile la referință și perturbație treaptă unitară ale sistemului de reglare. În lipsa reglării, răspunsul  $y_1(t)$  al procesului la perturbație treaptă unitară s-ar fi stabilizat la valoarea 0,5.

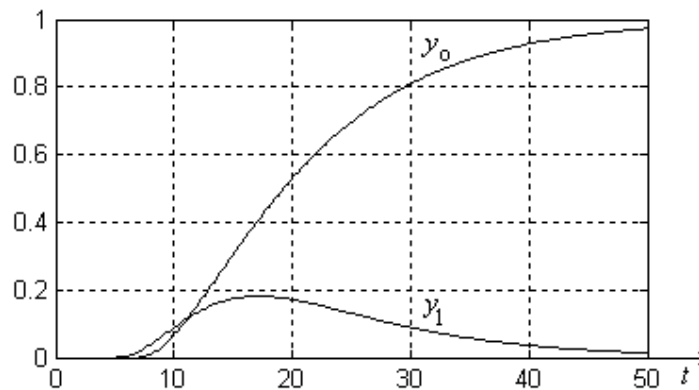


Fig. 11.3. Răspunsurile sistemului de reglare cu compensator static:  
 $y_0$  – pentru  $r=1(t)$ ;  $y_1$  – pentru  $v_1=1(t)$ .

### 11.3. REGLAREA CU COMPENSATOR DINAMIC DEDICAT

Prin utilizarea unui compensator de tip dinamic se urmărește compensarea mărimii reglate în regim dinamic (deci în regim tranzitoriu și în regim staționar), cu performanțe de reglare superioare celor obținute cu compensatorul de tip static, atât în raport cu perturbația măsurată  $v_1(t)$ , cât și cu referința  $r(t)$ . La reglarea cu compensator dinamic dedicat, efortul și costul de implementare sunt relativ mari, deoarece structura compensatorului este dependentă de cea a modelului dinamic al procesului, care trebuie identificat cu un grad ridicat de precizie.

În cazul aplicațiilor practice, performanțele de reglare depind de acuratețea modelului procesului și de valoarea *factorului de magnitudine* al compensatorului (în cazul în care, din proiectarea compensatorului, rezultă inițial o funcție de transfer improprie). Reamintim că factorul de

magnitudine al unui sistem simplu propriu și fără timp mort) cu funcția de transfer rațională  $G(s)$  este definit ca fiind raportul dintre valoarea inițială și valoarea finală a semnalului de comandă  $c(t)$  la intrare treaptă, adică

$$M = \frac{c(0_+)}{c(\infty)} = \frac{G(\infty)}{G(0)}. \quad (10)$$

Considerăm că partea fixată este liniară, stabilă și de tip proporțional, cu funcțiile de transfer de forma

$$G_{P_0}(s) = \frac{P_-(s)P_+(s)}{D(s)} e^{-\tau_0 s}, \quad G_{P_1}(s) = \frac{P_1(s)}{D_1(s)} e^{-\tau_1 s}. \quad (11)$$

unde polinomul  $P_-(s)$  are numai rădăcini cu partea reală negativă, iar polinomul  $P_+(s)$  are numai rădăcini cu partea reală pozitivă și satisface proprietatea  $P_+(0)=1$ . Compensatorul “ideal” (5) are funcțiile de transfer

$$G_0^{id}(s) = \frac{1}{G_{P_0}(s)} = \frac{D(s)}{P_-(s)P_+(s)} e^{\tau_0 s}, \quad (12)$$

$$G_1^{id}(s) = \frac{-G_{P_1}(s)}{G_{P_0}(s)} = \frac{-D(s)P_1(s)}{P_-(s)P_+(s)D_1(s)} e^{-(\tau_1 - \tau_0)s}. \quad (13)$$

Deoarece forma implementabilă a algoritmului de reglare presupune ca ambele funcții de transfer ale compensatorului să fie *proprii, strict stabile* (fără poli cu partea reală nulă sau pozitivă) și *cauzale* (fără timp mort negativ), în locul compensatorului “ideal” se poate utiliza compensatorul fizic implementabil cu funcțiile de transfer:

$$G_0(s) = \frac{D(s)}{P_-(s)(T_{f0}s+1)^{k_0}}, \quad (14)$$

$$G_1(s) = \tilde{G}_1(s) e^{-\tau s}, \quad (15)$$

unde

$$\tilde{G}_1(s) = \frac{-D(s)P_1(s)}{P_-(s)D_1(s)(T_{f1}s+1)^{k_1}}, \quad (16)$$

$$\tau = \begin{cases} \tau_1 - \tau_0, & \tau_1 > \tau_0 \\ 0, & \tau_1 \leq \tau_0 \end{cases}, \quad (17)$$

$T_{f0}$  și  $T_{f1}$  sunt constante de timp de filtrare, iar puterile  $k_0$  și  $k_1$  sunt numere naturale, alese astfel încât funcțiile raționale  $G_0(s)$  și  $\tilde{G}_1(s)$  să fie proprii (de regulă, simplu proprii). Teoretic, cu cât valoarea constantelor de timp  $T_{f0}$  și  $T_{f1}$  este mai mică, cu atât este mai bună aproximarea funcțiilor de transfer improprii prin funcțiile de transfer proprii. În aplicațiile practice cu  $G_0(s)$  și  $\tilde{G}_1(s)$  simplu proprii, cele două constante de timp se aleg astfel încât factorii de magnitudine  $M_0$  și  $M_1$  ai compensatorului,

$$M_0 = \frac{G_0(\infty)}{G_0(0)}, \quad M_1 = \frac{\tilde{G}_1(\infty)}{\tilde{G}_1(0)}, \quad (18)$$

să aibă valori apriori impuse (nu mai mari de 20, pentru a se evita amplificarea excesivă a zgomotului, a reduce uzura instalației, a diminua consumul de combustibil și energie).

Dacă se dorește eliminarea creșterii bruște a semnalului de comandă la referință treaptă, atunci se alege puterea  $k_0$  astfel încât funcția de transfer  $G_0(s)$  să fie strict proprie, cu ordinul relativ 1. În acest caz, răspunsul compensatorului la referință treaptă atinge cu întârziere valoarea maximă, care este mai mică (în modul) decât valoarea inițială a răspunsului compensatorului simplu propriu. Această procedură poate fi aplicată și în proiectarea compensatorului de perturbație.

În cazul procesului cu funcțiile de transfer (9), compensatorul dedicat are funcțiile de transfer „ideale”

$$G_0^{id}(s) = (5s + 1)(10s + 1)e^{7s},$$

$$G_1^{id}(s) = \frac{-(5s + 1)(10s + 1)e^{2s}}{2(2s + 1)(3s + 1)(4s + 1)},$$

deci funcțiile de transfer implementabile

$$G_0(s) = \frac{(5s + 1)(10s + 1)}{(T_{f0}s + 1)^2},$$

$$G_1(s) = \frac{-(5s + 1)(10s + 1)}{2(2s + 1)(3s + 1)(4s + 1)}.$$

Factorul de magnitudine al compensatorului de referință este

$$M_0 = \frac{G_0(\infty)}{G_0(0)} = \frac{50}{T_{f0}^2}.$$

Pentru  $M_0=8$ , care implică  $T_{f0}=2,5$ , răspunsurile  $y(t)$  și  $c(t)$  ale sistemului de reglare la referință și perturbație treaptă sunt reprezentate grafic respectiv în fig. 11.4 și fig. 11.5. Performanțele de reglare sunt mai bune decât în cazul compensatorului de tip static. Totuși, gradul de compensare dinamică a efectului perturbației treaptă rămâne relativ scăzut din cauza faptului că timpul mort al canalului de execuție al procesului este mai mare decât cel al canalului perturbator.

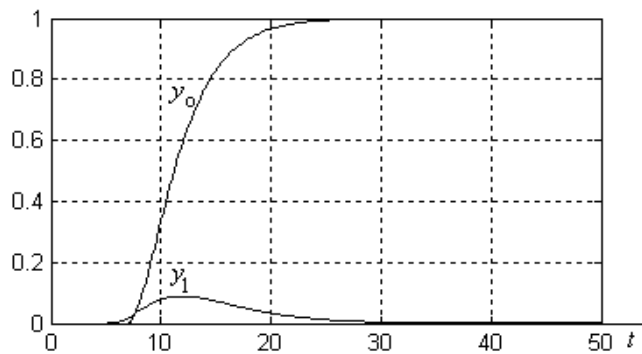


Fig. 11.4. Răspunsurile sistemului de reglare cu compensator dinamic dedicat:  
 $y_0$  – pentru  $r=1(t)$ ;  $y_1$  – pentru  $v_1=1(t)$ .

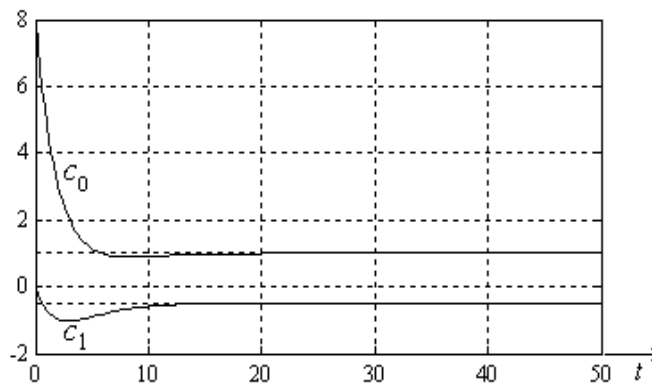


Fig. 11.5. Comenzile sistemului de reglare cu compensator dinamic dedicat:  
 $c_0$  – pentru  $r=1(t)$ ;  $c_1$  – pentru  $v_1=1(t)$ .

În fig. 11.6 sunt reprezentate grafic răspunsurile  $y(t)$  și  $c(t)$  ale sistemului de reglare la referință treaptă în cazul *compensatorului strict propriu* cu funcția de transfer

$$G_0(s) = \frac{(5s+1)(10s+1)}{(T_{f0}s+1)^3}, \quad T_{f0} = 2,5.$$

Răspunsul  $y_0(t)$  este comparabil cu cel obținut cu compensatorul de referință simplu propriu (fig. 11.4), dar răspunsul  $c_0(t)$  (cu valoarea maximă 2,64 la momentul  $t \approx 2,3$ ) diferă de cel din fig. 11.5 (cu valoarea maximă 8 la momentul  $t=0_+$ ).

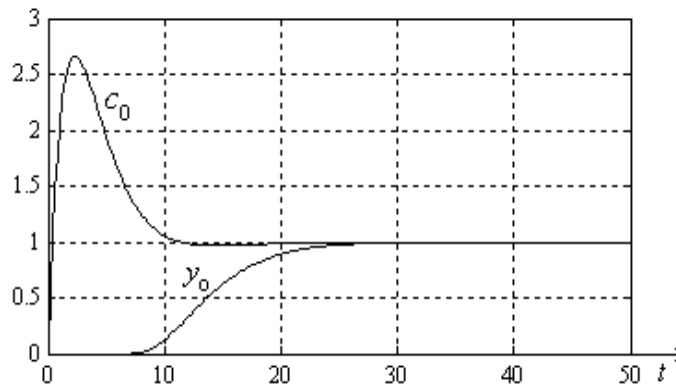


Fig. 11.6. Răspunsurile la referință treaptă unitară ale sistemului de reglare cu compensator dinamic dedicat strict propriu.

#### 11.4. REGLAREA CU COMPENSATOR DINAMIC TIPIZAT

Reglarea cu compensator dinamic tipizat (cu structură unică, standard) este aplicabilă la procesele de tip proporțional, fiind mai precisă decât cea cu compensator static și mult mai practică decât cea cu compensator dinamic dedicat. Acordarea parametrilor compensatorului dinamic tipizat se efectuează *experimental*, pe baza *răspunsurilor indiciale* ale canalului de execuție  $P_0$  și canalului de perturbație  $P_1$  ale părții fixate. Din aceste răspunsuri se construiesc mai întâi funcțiile de transfer aproximative (tipizate) ale procesului (părții fixate), în forma:

$$G_{P_0}(s) = \frac{K_{P_0} e^{-\tau_0 s}}{T_0 s + 1}, \quad G_{P_1}(s) = \frac{K_{P_1} e^{-\tau_1 s}}{T_1 s + 1}, \quad (19)$$



unde  $\tau_0$  și  $\tau_1$  sunt timpii morți ai canalelor de execuție  $\mathbf{P}_0$  și de perturbație  $\mathbf{P}_1$  ale procesului. Factorii de proporționalitate  $K_{P_0}$  și  $K_{P_1}$  se calculează cu relațiile (8), iar constantele de timp de întârziere  $T_0$  și  $T_1$  se determină din durata tranzitorie a răspunsurilor indiciale ale canalelor  $\mathbf{P}_0$  și  $\mathbf{P}_1$ , cu relațiile

$$T_0 \approx \frac{(T_{tr95})_0}{3} = \frac{(T_{s95})_0 - \tau_0}{3}, \quad T_1 \approx \frac{(T_{tr95})_1}{3} = \frac{(T_{s95})_1 - \tau_1}{3}. \quad (20)$$

În conformitate cu relațiile (5), compensatorul tipizat are funcțiile de transfer ideale

$$G_0^{id}(s) = \frac{1}{G_{P_0}(s)} = \frac{T_0 s + 1}{K_{P_0}} e^{\tau_0 s}, \quad (21)$$

$$G_1^{id}(s) = \frac{-G_{P_1}(s)}{G_{P_0}(s)} = \frac{K_{P_1}(T_0 s + 1)}{K_{P_0}(T_1 s + 1)} e^{-(\tau_1 - \tau_0)s}, \quad (22)$$

deci funcțiile de transfer implementabile

$$G_0(s) = \frac{K_0(T_0 s + 1)}{T_{f0} s + 1}, \quad (23)$$

$$G_1(s) = \frac{K_1(T_0 s + 1)e^{-\tau s}}{T_1 s + 1}, \quad (24)$$

unde factorii de proporționalitate  $K_0$  și  $K_1$  ai compensatorului au expresiile

$$K_0 = \frac{1}{K_{P_0}}, \quad K_1 = \frac{-K_{P_1}}{K_{P_0}}, \quad (25)$$

iar timpul mort  $\tau$  se obține cu relația (17) din timpii morți  $\tau_0$  și  $\tau_1$  ai canalelor de execuție  $\mathbf{P}_0$  și de perturbație  $\mathbf{P}_1$  ale părții fixate.

Prin ajustarea convenabilă a constantei de timp  $T_1$  se poate obține o deviație minimă a mărimii reglate  $y(t)$  la o variație treaptă a perturbației  $v_1(t)$ . În cazul teoretic în care ambele canale ale procesului sunt de întârziere de ordinul unu, iar timpul mort al canalului de execuție nu depășește timpul mort al canalului perturbator, compensatorul cu funcția de transfer (24) și parametrii de acordare stabiliți prin această metodologie asigură o compensare dinamică perfectă a efectului perturbator.

Constanta de timp de filtrare  $T_{f0}$  a compensatorului de referință se alege de circa 2...10 ori mai mică decât constanta de timp  $T_0$ , astfel încât factorul de magnitudine al compensatorului (de tip simplu propriu), anume

$$M_0 = \frac{G_0(\infty)}{G_0(0)} = \frac{T_0}{T_{f0}}, \quad (26)$$

să fie cuprins între 2 și 10. În cazul în care răspunsul  $y(t)$  la referință treaptă are un suprareglaj (supradepășire) prea mare, se impune micșorarea constantei de timp de avans  $T_0$  a funcției de transfer  $G_0(s)$ .

Pentru  $\tau \approx mT$ ,  $m \in \mathbf{Z}$ , echivalentul discret cu perioada  $T$  al compensatorului de perturbație (24) are funcția de transfer

$$G^0(z) = K_1 \frac{\frac{T_0}{T_1} z^{-m} + (1 - p_1 - \frac{T_0}{T_1}) z^{-m-1}}{1 - p_1 z^{-1}}, \quad p_1 = e^{-T/T_1} \quad (27)$$

și ecuația cu diferențe

$$c_k - p_1 c_{k-1} = K_1 \frac{T_0}{T_1} (v_1)_{k-m} + K_1 (1 - p_1 - \frac{T_0}{T_1}) (v_1)_{k-m-1}. \quad (28)$$

În cazul în care timpul tranzitoriu al canalului de execuție  $\mathbf{P}_0$  este mai mic decât timpul tranzitoriu al canalului perturbator  $\mathbf{P}_1$ , deci  $T_0 \leq T_1$ , funcția de transfer a compensatorului de perturbație (24) poate fi redusă la forma

$$\bar{G}_1(s) = \frac{K_1 e^{-\tau s}}{\bar{T}_1 s + 1}, \quad (29)$$

cu

$$\bar{T}_1 = T_1 - T_0. \quad (30)$$

Valoarea constantei de timp  $\bar{T}_1$  poate fi ulterior ajustată experimental astfel încât deviația maximă a mărimii reglate  $y(t)$  la o variație treaptă a perturbației  $v_1(t)$  să fie minimă.

În majoritatea cazurilor practice se utilizează un compensator dinamic tipizat, nejustificându-se varianta cu compensator dinamic destinat (din cauza structurii sofisticate și a efortului mare de cercetare, proiectare și implementare), în condițiile în care efectul celorlalte perturbații rămâne în totalitate necompensat.

În fig. 11.2 sunt prezentate răspunsurile indiciale  $y_0(t)$  și  $y_1(t)$  ale canalului de execuție și canalului perturbator ale părții fixate cu funcțiile de transfer (9). Presupunând că aceste răspunsuri indiciale au fost determinate experimental, rezultă:

$$K_0 = \frac{1}{K_{P_0}} = 1, \quad \tau_0 = 7, \quad (T_{tr95})_0 \approx 46 - 7 = 39,$$

$$K_1 = \frac{-K_{P_1}}{K_{P_0}} = \frac{-1}{2}, \quad \tau_1 = 5, \quad (T_{tr95})_1 \approx 25 - 5 = 21,$$

deci

$$\tau = 0, \quad T_0 \approx \frac{(T_{tr95})_0}{3} = 13, \quad T_1 \approx \frac{(T_{tr95})_1}{3} = 7,$$

$$T_{f0} = \frac{T_0}{5} = 2,6.$$

În conformitate cu (23) și (24), canalele compensatorului au funcțiile de transfer

$$G_0(s) = \frac{13s + 1}{2,6s + 1}, \quad G_1(s) = \frac{-(13s + 1)}{2(7s + 1)}. \quad (31)$$

În fig. 11.7 și fig. 11.8 sunt reprezentate respectiv răspunsurile  $y(t)$  și  $c(t)$  ale sistemului de reglare la perturbație și referință treaptă unitară. Ambele răspunsuri din fig. 11.7 sunt superioare celor din fig. 11.3 realizate cu compensator static.

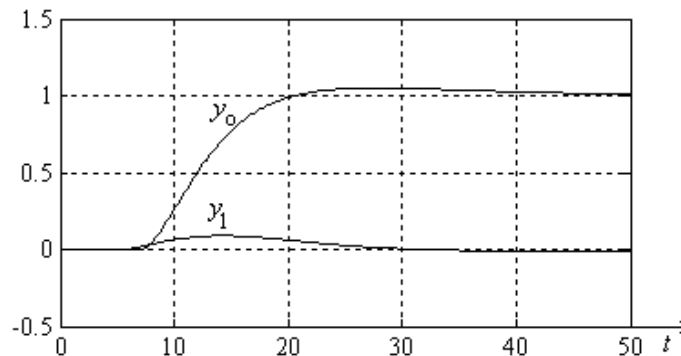


Fig. 11.7. Răspunsurile sistemului de reglare cu compensator dinamic tipizat:

$y_0$  – pentru  $r=1(t)$ ;  $y_1$  – pentru  $v_1=1(t)$ .

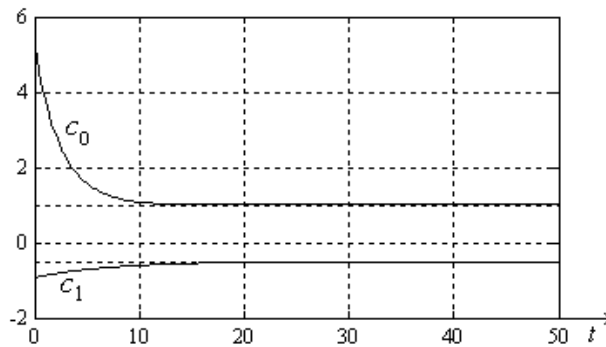


Fig. 11.8. Comenzile sistemului de reglare cu compensator dinamic tipizat:

$c_0$  – pentru  $r=1(t)$ ;  $c_1$  – pentru  $v_1=1(t)$ .

**Observații. 1<sup>0</sup>.** Suprareglajul răspunsului  $y_0$  la referință treaptă din fig. 11.7 poate fi redus prin micșorarea constantei de timp de avans  $T_0$  a funcției de transfer  $G_0(s)$ . Astfel, alegând

$$G_0(s) = \frac{10s + 1}{2,6s + 1},$$

suprareglajul devine zero.

**2<sup>0</sup>.** Variația relativ mare a mărimii reglate  $y_1$  la perturbație treaptă unitară din fig. 11.7 se explică prin faptul că timpul mort al canalului de execuție al părții fixate este mai mare decât timpul mort al canalului perturbator. Dacă ambele canale ale părții fixate au același timp mort, funcțiile de transfer (31) ale compensatorului rămân neschimbate. În fig. 11.9 sunt prezentate răspunsurile  $y_0(t)$  și  $y_1(t)$  ale sistemului de reglare respectiv la referință și perturbație treaptă unitară pentru cazul în care timpii morți ai canalelor părții fixate sunt egali cu 5.

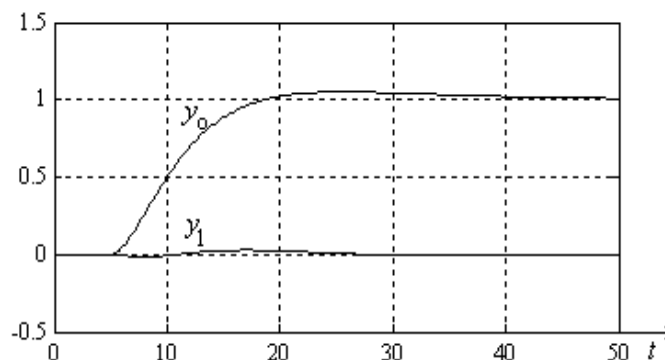


Fig. 11.9. Răspunsurile sistemului de reglare cu compensator tipizat pentru procesul cu timpi morți egali ( $y_0$  – pentru  $r=1(t)$ ;  $y_1$  – pentru  $v_1=1(t)$ ).

## 11.4. APLICAȚII REZOLVATE

◆ **Aplicația 11.1.** Partea fixată a unui sistem de reglare după perturbație cu structura din fig. 11.1 are modelul dinamic

$$(P) \quad 10y'' + 6y' + y = c' + 2c + 0,3v_1.$$

Să se determine valorile factorilor de proporționalitate  $k_0$  și  $k_1$  ai regulatorului de tip static cu modelul

$$(R) \quad c = k_0 r + k_1 v_1.$$

**Soluție.** Din modelul staționar al procesului, anume

$$y = 2c + 0,3v_1,$$

și modelul regulatorului, obținem modelul staționar al sistemului de reglare:

$$y = 2c + 0,3v_1 = 2(k_0 r + k_1 v_1) + 0,3v_1 = 2k_0 r + (2k_1 + 0,3)v_1.$$

Pentru  $k_0 = 0,5$  și  $k_1 = -0,15$ , sistemul de reglare are modelul staționar dorit

$$y = r.$$

◆ **Aplicația 11.2.** Partea fixată a unui sistem de reglare după perturbație cu structura din fig. 11.1 are ecuația

$$36\ddot{y} + 36\dot{y} + 11y + y = 2c - (2\dot{v}_1 + v_1).$$

Să se proiecteze:

- compensatorul de tip static;
- compensatorul dinamic dedicat cu factorii de magnitudine  $M_0=6$  și  $M_1=6$ .

**Soluție.** a) Din modelul staționar al părții fixate

$$y = 2c - v_1,$$

rezultă

$$K_{P_0} = 2, \quad K_{P_1} = -1.$$

Compensatorul de tip static are ecuația

$$c = K_0 r + K_1 v_1,$$

unde

$$K_0 = 1/K_{P_0} = 0,5, \quad K_1 = -K_{P_1}/K_{P_0} = 0,5,$$

deci

$$c = \frac{1}{2}(r + v_1).$$

În fig. 11.10 sunt reprezentate răspunsurile  $y_0(t)$  și  $y_1(t)$  ale sistemului de reglare respectiv la referință și perturbație treaptă unitară. Graficele au fost obținute în MATLAB, cu programul:

```
s=tf('s');
t=0:0.1:25;
P0=2/(36*s^3+36*s^2+11*s+1);
P1= -(2*s+1)/(36*s^3+36*s^2+11*s+1);
C0=0.5; C1=0.5;
S0=P0*C0; S1=P1+P0*C1;
step(S0,S1,t);
grid on;
```

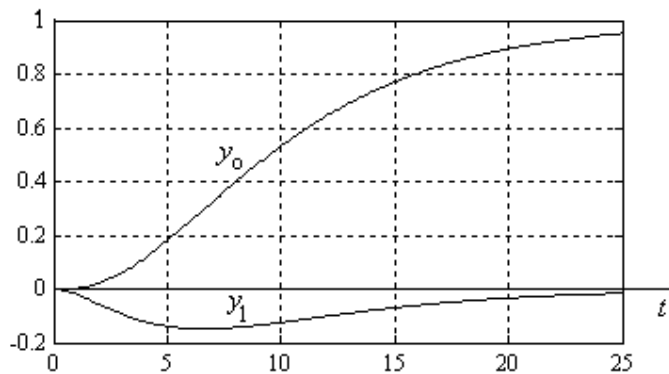


Fig. 11.10. Răspunsurile sistemului de reglare cu compensator static:  
 $y_0$  – pentru  $r=1(t)$ ;  $y_1$  – pentru  $v_1=1(t)$ .

b) Partea fixată are funcțiile de transfer:

$$G_{P_0}(s) = \frac{2}{36s^3 + 36s^2 + 11s + 1} = \frac{2}{(2s+1)(3s+1)(6s+1)},$$

$$G_{P_1}(s) = \frac{-(2s+1)}{36s^3 + 36s^2 + 11s + 1} = \frac{-1}{(3s+1)(6s+1)}.$$

Compensatorul dinamic ”ideal” are funcțiile de transfer

$$G_0^{id}(s) = \frac{1}{G_{P_0}(s)} = \frac{(2s+1)(3s+1)(6s+1)}{2},$$

$$G_1^{id}(s) = \frac{-G_{P_1}(s)}{G_{P_0}(s)} = \frac{2s+1}{2}.$$

Compensatorul dinamic implementabil are funcțiile de transfer simplu proprii

$$G_0(s) = \frac{(2s+1)(3s+1)(6s+1)}{2(T_{f0}s+1)^3},$$

$$G_1(s) = \frac{2s+1}{2(T_{f1}s+1)},$$

căroră le corespund factorii de magnitudine

$$M_0 = \frac{G_0(\infty)}{G_0(0)} = \frac{36}{T_{f0}^3}, \quad M_1 = \frac{G_1(\infty)}{G_1(0)} = \frac{2}{T_{f1}}.$$

Pentru  $M_0=6$  și  $M_1=6$ , rezultă

$$T_{f0} = \sqrt[3]{6} \cong 1,82, \quad T_{f1} = \frac{1}{3}.$$

În fig. 11.11 sunt reprezentate răspunsurile  $y_0(t)$  și  $y_1(t)$  ale sistemului de reglare la referință și perturbație treaptă unitară. Performanțele sunt superioare celor obținute cu regulatorul de tip static. Graficele au fost obținute în MATLAB, cu programul

```
s=tf('s');
t=0:0.1:25;
P0=2/(36*s^3+36*s^2+11*s+1);
P1= -(2*s+1)/(36*s^3+36*s^2+11*s+1);
T0=1.82; C0=(2*s+1)*(3*s+1)*(6*s+1)/2/(T0*s+1)^3;
T1=1/3; C1=(2*s+1)/2/(T1*s+1);
S0=P0*C0;
S1=P1+P0*C1;
step(S0,S1,t);
grid on;
```

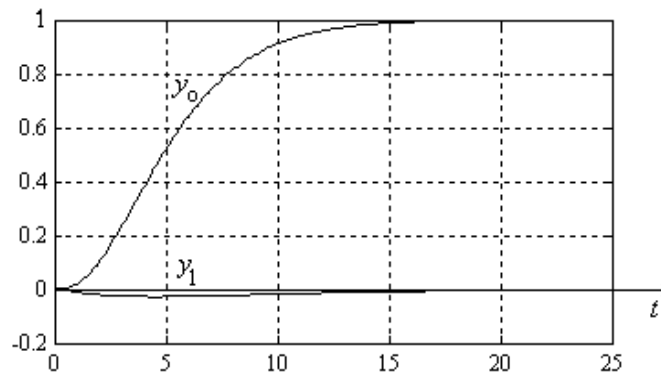


Fig. 11.11. Răspunsurile sistemului cu compensator dinamic simplu propriu:

$y_0$  – pentru  $r=1(t)$ ;  $y_1$  – pentru  $v_1=1(t)$ .

În fig. 11.12 sunt reprezentate răspunsurile  $c_0(t)$  și  $c_1(t)$  ale compensatorului la referință și perturbație treaptă unitară. Graficele au fost obținute cu programul precedent, în care s-a înlocuit ultimele patru linii cu linia

`step(C0,C1,t); grid on;`

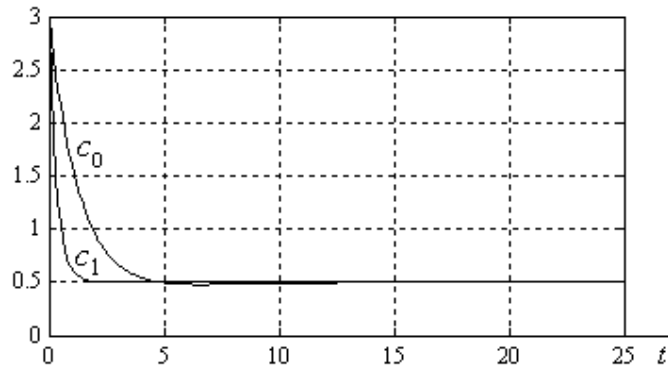


Fig. 11.12. Comenzile sistemului cu compensator dinamic simplu propriu:  
 $c_0$  – pentru  $r=1(t)$ ;  $c_1$  – pentru  $v_1=1(t)$ .

♦ **Aplicația 11.3.** Considerăm un sistem de reglare după perturbație cu structura din fig. 11.1, unde partea fixată are funcțiile de transfer:

$$G_{P_0} = \frac{e^{-2s}}{(2s+1)(3s+1)(6s+1)}, \quad G_{P_1} = \frac{-e^{-6s}}{2(3s+1)(15s+1)}.$$

Să se proiecteze:

- compensatorul de tip static;
- compensatorul dinamic dedicat, cu factorii de magnitudine  $M_0 = 6$  și  $M_1 = 1$ ;
- un compensator dinamic dedicat strict propriu.

**Soluție.** a) Compensatorul staționar are ecuația  $c = K_0 r + K_1 v_1$ , unde

$$K_0 = \frac{1}{K_{P_0}} = \frac{1}{G_{P_0}(0)} = 1, \quad K_1 = \frac{-K_{P_1}}{K_{P_0}} = \frac{-G_{P_1}(0)}{G_{P_0}(0)} = \frac{1}{2}.$$

În fig. 11.13 sunt reprezentate răspunsurile  $c_0(t)$  și  $c_1(t)$  ale sistemului de reglare respectiv la referință și perturbație treaptă unitară. Graficele au fost obținute cu programul MATLAB:

```
s=tf('s'); t=0:0.5:60;
P0=1/(2*s+1)/(3*s+1)/(6*s+1); P0.iodelay=2;
P1= -1/2/(3*s+1)/(15*s+1); P1.iodelay=6;
C0=1; C1=0.5;
Y0=step(P0*C0,t);
Y1=step(P1,t); Y2=step(P0*C1,t);
plot(t,Y0,t,Y1+Y2); grid on;
```



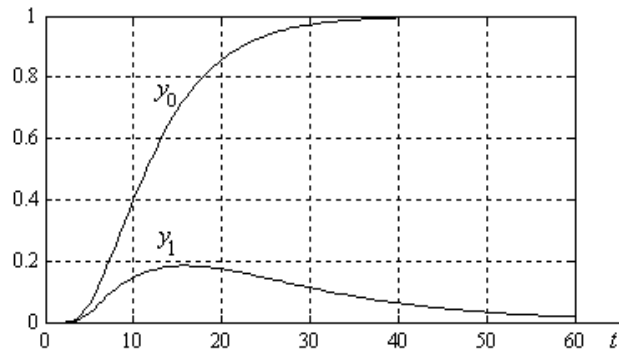


Fig. 11.13. Răspunsurile sistemului de reglare cu compensator static:  
 $y_0$  – pentru  $r=1(t)$ ;  $y_1$  – pentru  $v_1=1(t)$ .

b) Compensatorul dinamic ”ideal” are funcțiile de transfer

$$G_0^{id}(s) = \frac{1}{G_{P0}(s)} = (2s+1)(3s+1)(6s+1)e^{2s},$$

$$G_1^{id}(s) = \frac{-G_{P1}(s)}{G_{P0}(s)} = \frac{(2s+1)(6s+1)e^{-4s}}{2(15s+1)}.$$

Compensatorul dinamic implementabil simplu propriu are funcțiile de transfer

$$G_0(s) = \frac{(2s+1)(3s+1)(6s+1)}{(T_{f0}s+1)^3}, \quad G_1(s) = \frac{(2s+1)(6s+1)e^{-4s}}{2(15s+1)(T_{f1}s+1)},$$

căroră le corespund factorii de magnitudine

$$M_0 = \frac{G_0(\infty)}{G_0(0)} = \frac{36}{T_{f0}^3}, \quad M_1 = \frac{\tilde{G}_1(\infty)}{\tilde{G}_1(0)} = \frac{4}{5T_{f1}},$$

unde  $\tilde{G}_1(s) = \frac{(2s+1)(6s+1)}{2(15s+1)(T_{f1}s+1)}$ . Pentru  $M_0=6$  și  $M_1=1$ , rezultă  $T_{f0} = \sqrt[3]{6} \approx 1,82$  și

$T_{f1} = 0,8$ . În fig. 11.14 și fig. 11.15 sunt reprezentate respectiv răspunsurile  $y(t)$  și  $c(t)$  ale sistemului de reglare la referință și perturbație treaptă unitară. Graficele din fig. 11.14 au fost obținute în MATLAB, cu programul

```
s=tf('s'); t=0:0.5:60;
P0=1/(2*s+1)/(3*s+1)/(6*s+1); P0.iodelay=2;
P1= -1/2/(3*s+1)/(15*s+1); P1.iodelay=6;
T0=1.82; C0=(2*s+1)*(3*s+1)*(6*s+1)/(T0*s+1)^3;
T1=0.8; C1=(2*s+1)*(6*s+1)/2/(15*s+1)/(T1*s+1); R1.iodelay=4;
Y0=step(P0*C0,t); Y1=step(P1,t); Y2=step(P0*C1,t);
plot(t,Y0,t,Y1+Y2);
grid on;
```

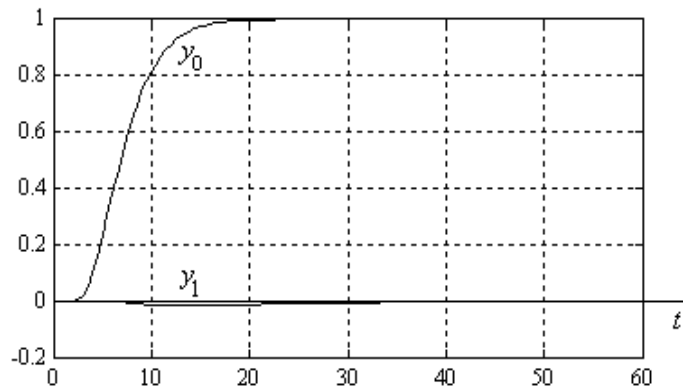


Fig. 11.14. Răspunsurile sistemului cu compensator dinamic simplu propriu:  
 $y_0$  - pentru  $r=1(t)$ ;  $y_1$  - pentru  $v_1=1(t)$ .

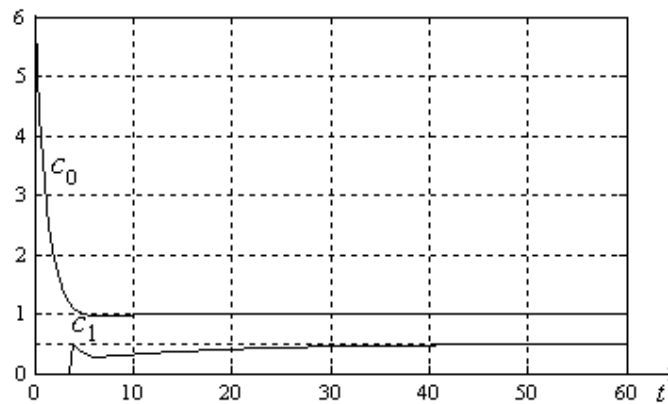


Fig. 11.15. Comenzile sistemului cu compensator dinamic simplu propriu:  
 $c_0$  - pentru  $r=1(t)$ ;  $c_1$  - pentru  $v_1=1(t)$ .

(c) Pentru  $T_{f0} = 1,5$  și  $T_{f1} = 0,2$ , compensatorul dinamic dedicat strict propriu (pe ambele canale) are funcțiile de transfer

$$G_0(s) = \frac{(2s+1)(3s+1)(6s+1)}{(1,5s+1)^4},$$

$$G_1(s) = \frac{(2s+1)(6s+1)e^{-4s}}{2(1,5s+1)(0,2s+1)^2}.$$

Răspunsurile  $y(t)$  și  $c(t)$  ale sistemului de reglare la referință și perturbație treaptă unitară sunt reprezentate grafic în fig. 11.16, respectiv fig. 11.17. Performanțele de reglare sunt comparabile cu cele obținute cu compensatorul dinamic dedicat simplu propriu, dar semnalul de comandă la referință treaptă unitară este mai puțin agresiv.

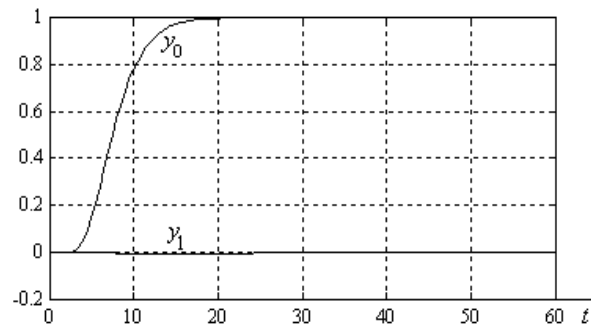


Fig. 11.16. Răspunsurile sistemului cu compensator dinamic strict propriu:  
 $y_0$  – pentru  $r=1(t)$ ;  $y_1$  – pentru  $v_1=1(t)$ .

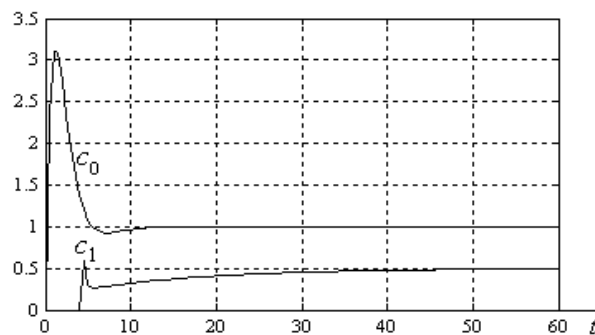


Fig. 11.17. Comenzile sistemului cu compensator dinamic strict propriu:  
 $c_0$  – pentru  $r=1(t)$ ;  $c_1$  – pentru  $v_1=1(t)$ .

♦ **Aplicația 11.4.** Considerăm un sistem de reglare după perturbație cu structura din fig. 11.1 și cu răspunsurile indiciale ale părții fixate din fig. 11.18 (determinate experimental). Să se proiecteze:

- compensatorul de tip static;
- compensatorul dinamic tipizat cu factorul de magnitudine  $M_0=2$ ;
- compensatorul dinamic tipizat redus  $C_1$ .

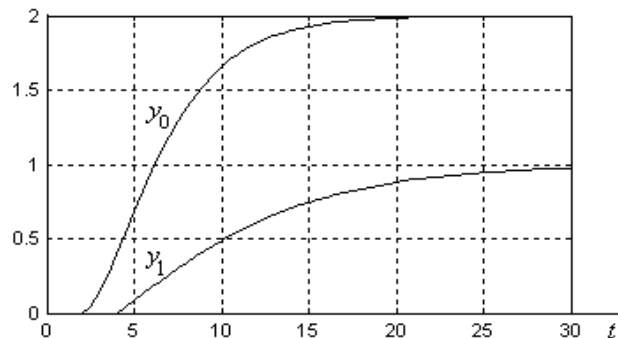


Fig. 11.18. Răspunsurile indiciale ale părții fixate:  
 $y_0$  – pentru  $c=1(t)$ ;  $y_1$  – pentru  $v_1=1(t)$ .

**Soluție.** a) Din fig. 11.18 reiese că partea fixată a sistemului de reglare are factorii statici de proporționalitate

$$K_{P_0} = \frac{(\Delta y_0)_{final}}{\Delta c} = \frac{2}{1} = 2, \quad K_{P_1} = \frac{(\Delta y_1)_{final}}{\Delta v_1} = \frac{1}{1} = 1.$$

Compensatorul static are ecuația  $c = K_0 r + K_1 m$ , unde

$$K_0 = \frac{1}{K_{P_0}} = \frac{1}{2}, \quad K_1 = \frac{-K_{P_1}}{K_{P_0}} = \frac{-1}{2}.$$

În fig. 11.19 este reprezentat răspunsul  $y(t)$  al sistemului de reglare la referință și perturbare treaptă unitară, în ipoteza că procesul are funcțiile de transfer

$$G_{P_0} = \frac{2e^{-2s}}{(2s+1)(3s+1)},$$

$$G_{P_1} = \frac{(2s+1)e^{-4s}}{(4s+1)(6s+1)},$$

cu răspunsurile indiciale din fig. 11.18. Deoarece canalul de execuție al procesului este mai rapid decât canalul perturbator (fig. 11.18), acțiunea de compensare a efectului perturbator cu regulator de tip static este mai puternică pe durata regimului tranzitoriu decât acțiunea directă a perturbației asupra mărimii reglate.

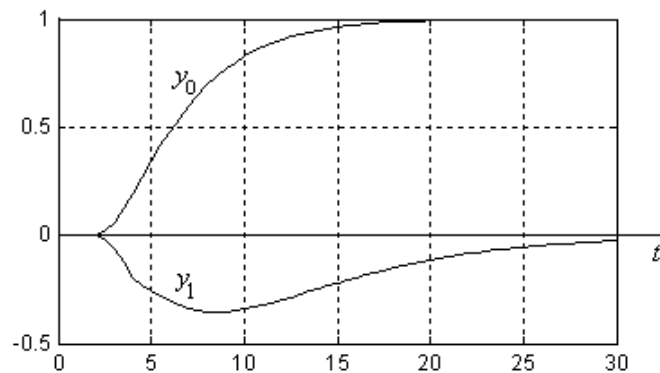


Fig. 11.19. Răspunsurile sistemului de reglare cu compensator static:  
 $y_0$  – pentru  $r=1(t)$ ;  $y_1$  – pentru  $v_1=1(t)$ .

b) Din răspunsurile indiciale ale părții fixate (fig. 2.18), rezultă:

$$K_{P_0} = 2, \quad \tau_0 = 2, \quad (T_{s95})_0 = 14, \quad T_0 \approx \frac{(T_{s95})_0 - \tau_0}{3} = 4,$$

$$K_{P_1} = 1, \quad \tau_1 = 4, \quad (T_{s95})_1 = 22, \quad T_1 \approx \frac{(T_{s95})_1 - \tau_1}{3} = 6.$$

În conformitate cu (19), funcțiile de transfer tipizate ale procesului sunt:

$$G_{P_0}(s) = \frac{K_{P_0} e^{-\tau_0 s}}{T_0 s + 1} = \frac{2e^{-2s}}{4s + 1}, \quad G_{P_1}(s) = \frac{K_{P_1} e^{-\tau_1 s}}{T_1 s + 1} = \frac{e^{-2s}}{6s + 1}.$$

Compensatorul are factorii de proporționalitate

$$K_0 = \frac{1}{K_{P_0}} = \frac{1}{2}, \quad K_1 = \frac{-K_{P_1}}{K_{P_0}} = \frac{-1}{2},$$

iar canalul  $C_1$  al compensatorului are timpul mort

$$\tau = \tau_1 - \tau_0 = 2.$$

Alegem constanta de filtrare

$$T_{f_0} = 2,$$

pentru a avea factorul de magnitudine  $M_0 = G_0(\infty)/G_0(0) = 2$ .

În conformitate cu (23) și (24), canalul  $C_0$  al compensatorului are funcția de transfer

$$G_0(s) = \frac{K_0(T_0 s + 1)}{T_{f_0} s + 1} = \frac{4s + 1}{2(2s + 1)}$$

(cu  $T_{f_0} = 2$  pentru a avea factorul de magnitudine  $M_0 = G_0(\infty)/G_0(0) = 2$ ), iar canalul  $C_1$  al compensatorului are funcția de transfer

$$G_1(s) = \frac{K_1(T_0 s + 1)e^{-\tau s}}{T_1 s + 1} = \frac{-(4s + 1)e^{-2s}}{2(6s + 1)}.$$

În fig. 11.20 și fig. 11.21 sunt reprezentate respectiv răspunsurile  $y(t)$  și  $c(t)$  ale sistemului de reglare la referință și perturbație treaptă unitară. Ambele răspunsuri din fig. 11.20 sunt mai bune decât cele din fig. 11.19 realizate cu compensatorul static.

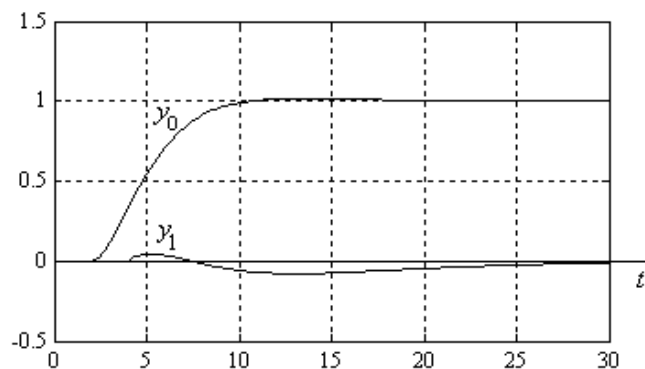


Fig. 11.20. Răspunsul sistemului de reglare cu compensator dinamic tipizat:  
 $y_0$  – pentru  $r=1(t)$ ;  $y_1$  – pentru  $v_1=1(t)$ .

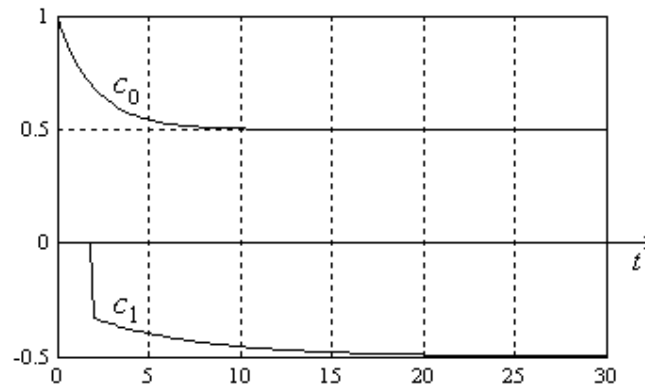


Fig. 11.21. Comenzile sistemului de reglare cu compensator dinamic tipizat:  
 $c_0$  – pentru  $r=1(t)$ ;  $c_1$  – pentru  $v_1=1(t)$ .

c) Deoarece  $(T_{tr})_1 > (T_{tr})_0$ , deci  $T_1 > T_0$ , canalul  $C_1$  al compensatorului are funcția de transfer redusă

$$\bar{G}_1(s) = \frac{K_1 e^{-\tau s}}{\bar{T}_1 s + 1},$$

unde

$$K_1 = -\frac{1}{2}, \quad \tau = \tau_1 - \tau_0 = 2, \quad \bar{T}_1 \approx T_1 - T_0 = 2.$$

Prin urmare,

$$\bar{G}_1(s) = \frac{-e^{-2s}}{2(2s+1)}.$$

Răspunsurile la perturbație treaptă ale sistemului de reglare cu compensator tipizat redus (fig. 11.22) sunt comparabile cu cele ale sistemului de reglare cu compensator tipizat clasic din fig. 11.20 și fig. 11.21.

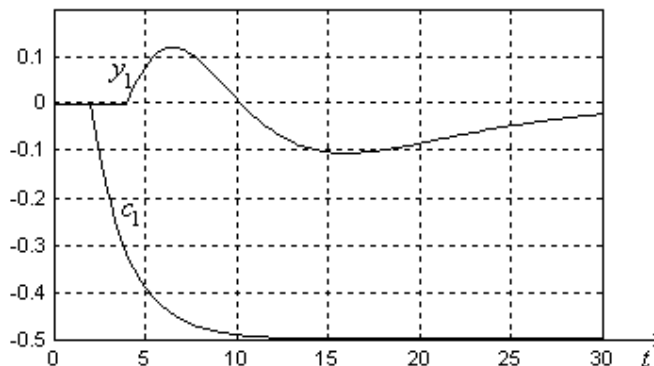


Fig. 11.22. Răspunsurile sistemului de reglare cu compensator tipizat redus pentru  $v_1=1(t)$ .

## 11.5. APLICAȚII DE AUTOCONTROL

◆ **C11.1.** La un SRA după perturbație cu structura din fig. 11.1, elementele părții fixate au funcțiile de transfer:

$$G_{P0} = \frac{2}{(s+1)(5s+1)(6s+1)}, \quad G_{P1} = \frac{-1}{3(2s+1)(4s+1)(6s+1)}.$$

Să se proiecteze:

- compensatorul de tip static;
- compensatorul dinamic dedicat simplu propriu cu factorul de magnitudine  $M_0 = 8$ ;
- un compensator de referință de tip dinamic dedicat strict propriu.

◆ **C11.2.** Considerăm un sistem de reglare după perturbație cu structura din fig. 11.1, unde partea fixată are funcțiile de transfer:

$$G_{P0} = \frac{2e^{-5s}}{(8s+1)(2s+1)}, \quad G_{P1} = \frac{-e^{-3s}}{4s+1}.$$

Să se proiecteze:

- compensatorul de tip static;
- compensatorul dinamic dedicat simplu propriu cu factorii de magnitudine  $M_0 = 4$  și  $M_1 = 8$ .

◆ **C11.3.** La un SRA după perturbație cu structura din fig. 11.1, elementele părții fixate au funcțiile de transfer:

$$G_{P0} = \frac{e^{-2s}}{(2s+1)(5s+1)(6s+1)}, \quad G_{P1} = \frac{1}{4(2s+1)(5s+1)}.$$

Să se proiecteze:

- compensatorul de tip static;
- compensatorul dinamic dedicat simplu propriu, cu factorii de magnitudine  $M_0 = 7,5$  și  $M_1 = 6$ .

◆ **C11.4.** La un SRA după perturbație cu structura din fig. 11.1, elementele părții fixate au funcțiile de transfer:

$$G_{P0} = \frac{2e^{-3s}}{(5s+1)(6s+1)}, \quad G_{P1} = \frac{e^{-6s}}{3(4s+1)(5s+1)(10s+1)}.$$

Să se proiecteze:

- compensatorul de tip static;
- compensatorul dinamic dedicat cu factorul de magnitudine  $M_0 = 5$ .

◆ **C11.5.** Considerăm un sistem de reglare după perturbație cu structura din fig. 11.23, unde partea fixată are răspunsurile indiciale din figura de mai jos. Să se proiecteze:

- compensatorul de tip static;
- compensatorul dinamic tipizat cu factorul de magnitudine  $M_0=2$ .

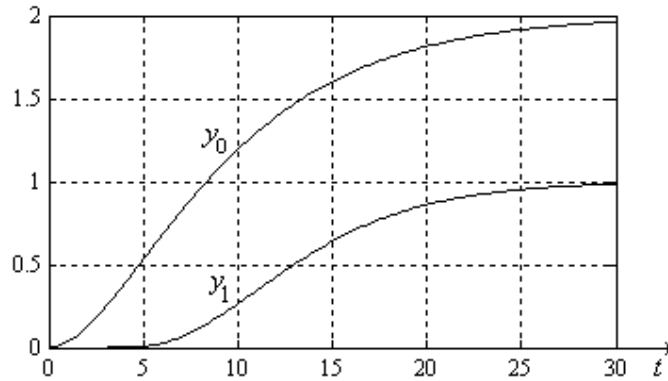


Fig. 11.23. Răspunsurile indiciale ale părții fixate:  
 $y_0$  – pentru  $c=1(t)$ ;  $y_1$  – pentru  $v_1=1(t)$ .





# 12

---

## SISTEME ȘI ALGORITMI DE REGLARE DUPĂ ABATERE

---

Conform *principiului reglării după abatere (efect)*, sistemul de reglare sesizează valoarea curentă a mărimii reglate (de ieșire a procesului), o compară cu valoarea curentă a mărimii de referință și, în urma procesării convenabile a erorii (abaterii, diferenței) rezultate, generează o comandă adecvată, transpusă în acțiune asupra procesului reglat, în vederea aducerii și menținerii mărimii reglate în jurul valorii de referință, indiferent de cauza care a provocat eroarea (acțiunea perturbațiilor asupra procesului și/sau modificarea mărimii de referință). Compararea directă a mărimii reglate cu mărimea de referință are sens atunci când ambele mărimi sunt exprimate procentual (prin raportare la domeniul de măsurare a mărimii reglate).

### 12.1. CARACTERISTICI ALE REGLĂRII DUPĂ ABATERE

La sistemele de reglare după abatere, apariția erorii *nu poate fi prevenită*, dar acțiunea de reducere și eliminare a acesteia începe în momentul producerii celei mai mici erori sesizabile, *indiferent de cauza* care a provocat eroarea.

Sistemele de reglare după abatere sunt sisteme cu structură *închisă*, deoarece elementul de comandă (*regulator*) primește informație referitoare la valoarea mărimii reglate, deci la efectul acțiunii sale asupra procesului reglat, generând comenzi de *autocorecție* necesare realizării unei reglări sigure și precise.

După cum mărimea reglată trebuie menținută constantă, modificată după un program dinainte cunoscut sau modificată după un program necunoscut (impus de forma de variație în timp a unei mărimi fizice exterioare), sistemele de reglare automată pot fi:

- de stabilizare (cu referința constantă);
- de reglare după program (cu referința variabilă după un program dat, dinainte cunoscut) ;
- de urmărire automată (cu referința arbitrar variabilă).

Omul, cel mai evoluat sistem cunoscut, utilizează în mod curent principiile reglării după abatere și perturbație. În plus, majoritatea proceselor interne specifice corpului viu se desfășoară în strânsă corelație cu aceste două principii.

În fig. 12.1 este prezentată schema practică a unui sistem monovariabil de reglare automată după abatere. Dispozitivul de reglare a procesului **P** este compus din traductorul **T**, regulatorul **R** (care include și elementul de comparație) și elementul de execuție **E**, care îndeplinesc respectiv funcțiile de *măsurare* (mai exact, de transformare, traducere), de *comandă* și de *execuție* (acționare).

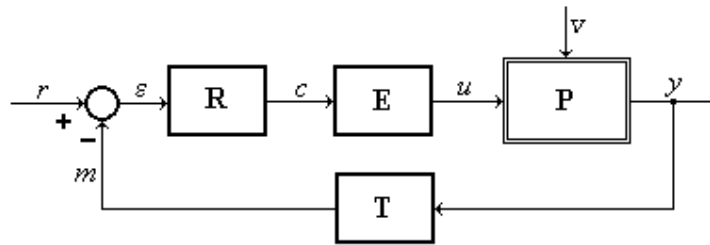


Fig. 12.1. Sistem de reglare automată după eroare.

## 12.2. ALGORITMUL DE REGLARE PID CONTINUU

Reglatoarele clasice (convenționale) generează comanda  $c$  prin prelucrarea erorii curente  $\varepsilon = r - m$  ( $r$  - semnal de referință sau “setpoint”,  $m$  - semnal de măsurare sau de reacție) după cunoscutul *algoritm de reglare PID* (de tip proporțional-integral-derivativ). În majoritatea cazurilor, algoritmul continuu PID este prezentat sub următoarea *formă improprie*

$$c = K_R \left( \varepsilon + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon dt + T_d \frac{d\varepsilon}{dt} \right) + c_0, \quad \varepsilon = r - m, \quad (1)$$

în care  $K_R$ ,  $T_i$  și  $T_d$  sunt parametri de acordare ( $K_R$  - factor de proporționalitate,  $T_i$  - constantă de timp integrală,  $T_d$  - constantă de timp derivativă), iar  $c_0$  este valoarea comenzii la momentul  $t=0$ , când sistemul de reglare se află în regim staționar, cu eroarea zero. Caracterul impropriu al algoritmului este dat de componenta derivativă, care are ordinul de derivare

a erorii (egal cu 1) mai mare decât ordinul de derivare a mărimii de comandă (egal cu 0).

Intre factorul de proporționalitate  $K_R$  (de regulă adimensional, deoarece mărimile de intrare și de ieșire ale regulatorului unificat sunt semnale de aceeași natură fizică și același domeniu de variație) și banda de proporționalitate  $B_p$  (cu care se operează uneori în practică) există relația  $K_R=100/B_p$ . In forma (1) a algoritmului de reglare, factorul de proporționalitate  $K_R$  influențează în mod egal toate cele trei componente ale comenzii. Prin modificarea de către operatorul tehnolog a factorului de proporționalitate  $K_R$  se poate obține o comandă mai puternică (mărind pe  $K_R$ ) sau mai slabă (micșorând pe  $K_R$ ), menținând însă ponderea relativă a celor trei componente P, I și D.

Regulatorul PID cu ecuația (1) are funcția de transfer improprie

$$G_{PID}(s) = K_R \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right). \quad (2)$$

Componenta proporțională **P**, componenta integrală (integratoare) **I** și componenta derivativă (derivatoare) **D** sunt proporționale respectiv cu eroarea, integrala erorii și derivata erorii (viteza de variație a erorii). In realizarea unei reglări performante, un rol important îl au intensitatea și distribuția comenzii pe cele trei componente, ambele cerințe putând fi realizate prin alegerea adecvată a parametrilor de acordare  $K_R$ , respectiv  $T_i$  și  $T_d$ . Valorile optime ale acestora sunt dependente de indicele de calitate ales și de caracteristicile dinamice ale procesului reglat.

Regulatorul poate funcționa în starea DIRECT ( $K_R < 0$ ) sau în starea INVERS ( $K_R > 0$ ). Din ecuația componentei proporționale,

$$c_P = K_R(r - m) + c_0, \quad (3)$$

rezultă că în cazul stării DIRECT, creșterea semnalului de măsurare  $m$  determină creșterea semnalului de comandă  $c_P$ . Pentru ca reglarea să se desfășoare corect, sensul DIRECT-INVERS al regulatorului trebuie să fie opus sensului DIRECT-INVERS al părții fixate (formate din ansamblul element de execuție-proces-traductor); cu alte cuvinte, sensul în bucla de reglare să fie INVERS ( $K_R K_E K_P K_T > 0$ ).

*Componenta proporțională* este componenta principală a comenzii. Ea generează un efect care se opune în egală măsură creșterii și scăderii erorii, cu atât mai puternic cu cât factorul de proporționalitate  $K_R$  este mai mare.

La procesele de tip proporțional, componenta proporțională a regulatorului contribuie la reducerea erorii, fără a reuși însă s-o elimine în totalitate la sfârșitul regimului tranzitoriu (deoarece, la eroare nulă, componenta proporțională revine mereu la aceeași valoare, anume valoarea zero). Gradul de reducere a erorii este însă cu atât mai mare cu cât factorul de proporționalitate  $K_R$  este mai mare.

La sistemele de reglare a parametrilor industriali clasici (debit, presiune, nivel, temperatură etc.), unde ordinul procesului și gradul de inerție sunt relativ mari (ca urmare a transferului de masă și energie), mărirea factorul de proporționalitate  $K_R$  determină apariția oscilațiilor în sistem. Prin urmare,  $K_R$  nu poate fi ales suficient de mare pentru ca eroarea staționară să devină neglijabilă. În schimb, la aparatele generatoare de semnal unificat continuu în gama 4...20 mA (care au o structură închisă, cu reacție negativă în raport cu semnalul unificat generat), factorul de proporționalitate al "regulatorului" (de tip amplificator de tensiune) are valoarea de ordinul miilor, fără a genera oscilații (deoarece "procesul", reprezentat de circuitul rezistiv de ieșire al adaptorului, are un răspuns practic instantaneu, fără inerție). Deși regulatorul este de tip P, semnalul generat de adaptor este dependent numai de mărimea de intrare (cu rol de referință), nefiind influențat de valoarea rezistenței de sarcină, deci de numărul receptoarelor înseriate.

*Componenta integrală* are *caracter persistent*, în sensul că nu-și încetează acțiunea de modificare a comenzii decât atunci când eroarea devine zero. În consecință, rolul principal al componentei integrale este acela de anulare a erorii, componenta integrală fiind deci complementară componentei proporționale. Spre deosebire de componenta proporțională, componenta integrală acționează întotdeauna în sensul reducerii valorii absolute a erorii. Acțiunea componentei integrale este lină, fără variații

bruște, dar cu atât mai intensă, cu cât constanta de timp integrală  $T_i$  este mai mică și eroarea mai mare.

*Componenta derivativă are caracter anticipativ*, deoarece este proporțională cu viteza de variație a erorii  $\frac{d\varepsilon}{dt}$ , al cărei semn și valoare la un anumit moment de timp anticipă evoluția ulterioară a erorii (care va rămâne constantă, va crește sau va scădea după cum viteza este respectiv nulă, pozitivă sau negativă). Componenta derivativă se opune atât creșterii cât și scăderii erorii (ca și componenta proporțională), cu atât mai mult cu cât constanta de timp derivativă  $T_d$  este mai mare. În general, prin introducerea unei componente derivate cu ponderea adecvată se poate îmbunătăți calitatea operației de reglare, cu excepția situațiilor în care semnalul de măsurare conține zgomot relativ mare.

Datorită componentei derivate, regulatorul PID descris prin ecuația (1) este un element impropriu, deoarece răspunsul componentei derivate la intrarea  $\varepsilon(t) = 1(t)$  este de tip impuls Dirac:

$$c_D(t) = K_R T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt} = K_R T_d \delta_0(t).$$

În realitate, componenta derivativă are o constantă de timp de întârziere (filtrare)  $T_1$ , iar algoritmul PID are forma simplă proprie

$$\begin{cases} T_1 \frac{dc_D}{dt} + c_D = T_d \frac{d\varepsilon}{dt} \\ c = K_R \left( \varepsilon + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon dt + c_D \right) + c_0 \end{cases}, \quad (4)$$

cu funcția de transfer

$$G_{PID}(s) = K_R \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{T_1 s + 1} \right). \quad (5)$$

La o variație treaptă unitară a erorii, componenta derivativă (cu  $K_R = 1$ ) are expresia

$$c_D(t) = k_d e^{-t/T_1}, \quad t \geq 0, \quad (6)$$

unde  $k_d = T_d / T_1$  reprezintă valoarea inițială (la momentul  $t=0_+$ ) a componentei derivate. Așadar, la momentul  $t=0$ , componenta derivativă

crește brusc de la valoarea zero la o valoare de  $k_d$  ori mai mare decât cea a componentei proporționale, adică

$$c_D(0_+) = k_d = \frac{T_d}{T_1}, \quad (7)$$

după care descrește exponențial și se anulează. În aplicațiile practice, factorul  $k_d$  trebuie limitat la o valoare mai mică decât 20 (pentru a se evita amplificarea excesivă a zgomotului din semnalul de măsurare și uzura instalației comandate). Timpul de stabilizare a componentei derivate,

$$T_{s95} \approx 3T_1, \quad (8)$$

este dat de momentul când exponențiala  $e^{-t/T_1}$  (cu valoarea inițială 1) atinge valoarea  $e^{-3} \approx 0.05$ .

În proiectare, prin fixarea constantei de timp de întârziere  $T_1$  la o valoare constantă (de exemplu, o secundă), prin mărirea constantei de timp derivate  $T_d$  crește valoarea inițială  $c_D(0_+) = T_d/T_1$  a componentei derivate la intrare treaptă unitară, dar nu și timpul de stabilizare  $T_{s95} \approx 3T_1$  (fig. 12.2).

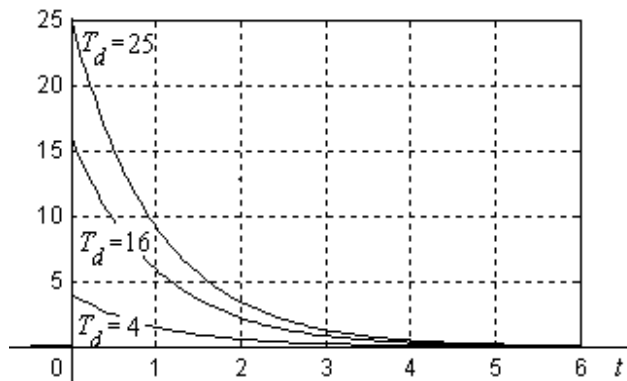


Fig. 12.2. Răspunsul la eroare treaptă unitară a componentei derivate  $c_D(t)$  în cazul  $T_1 = 1$ .

În cazul menținerii constante a raportului  $k_d = T_d/T_1$  (adică a setării automate a constantei de timp de întârziere  $T_1$  la valoarea  $T_d/k_d$ ), prin mărirea constantei de timp derivate  $T_d$  se menține constantă valoarea

inițială  $c_D(0_+) = k_d$  a componentei derivate la intrare treaptă unitară, dar crește timpul de stabilizare  $T_{s95} \approx 3T_d / k_d$  (fig. 12.3).

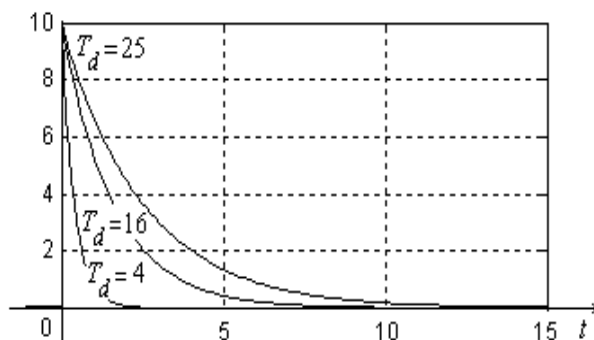


Fig. 12.3. Răspunsul la eroare treaptă unitară a componentei derivate  $c_D(t)$  în cazul  $k_d = 10$ , deci  $T_1 = T_d / 10$ .

În afara acestor două variante extreme, există variante intermediare, la care mărirea constantei de timp derivate  $T_d$  implică creșterea atât a valorii inițiale cât și a timpului de stabilizare a componentei derivate  $c_D(t)$ . De exemplu, pentru  $T_1 = \sqrt{T_d} / 3$  (ambele constante de timp fiind exprimate în secunde), componenta derivativă la intrare treaptă unitară (fig. 12.4) are valoarea inițială

$$c_D(0_+) = k_d = 3\sqrt{T_d}$$

și timpul de stabilizare

$$T_{s95} \approx 3T_1 = \sqrt{T_d}.$$

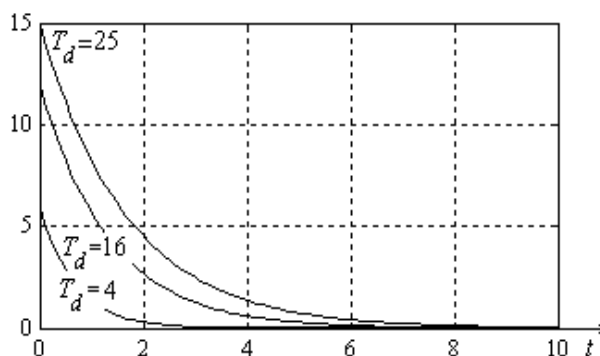


Fig. 12.4. Răspunsul la eroare treaptă unitară a componentei derivate  $c_D(t)$  în cazul  $T_1 = \sqrt{T_d} / 3$ .



Răspunsul indicial al regulatorului PID cu funcția de transfer (5),

$$c(t) = K_R \left( 1 + \frac{t}{T_i} + \frac{T_d}{T_1} e^{-t/T_1} \right), \quad (9)$$

este reprezentat grafic în fig. 12.5.

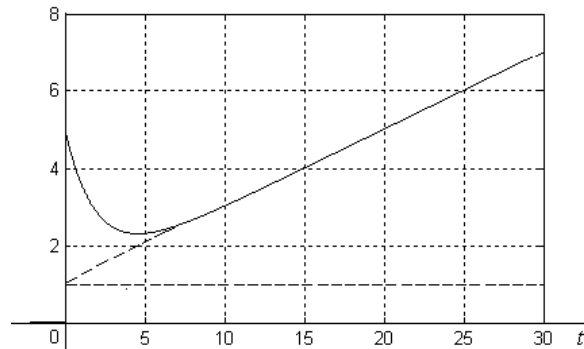


Fig. 12.5. Răspunsul indicial  $c(t)$  al regulatorului PID pentru  $K_R=1$ ,  $T_i=5$ ,  $T_d=8$  și  $T_1=2$ .

La majoritatea reguletoarelor industriale, algoritmul de reglare are *două grade de libertate*, modul de procesare a semnalului de referință  $r$  fiind ușor diferit de modul de procesare a semnalului de măsurare  $m$ :

$$\begin{cases} T_1 \frac{dc_D}{dt} + c_D = -T_d \frac{dm}{dt} \\ c = K_R \left( \varepsilon + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon dt + c_D \right) + c_0 \end{cases} \quad (10)$$

La aceste reguletoare, acțiunea componentei derivate are loc numai în raport cu semnalul de măsurare  $m$ , nu și cu semnalul de referință  $r$ . În acest fel se evită variațiile puternice ale semnalului de comandă la modificarea bruscă (treaptă) a semnalului de referință de către operatorul uman. În același scop, se poate utiliza un filtru de întârziere a semnalului de referință, cu funcția de transfer

$$G_F(s) = \frac{1}{T_F s + 1}. \quad (11)$$

Constanta de timp de filtrare  $T_F$  poate fi determinată cu formula

$$T_F = \frac{T_{s95}}{10}, \quad (12)$$

unde  $T_{s95}$  este timpul de stabilizare a răspunsului la referință treaptă al sistemului de reglare cu  $T_F = 0$ .

### 12.3. ALGORITMUL DE REGLARE PID NUMERIC

La *reglatoarele numerice*, algoritmul de reglare **PI** are forma

$$\begin{cases} I_k = I_{k-1} + \frac{T}{T_i} \varepsilon_k \\ c_k = K_R(\varepsilon_k + I_k) + c_0 \end{cases}, \quad (13)$$

echivalentă cu

$$c_k = c_{k-1} + K_R[(\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}) + \frac{T}{T_i} \varepsilon_k], \quad (14)$$

unde  $\varepsilon_k = r_k - m_k$ ,  $T$  reprezintă perioada de discretizare a timpului (de eșantionare), iar  $c_0$  este valoarea comenzii din regimul MANUAL în momentul dinaintea comutării regulatorului în regim AUTOMAT. Regulatorul cu ecuațiile cu diferențe (13) și (14) are funcția de transfer

$$G_{PI}^0(z) = K_R \left( 1 + \frac{T}{T_i} \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} \right),$$

echivalentă funcției de transfer a discretizatului regulatorului continuu de tip PI cu funcția de transfer

$$G_{PI}(s) = K_R \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right).$$

Discretizatului regulatorului continuu **PID** cu funcția de transfer (5) are funcția de transfer

$$G_{PID}^0(z) = K_R \left( 1 + \frac{T}{T_i} \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} + k_d \cdot \frac{1-z^{-1}}{1-p_d z^{-1}} \right), \quad (15)$$

unde

$$k_d = T_d/T_1, \quad p_d = e^{-T/T_1}. \quad (16)$$

Prin urmare, algoritmul de reglare numeric PID poate fi scris în domeniul timpului sub forma

$$\begin{cases} D_k = p_d D_{k-1} + K_R k_d (\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}), \\ (PI)_k = (PI)_{k-1} + K_R [(\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}) + \frac{T}{T_i} \varepsilon_k] . \\ c_k = (PI)_k + D_k + c_0 \end{cases} \quad (17)$$

Ca și în cazul algoritmului de reglare (14), modificarea în timpul regimului AUTOMAT a unui parametru de acordare se realizează „fără șoc”, adică fără a produce o variație bruscă semnificativă a semnalului de comandă, indiferent de valoarea curentă a erorii.

Pentru ca și operația de comutare a regimului MANUAL în regim AUTOMAT să se realizeze fără șoc, aceasta trebuie precedată de o operație de inițializare convenabilă a variabilelor algoritmului de reglare. Operația de inițializare constă în fixarea variabilei  $\varepsilon_{k-1}$  la valoarea curentă a erorii, a variabilelor  $D_{k-1}$  și  $(PI)_{k-1}$  la valoarea zero, iar a variabilei  $c_0$  la valoarea curentă a comenzii. În aceste condiții, prima valoare a comenzii generate pe AUTOMAT (la pasul  $k = 1$ ) va avea valoarea

$$c_1 = K_R \frac{T}{T_i} \cdot \varepsilon_1 + c_0 \approx c_0.$$

Dacă eroarea curentă  $\varepsilon_1$  este nenulă, componenta integrală va interveni în sensul reducerii și eliminării erorii, în timp ce componentele proporțională și derivativă se vor opune reducerii erorii.

Dacă variabila  $\varepsilon_{k-1}$  este inițializată la valoarea zero, atunci

$$c_1 = K_R \left(1 + \frac{T}{T_i} + \frac{T_d}{T_1}\right) \varepsilon_1 + c_0,$$

iar toate cele trei componente ale comenzii acționează din primul moment pentru reducerea și eliminarea erorii ca în cazul în care referința s-ar fi modificat brusc, în regim AUTOMAT, de la valoarea zero la valoarea curentă  $\varepsilon_1$ .

Pe durata primului interval de eșantionare care urmează unei modificări treaptă a referinței, deci a erorii, componenta derivativă este de  $k_d$  ori mai mare decât componenta proporțională.

Algoritmul de reglare cu două grade de libertate (la care componenta derivativă operează numai asupra semnalului de măsurare) are forma

$$\begin{cases} D_k = p_d D_{k-1} - K_R k_d (m_k - m_{k-1}) \\ (PI)_k = (PI)_{k-1} + K_R [(\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}) + \frac{T}{T_i} \varepsilon_k] \\ c_k = (PI)_k + D_k + c_0 \end{cases} \quad (18)$$

#### 12.4. ACORDAREA EXPERIMENTALĂ A REGULATORULUI PID

În cazul reglării unui proces fizic de tip proporțional, de ordinul doi sau mai mare, regulatorul este considerat acceptabil proiectat dacă timpul de răspuns al sistemului de reglare la referință treaptă este comparabil cu timpul de răspuns al procesului la intrare treaptă. În acest caz, regulatorul se comportă ca un operator uman experimentat care modifică treaptă mărimea de intrare a procesului pentru a aduce mărimea de ieșire a acestuia la o nouă valoare a priori stabilită. Calitatea proiectării regulatorului poate fi considerată foarte bună atunci când timpul de răspuns al sistemului de reglare este redus la jumătate sau mai mult. În acest paragraf vom considera procesul ca fiind echivalent cu partea fixată, incluzând deci elementul de execuție și traductorul mărimii reglate (fig. 12.6).

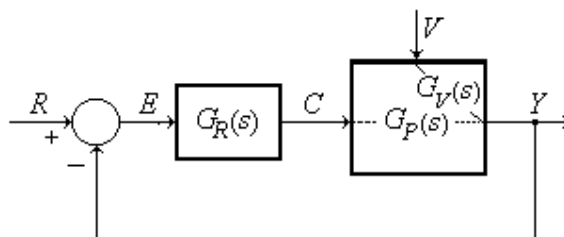


Fig. 12.6. Sistem de reglare automată – schemă simplificată.

*Eroarea staționară* produsă prin aplicarea unui semnal treaptă la intrare (referință sau perturbație) este nulă atunci când sistemul deschis, cu funcția de transfer  $G_d(s) = G_R(s)G_P(s)$  este de tip integral. Prin urmare, dacă procesul este de tip proporțional, este necesar ca regulatorul să fie de tip integral, adică să conțină și o componentă integrală (cazul regulatorului de tip PI sau PID). Pentru ca eroarea staționară să fie nulă la intrare rampă trebuie ca funcția de transfer a sistemului deschis să aibă caracter dublu integral. Această condiție se impune în cazul proceselor de tip integral (cazul

reglării nivelului), la care efectul perturbațiilor asupra mărimii reglate este, de obicei, de tip rampă. Prin utilizarea unui regulator de tip PI (cu componentă integrală foarte slabă pentru a preveni instalarea regimului oscilant), sistemul deschis devine dublu integral.

*Acordarea experimentală* a regulatorului PID la *procesele de tip proporțional* se poate face pe baza răspunsului  $y(t)$  al părții fixate, aflate inițial în regim staționar, la un semnal de intrare  $c(t)$  de tip treaptă (prin modificarea manuală a semnalului de comandă al regulatorului aflat în regim MANUAL). La procesele cu răspuns indicial mărginit și monoton (fără supradepășire), din graficul răspunsului indicial (fig. 12.7) putem determina ușor factorul de proporționalitate al procesului  $K_p$ , timpul de stabilizare  $T_{s95}$  (dat de momentul în care răspunsul atinge 95 % din valoarea finală) și timpul mort  $\tau$ .

Factorul de proporționalitate adimensional al procesului este definit ca raportul între variația totală (finală) a ieșirii procesului  $(\Delta y)_{final}$  și variația totală a comenzii treaptă  $(\Delta c)_{final}$ , ambele exprimate în procente, adică

$$K_p = \frac{(\Delta y)_{final} [\%]}{(\Delta c)_{final} [\%]} \quad (19)$$

În majoritatea aplicațiilor industriale, factorul de proporționalitate  $K_p$  are valoarea cuprinsă între 1 și 2 (prin alegerea dimensională adecvată a elementului de execuție, care să permită modificarea ieșirii procesului în plaja 0...100 %).

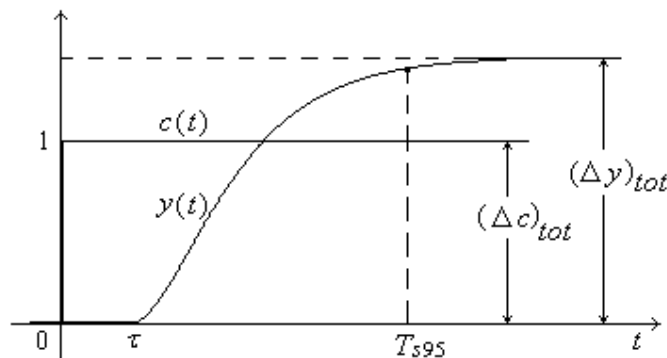


Fig. 12.7. Răspunsul  $y$  al părții fixate la modificarea treaptă a intrării  $c$ .

In cazul *proceselor stabile de tip proporțional cu răspuns indicial fără supradepășire*, pentru stabilirea valorilor inițiale ale parametrilor regulatorului sunt recomandate relațiile:

$$K_R = \frac{1}{K_P(1 + \frac{5\tau}{T_{s95}})}, \quad T_i = \frac{T_{s95}}{3 \dots 4}, \quad T_d = 0. \quad (20)$$

Aceste relații de acordare pot fi aplicate și la procesele cu răspuns indicial  $h(t)$  cu supradepășire (fig. 12.8), prin înlocuirea procesului  $\mathbf{P}$  cu procesul  $\bar{\mathbf{P}}$  având răspunsul indicial  $\bar{h}(t)$  astfel încât  $\bar{h}(t) = h(t)$  pentru  $t \leq t_1$  și  $\bar{h}(t) = h(t_1)$  pentru  $t \geq t_1$ , unde  $t_1$  este momentul de timp la care răspunsul are valoarea maximă. La aceste procese,  $(\Delta y)_{final} = y_{max}$  și  $T_{s95} \approx t_1$

De asemenea, relațiile de acordare (20) pot fi aplicate și la procesele de fază neminimă, cu răspunsul indicial  $h(t)$  având semn opus semnelui valorii finale pe intervalul  $[0, t_0]$ . La aceste procese, se consideră  $\tau = t_0$ .

Valorile parametrilor de acordare ai regulatorului, inclusiv constanta de timp derivativă  $T_d$ , pot fi ajustate convenabil pe durata operației de reglare, pentru a se obține performanțe superioare.

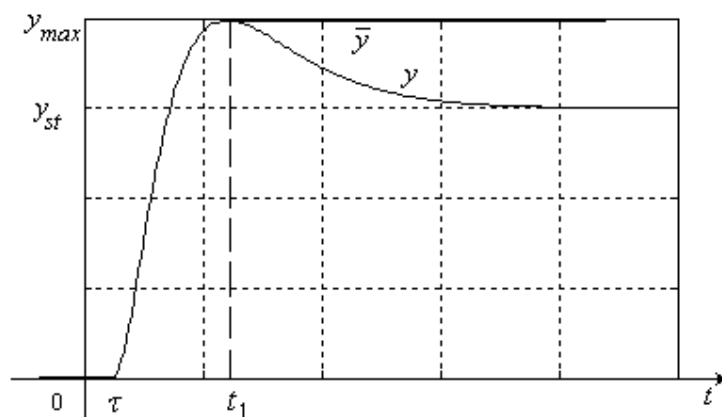


Fig. 12.8. Răspunsul părții fixate la modificarea treaptă a intrării  $c$ .

In cazul *proceselor de tip integral*, acordarea experimentală a regulatorului PI se poate face după cum urmează. Cu regulatorul de tip P (cu  $T_i = \infty$  și  $T_d = 0$ ), se alege factorul de proporționalitate  $K_R$  la o valoare pentru care răspunsul sistemului de reglare la referință treaptă este monoton

și mărginit. Se mărește apoi treptat  $K_R$  până la valoarea  $K_{R0}$  la care, pentru o variație treaptă a referinței, răspunsul sistemului prezintă un suprareglaj mic, de circa 1...2 %. Dacă se notează cu  $(T_{s95})_0$  timpul de stabilizare, parametrii de acordare ai regulatorului PID pot fi determinați cu relațiile:

$$K_R = (0,8 \dots 0,9)K_{R0}, \quad T_i = (3 \dots 5)(T_{s95})_0, \quad T_d = 0. \quad (21)$$

Deși foarte slabă, componenta integrală a regulatorului asigură o eroare staționară nulă și în cazul frecvent întâlnit în practică al perturbațiilor cu efect de tip rampă asupra mărimii reglate (cazul reglării nivelului).

## 12.5. SISTEME SPECIALE DE REGLARE CU REGULATOR DE TIP P

Un caz special de sistem de reglare este acela în care procesul (partea fixată) este de ordin redus (unu sau doi), deci prezintă un grad de inerție foarte mic. Reglarea acestor procese se face, de regulă, cu regulatoare simple de tip proporțional (P), având însă factorul de proporționalitate  $K_R$  mare, de ordinul zecilor, sutelor sau chiar miilor. Valoarea ridicată a lui  $K_R$  asigură performanțe de reglare foarte bune, inclusiv eroare staționară neglijabilă. Reamintim că în cazul sistemelor de reglare la care procesul are factorul de proporționalitate  $K_P \approx 1$ , eroarea staționară la referință treaptă unitară este dată de relația

$$\varepsilon_{st} = \frac{1}{1 + K_R K_P} \approx \frac{1}{1 + K_R}. \quad (22)$$

Prin urmare, pentru  $K_R = 99$ , eroarea staționară la referință treaptă unitară este 0,01. Deoarece, în practică, referința nu trebuie modificată brusc cu mai mult de 10%, eroarea staționară este de 0,1% din domeniul de variație al semnalului unificat, adică practic nulă. Ea va fi și mai mică pentru valori ale lui  $K_R$  de ordinul sutelor sau miilor.

Metoda de reglare cu regulator de tip P și factor de proporționalitate  $K_R$  mare nu poate fi însă aplicată în cazul parametrilor industriali clasici (debit, nivel, presiune, temperatură, densitate, viscozitate etc.), unde inerția

și ordinul procesului au valori relativ mari, ca urmare a transferului important de masă și energie. La reglarea acestor procese, mărirea factorului de proporționalitate  $K_R$  al regulatorului la valori mai mari ca 1 generează, de regulă, un regim oscilant, chiar instabil pentru valori mai mari ale lui  $K_R$ .

Pentru a scoate în evidență aria de aplicabilitate a metodei de reglare cu regulator de tip P, facem următoarea precizare: în cadrul unui sistem de reglare analogic, cu excepția traductorului primar (senzor, detector, element sensibil), toate celelalte elemente din componența dispozitivului de reglare (adaptorul generator de semnal unificat, aparatul indicator sau înregistrator al mărimii reglate, regulatorul, convertorul electro-pneumatic și elementul de execuție cu acționare pneumatică) au, de regulă, structura unui sistem de reglare după abatere (cu legătură de reacție negativă), justificată prin rolul acestor elemente de a transforma semnalul de intrare într-un semnal de ieșire mai convenabil din anumite puncte de vedere și care să fie insensibil la acțiunea factorilor perturbatori. În consecință, elementele menționate sunt proiectate ca subsisteme cu structură închisă (de tip SRA), semnalul de intrare având rol de “referință”, iar semnalul de ieșire de “mărime reglată”. De exemplu, în cazul adaptorului generator de semnal unificat 4...20mA, variația rezistenței de sarcină la modificarea numărului de elemente receptoare înseriate reprezintă o perturbație extrem de puternică, al cărei efect este practic în totalitate eliminat prin utilizarea ca “regulator” a unui amplificator de tensiune cu factorul de amplificare de ordinul miilor. Aparatele analogice indicatoare/înregistratoare au pe calea directă un amplificator electronic de tensiune cu factorul de amplificare de ordinul sutelor, iar ansamblul convertor-servomotor pneumatic are pe calea directă un amplificator pneumatic cu factorul de amplificare de ordinul zecilor. La reglatoarele analogice cu circuite integrate, fiecare componentă a algoritmului PID este un subsistem închis cu reacție negativă având pe calea directă un amplificator operațional cu factorul de amplificare  $K_R > 10^5$ .

La sistemele de reglare cu regulator de tip P, factorul de proporționalitate  $K_R$  al regulatorului se alege cât mai mare posibil, fără a produce însă oscilații în sistem.



În figurile 12.9 și 12.10 sunt reprezentate respectiv formele de variație ale mărimii reglate și semnalului de comandă la referință treaptă unitară în cazul unui sistem de reglare având partea fixată cu funcția de transfer

$$G_P(s) = \frac{1}{(2s+1)(0.01s+1)}$$

și regulatorul de tip P cu  $K_R = 10$  și  $K_R = 100$ .

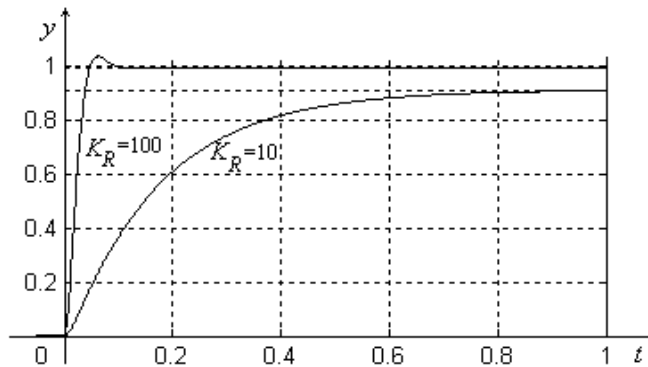


Fig. 12.9. Variația mărimii reglate  $y(t)$  la referință treaptă unitară.

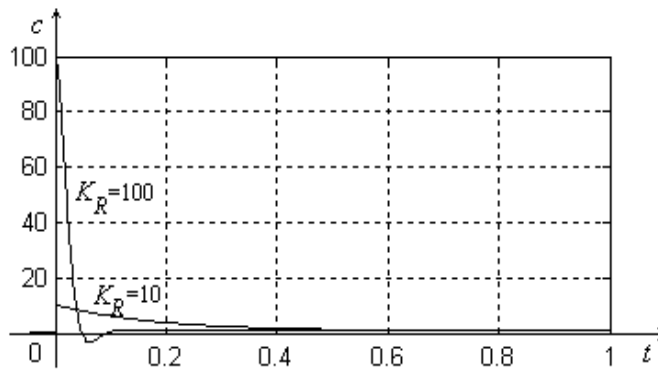


Fig. 12.10. Variația semnalului de comandă  $c(t)$  la referință treaptă unitară.

## 12.6. SISTEME DE REGLARE BIPOZIȚIONALĂ

Într-un sistem de reglare bipozițională, semnalul de comandă generat de regulator în urma procesării abaterii are două valori distincte, notate convențional cu 0 și 1. Caracteristica statică a regulatorului bipozițional este de tip releu cu histerezis, valoarea histerezisului fiind  $2a$  în cazul caracteristicii din fig. 12.11. Semnalul de comandă  $c$  comută din 0 în 1

când eroarea  $\varepsilon$  crește atingând valoarea  $a$ , respectiv din 1 în 0 când eroarea  $\varepsilon$  scade atingând valoarea  $-a$ .

Mărimea reglată a unui sistem bipozițional oscilează (nesinusoidal) în jurul valorii de referință, amplitudinea oscilațiilor fiind egală sau mai mare decât valoarea semihisterezisului  $a$ . Când partea fixată a sistemului de reglare este de ordinul unu (fără inerție), amplitudinea oscilațiilor este egală cu  $a$ . Când partea fixată este de ordinul doi sau mai mare, amplitudinea oscilațiilor depășește valoarea semihisterezisului  $a$ , cu atât mai mult cu cât inerția procesului este mai mare.

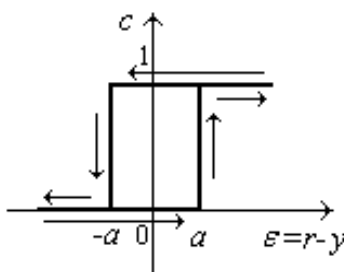


Fig. 12.11. Caracteristica statică a regulatorului bipozițional.

În figurile 12.12, 12.13 și 12.14 sunt reprezentate răspunsurile la referință treaptă unitară ale sistemului de reglare bipozițională a unui proces cu inerție, în condițiile utilizării unui regulator cu valoarea semihisterezisului  $a$  respectiv pozitivă, nulă și negativă. În toate cazurile, comanda  $c$  comută din 1 în 0 în momentele când mărimea reglată  $y$  crește și atinge valoarea  $r + a$ , iar din 0 în 1 - în momentele când mărimea reglată scade la valoarea  $r - a$ .

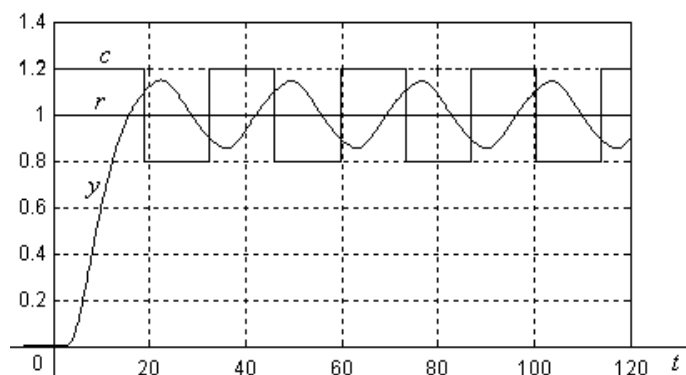


Fig. 12.12. Răspunsurile indiciale  $y$  și  $c$  ale unui sistem de reglare bipozițional cu  $a = 0,1$ .

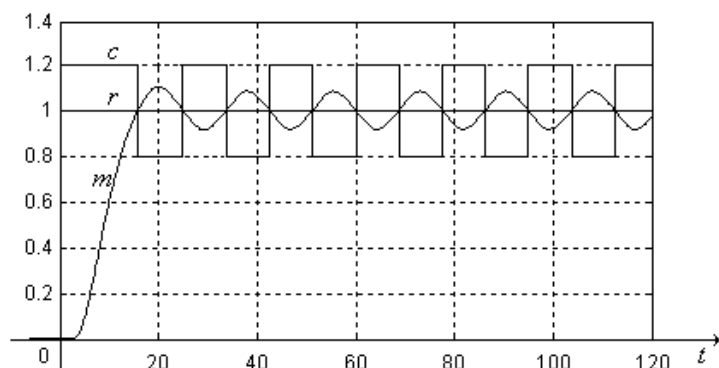


Fig. 12.13. Răspunsurile indiciale  $y$  și  $c$  ale unui sistem de reglare bipozițional cu  $a = 0$ .

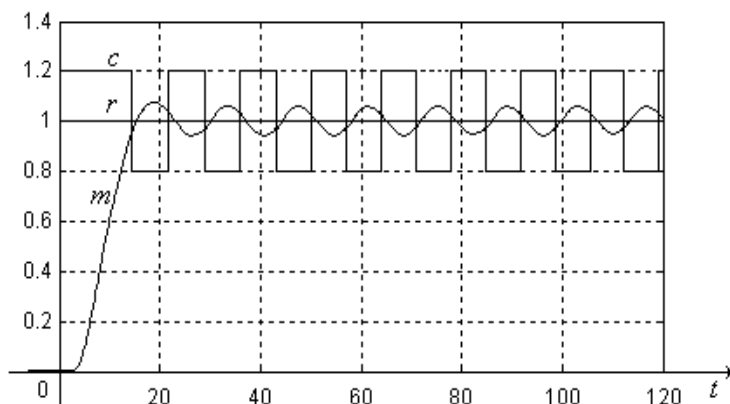


Fig. 12.14. Răspunsurile indiciale  $y$  și  $c$  ale unui sistem de reglare bipozițional cu  $a = -0,04$ .

Prin scăderea valorii histerezisului regulatorului, amplitudinea oscilațiilor mărimii reglate scade, iar frecvența de comutare a comenzii crește. În practică, există multe exemple în care se utilizează regulatoare bipoziționale cu histerezis relativ mare pentru a avea o frecvență mică de comutare a comenzii (cazul reglării bipoziționale a temperaturii în interiorul unui frigider, la care operațiile de pornire-oprire a agregatului frigorific sunt generatoare de uzură mecanică și electrică). Variantele de reglare cu histerezis zero sau negativ nu sunt aplicabile la procesele cu inerție neglijabilă.

În locul variantei cu histerezis negativ se poate utiliza o variantă cu efect similar, la care regulatorul bipozițional (cu histerezis foarte mic sau zero) conține pe intrarea de reacție un element de avans de ordinul unu (fig. 12.15) cu funcția de transfer

$$G_0(s) = \frac{T_d s + 1}{T_0 s + 1}, \quad T_0 \ll T_d. \quad (23)$$

Pentru o valoare fixată a constantei de timp de întârziere  $T_0$  (suficient de mică pentru a nu întârzia transmiterea informației de măsurare la regulator), valoarea avansului semnalului de avans  $y_1$  în raport cu semnalul de măsurare  $y$  este cu atât mai mare cu cât constanta de timp de avans  $T_d$  este mai mare.

Pentru histerezis zero, comutarea comenzii regulatorului are loc în momentul în care semnalul de avans  $y_1$  atinge valoarea mărimii de referință (fig. 12.16). Deoarece semnalul  $y_1$  este defazat înaintea semnalului  $y$ , comutarea comenzii se efectuează *în avans*, adică înainte ca semnalul de măsurare să atingă valoarea mărimii de referință.

La reglatoarele cu histerezis negativ și la cele cu element de avans pe calea de reacție, histerezisul și avansul trebuie limitate ca valoare pentru ca oscilațiile să aibă loc în jurul mărimii de referință.

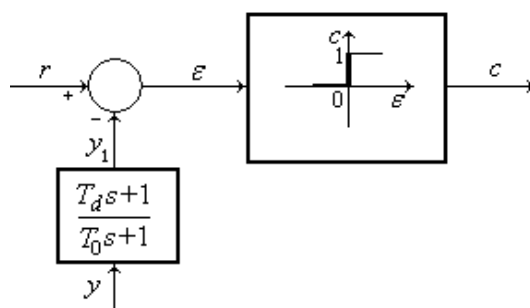


Fig. 12.15. Regulator bipozitional cu element de avans pe intrarea de reacție.

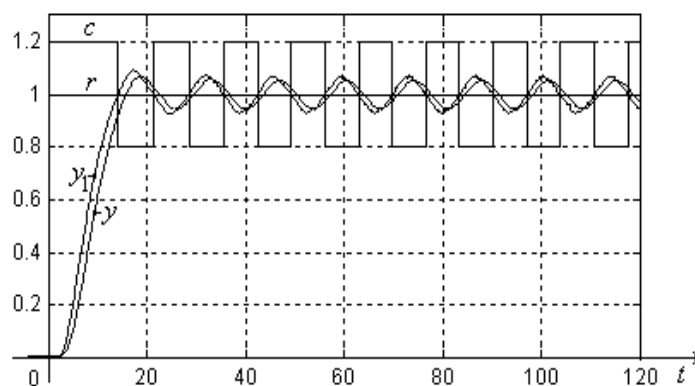


Fig. 12.16. Răspunsurile indiciale  $y$  și  $c$  ale unui sistem de reglare bipozitional cu element de avans pe calea de reacție.

**Observație.** Algoritmii de comandă bipoziționali sunt utilizați atunci când elementul de execuție are numai două stări distincte de funcționare (robinet închis-deschis, contact electric închis-deschis, agregat frigorific sau de încălzire pornit-oprit etc.), mai ales în cazul proceselor cu histerezis relativ mare, la care eficiența algoritmilor continui este redusă. În aceste ultime cazuri pot fi totuși utilizate și regulatoare continue (tip PID, de exemplu), conectate în paralel cu un generator de semnal periodic dreptunghiular cu valoarea medie nulă, având amplitudinea comparabilă cu valoarea histerezisului procesului și perioada comparabilă cu timpul de stabilizare al răspunsului indicial al procesului.

## 12.7. ALGORITMI DE REGLARE CU PREDICȚIE

Algoritmii de reglare cu predicție au fost descoperiți, cercetați și implementați pentru prima oară în reglarea unor procese industriale din rafinării și centrale de producere a energiei electrice, la sfârșitul anilor 1970, odată cu dezvoltarea tehnicii și mijloacelor moderne de calcul numeric. Metodologia reglării predictive presupune efectuarea, la fiecare moment de eșantionare, a unui număr relativ mare de calcule pentru determinarea comenzii optime, care va fi menținută constantă până la următorul moment de eșantionare. Conceptul de reglare cu predicție (predictivă) are la bază cunoașterea cât mai exactă a modelului dinamic al procesului reglat (mai exact al părții fixate **P**, formată din ansamblul element de execuție-proces-traductor - fig. 12.17) și a restricțiilor impuse mărimii de comandă și mărimii reglate.

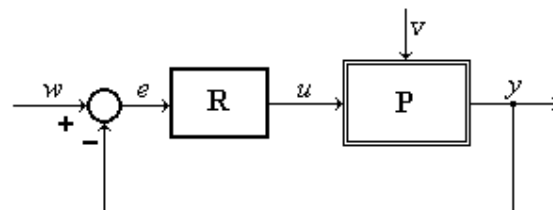


Fig. 12.17. Schema bloc a sistemului de reglare

Performanțele reglării sunt superioare atunci când se cunoaște apriori modul de evoluție în timp a mărimii de referință și a unor mărimi perturbatoare. Dacă traiectoriile de evoluție a referinței și perturbațiilor nu sunt cunoscute apriori, atunci se consideră că acestea se mențin în continuare

constante, la valorile curente. Principalele dezavantaje sunt legate de complexitatea calculelor (deci de dificultatea aplicării metodei la sistemele cu dinamică rapidă) și de faptul că performanțele reglării sunt puternic dependente de acuratețea modelului matematic al procesului.

### 12.7.1. Caracteristici generale

Metodologia *reglării cu predicție bazată pe model*, cunoscută sub denumirea MPC (*Model Predictive Control*) are următoarele caracteristici principale:

a) cunoașterea cât mai exactă a modelului dinamic al discretizatului procesului reglat (cu perioada de eșantionare  $T$ ), care să permită estimarea (predicția) răspunsului procesului reglat pe orizontul de timp

$$[0, NT], \quad (24)$$

numit *orizont de predicție a ieșirii*, pe baza valorilor anterioare ale mărimii de ieșire a procesului și a valorilor anterioare și viitoare (pe orizontul de predicție) ale mărimii de intrare (comandă) a procesului și mărimii perturbatoare (dacă este posibil) - fig. 12.18;

b) elaborarea, pe orizontul de timp al ieșirii, a unui semnal de comandă tip scară (constant pe fiecare interval de eșantionare), caracterizat prin secvența de comenzi viitoare

$$\{u_0, u_1, \dots, u_{N-1}\}, \quad (25)$$

care să asigure evoluția *optimală* a procesului reglat pe orizontul de timp considerat, caracterizată printr-o abatere mică a mărimii reglate față de traiectoria de referință și, în același timp, un consum energetic redus, inclusiv cu respectarea unor *restricții* impuse semnalului de comandă și mărimii reglate;

c) implementarea efectivă numai a primului element  $u_0$  al secvenței de comenzi optimale calculate, cu reluarea întregului procedeu la momentul de eșantionare următor (reglare cu *orizont alunecător*);

d) adoptarea procedurii *blocking*, de blocare a comenzii ipotetice (25) pe ultima porțiune a orizontului de predicție, pentru simplificarea algoritmului de reglare – fig. 12.18.

În cadrul procedurii de blocare, comanda ipotetică este menținută liber pe primele  $M$  perioade de eșantionare din cele  $N$  ale orizontului de predicție și este blocată pe celelalte  $N - M$  perioade de eșantionare la ultima valoare liberă. Așadar, numărul de valori distincte ale comenzii pe orizontul de predicție a ieșirii este  $M$ . Intervalul  $[0, M]$  în care comanda este liberă se numește *orizontul comenzii libere*.

Secvența de  $N$  comenzi ipotetice care acoperă întregul orizont de predicție a ieșirii are forma

$$\{u_0, u_1, \dots, u_{M-1}, u_{M-1}, \dots, u_{M-1}\}, \quad (26)$$

adică

$$\{u_0, u_0, u_0, \dots, u_0\} \text{ pentru } M = 1,$$

$$\{u_0, u_1, u_1, \dots, u_1\} \text{ pentru } M = 2,$$

$$\{u_0, u_1, u_2, \dots, u_2\} \text{ pentru } M = 3.$$

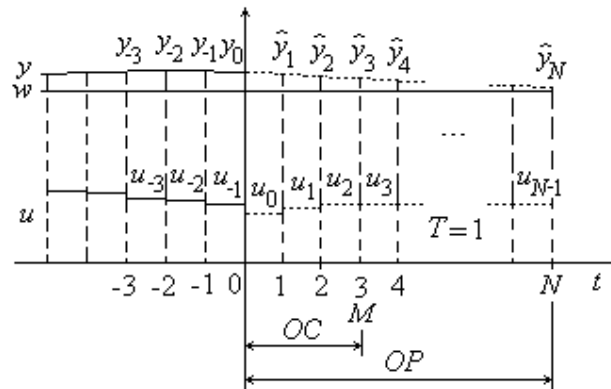


Fig. 12.18. Evoluția în timp a mărimilor de comandă, de referință și de ieșire:

$\{\dots, u_{-3}, u_{-2}, u_{-1}\}$  - secvența de comenzi anterioare;

$\{u_0, u_1, \dots, u_{N-1}\}$  - secvența de comenzi viitoare estimate optimal;

$\{\dots, y_{-3}, y_{-2}, y_{-1}, y_0\}$  - secvența de ieșiri măsurate;

$\{\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_N\}$  - secvența de ieșiri viitoare estimate optimal;

$OP$  - orizontul de predicție a ieșirii;

$OC$  - orizontul de predicție a comenzii libere.

La reglarea proceselor fizice de tip proporțional, pentru orizontul de predicție a ieșirii se recomandă o valoare aproximativ egală cu timpul de stabilizare al răspunsului indicial al procesului. Alegând o valoare sensibil

mai mică a orizontului de predicție, sistemul de reglare devine oscilant amortizat sau chiar oscilant crescător (instabil). Uneori, pentru evitarea efectului variațiilor mari și bruște (de tip treaptă) ale referinței, se utilizează un filtru de întârziere de ordinul unu.

In continuare vom considera perioada de eșantionare  $T=1$ , când lungimea orizontului de predicție este egală cu  $N$ .

Determinarea comenzii optimale pe orizontul de predicție a ieșirii se realizează prin *minimizarea unui criteriu pătratic* de forma

$$J = \sum_{j=1}^N (w_j - \hat{y}_j)^2 + \lambda [(u_0 - u_{-1})^2 + (u_1 - u_0)^2 + \dots + (u_{M-1} - u_{M-2})^2], \quad (27)$$

în care

$\{u_0, u_1, \dots, u_{M-1}\}$  este secvența de comenzi incrementale libere aplicate ipotetic pe orizontul comenzii libere;

$\{\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_N\}$  - secvența de valori ipotetice ale ieșirii procesului pe orizontul de predicție a ieșirii, estimate pe baza modelului procesului, pe baza valorilor anterioare ale ieșirii procesului și a valorilor anterioare și viitoare ale comenzii  $u$  și perturbației măsurate  $v$ ;

$\{w_1, w_2, \dots, w_N\}$  - secvența de valori viitoare ale referinței mărimii reglate;

$N$  - orizontul de predicție a ieșirii;

$M$  - orizontul de predicție a comenzii libere;

$\lambda$  - factorul de ponderare a variațiilor comenzii incrementale.

Prin mărirea factorului de ponderare  $\lambda$  se limitează variația (incrementul) comenzii optimale, obținându-se un consum energetic mai redus și un comportament mai robust al sistemului reglat.

### 12.7.2. Calculul predictiv al ieșirii

Determinarea secvenței  $\{\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_N\}$  cu valorile ipotetice viitoare ale ieșirii procesului se poate realiza pe baza modelului discretizatului procesului continuu. Să presupunem că modelul discretizatului procesului (fără luarea în considerație a perturbațiilor și a zgomotului de măsurare) are forma generală

$$y_k + a_1 y_{k-1} + \dots + a_n y_{k-n} = b_1 u_{k-1} + b_2 u_{k-2} + \dots + b_r u_{k-r}. \quad (28)$$

Vom considera că momentul curent este  $k=0$  și vom utiliza notațiile



$$\Delta y_i = y_i - y_{i-1},$$

$$\Delta u_i = u_i - u_{i-1}.$$

Din (28) rezultă că valoarea incrementală a ieșirii la momentul  $j$  ( $1 \leq j \leq N$ ) în raport de valorile incrementale anterioare ale intrării și ieșirii este dată de relația

$$\Delta y_j = \sum_{i=1}^r b_i \Delta u_{j-i} - \sum_{i=1}^n a_i \Delta y_{j-i}, \quad 1 \leq j \leq N. \quad (29)$$

Prin urmare, ținând seama de (26), ieșirea estimată

$$\hat{y} = \{\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_N\}$$

reprezintă răspunsul discretizatului procesului pentru secvența de intrare cu  $N+r$  componente

$$\hat{u} = \{u_{-r}, u_{-r+1}, \dots, u_{-1}, u_0, u_1, \dots, u_{M-1}, \dots, u_{M-1}\}$$

și valorile anterioare măsurate  $y_{-n+1}, y_{-n+2}, \dots, y_0$  ale ieșirii.

Ieșirea estimată  $\hat{y}$  conține două componente, componenta liberă  $y$  și componenta forțată  $\tilde{y}$ , adică

$$\hat{y} = y + \tilde{y}. \quad (30)$$

Componenta liberă  $y = \{y_1, y_2, \dots, y_N\}$  a ieșirii estimate este răspunsul modelului (28) al procesului pentru valorile anterioare

$$y_{-n+1}, y_{-n+2}, \dots, y_0$$

ale ieșirii măsurate și comanda din fig. 12.19 cu  $r + N$  componente

$$u = \{u_{-r}, u_{-r+1}, \dots, u_{-1}, u_0, \dots, u_{-1}\}$$

(constantă pentru  $t \geq -1$ , adică  $\Delta u_0 = 0, \Delta u_1 = 0, \dots, \Delta u_{N-1} = 0$ ).

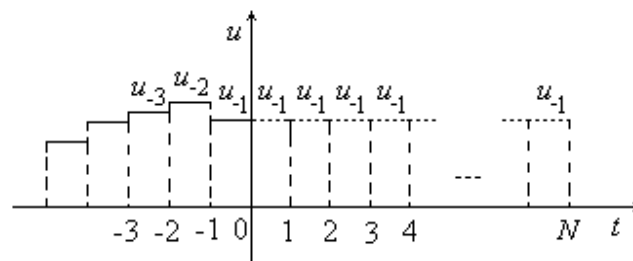


Fig. 12.19. Evoluția în timp a comenzii pentru ieșirea liberă.

In conformitate cu (29), rezultă următoarea relație de calcul al valorilor componentei libere a ieșirii estimate

$$y_j = y_{j-1} + \sum_{i=j+1}^r b_i \Delta u_{j-i} - \sum_{i=1}^n a_i \Delta y_{j-i}, \quad 1 \leq j \leq N. \quad (31)$$

Forma diferențială a relațiilor (31) asigură o bună compensare a efectului diverselor perturbații asupra componentei libere a ieșirii estimate. In acest fel, algoritmul de reglare cu predicție reușește să anuleze eroarea dintre mărimea reglată și mărimea de referință în condițiile acțiunii perturbațiilor de tip treaptă.

Inaintea trecerii regulatorului din starea MANUAL în starea AUTOMAT, componentele anterioare ale comenzii  $u_{-r}, u_{-r+1}, \dots, u_{-1}$  trebuie inițializate la valoarea curentă a comenzii, iar componentele anterioare ale ieșirii  $y_{-n+1}, y_{-n+2}, \dots, y_0$  trebuie inițializate la valoarea curentă a ieșirii. In regim AUTOMAT, la începutul unui pas de calcul, se inițializează  $y_0$  cu valoarea curentă măsurată a ieșirii, iar după efectuarea calculului comenzii, se efectuează translatarea spre stânga a secvenței  $\{u_{-r}, u_{-r+1}, \dots, u_{-1}\}$  și înlocuirea componentei  $u_{-1}$  cu valoarea calculată a comenzii, precum și translatarea spre stânga a secvenței  $\{y_{-n+1}, y_{-n+2}, \dots, y_0\}$ .

In cazul particular al procesului continuu cu funcția de transfer

$$G_P(s) = \frac{K_P \cdot e^{-T_m s}}{T_I s + 1}, \quad (32)$$

discretizat cu perioada  $T$  are funcția de transfer

$$G_P(z) = \frac{K_P(1-p) \cdot z^{-m-1}}{1-pz^{-1}} \quad (33)$$

și ecuația cu diferențe

$$y_k - p y_{k-1} = K_P(1-p) u_{k-m-1},$$

unde  $m$  este partea întregă a raportului  $\frac{T_m}{T}$  și  $p = e^{-T/T_I}$ . Componenta liberă se calculează cu relațiile

$$y_j = y_{j-1} + p(y_{j-1} - y_{j-2}) + K_p(1-p)(u_{j-m-1} - u_{j-m-2}), \quad 1 \leq j \leq m,$$

$$y_j = y_{j-1} + p(y_{j-1} - y_{j-2}), \quad m+1 \leq j \leq N.$$

Cei trei parametri ai procesului de ordinul unu și cu timp mort pot fi ușor determinați pe cale experimentală, din răspunsul la intrare treaptă al procesului, aflat inițial în regim staționar. Majoritatea aplicațiilor practice realizate pe baza acestui model al procesului sunt relativ simple, robuste și suficient de precise.

*Componenta forțată*  $\tilde{y} = \{\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_N\}$  a ieșirii estimate este răspunsul discretizatului procesului pentru comanda cu  $r + N$  componente

$$\tilde{u} = \hat{u} - u = \{0, 0, \dots, 0, u_0 - u_{-1}, u_1 - u_{-1}, \dots, u_{M-1} - u_{-1}, u_{M-1} - u_{-1}, \dots, u_{M-1} - u_{-1}\},$$

adică răspunsul forțat (din regim inițial staționar) la secvența de comenzi incrementale pe orizontul de predicție al ieșirii

$$\{\Delta u_0, \Delta u_1, \dots, \Delta u_{M-1}, 0, \dots, 0\}.$$

Din principul superpoziției, rezultă

$$\begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \vdots \\ \tilde{y}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & \cdots & 0 \\ h_2 & h_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_N & h_{N-1} & \cdots & h_{N-M+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_0 \\ \Delta u_1 \\ \vdots \\ \Delta u_{M-1} \end{bmatrix} \quad (34)$$

adică

$$\tilde{y} = \mathbf{H} \cdot \tilde{u}, \quad (35)$$

unde  $\{h_1, h_2, \dots, h_N\}$  este secvența valorilor răspunsului indicial  $h(t)$  la momentele de timp  $1, 2, \dots, N$ , iar

$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \vdots \\ \tilde{y}_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & \cdots & 0 \\ h_2 & h_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_N & h_{N-1} & \cdots & h_{N-M+1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{u} = \begin{bmatrix} \Delta u_0 \\ \Delta u_1 \\ \vdots \\ \Delta u_{M-1} \end{bmatrix}.$$

În conformitate cu relațiile (30) și (35), ieșirea estimată pe orizontul de predicție poate fi scrisă sub forma vectorial-matriceală astfel:

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{y} + \mathbf{H}\tilde{\mathbf{u}}. \quad (36)$$

Valorile răspunsului indicial pot fi determinate experimental sau analitic, pe baza modelului (28) al discretizatului procesului, cu relațiile

$$h_j = \sum_{i=1}^{i_1} b_i - \sum_{i=1}^{i_2} a_i h_{j-i}, \quad j=1, 2, \dots, N, \quad (37)$$

unde  $i_1 = \min\{j, r\}$  și  $i_2 = \min\{j, n\}$ . In cazul particular al procesului de ordinul unu și cu timp mort (32), răspunsul indicial are valorile

$$h_j = 0, \quad j=1, 2, \dots, m,$$

$$h_j = K_p [1 - e^{-(j-m)T/T_1}], \quad j=m+1, \dots, N.$$

### 12.7.3. Calculul comenzii optime

Definim vectorul erorii libere ca diferența dintre vectorul N-dimensional al referinței mărimii reglate și vectorul N-dimensional al mărimii reglate libere estimate pe orizontul de predicție, adică

$$\mathbf{e} = \mathbf{w} - \mathbf{y} = \begin{bmatrix} w_1 - y_1 \\ w_2 - y_2 \\ \vdots \\ w_N - y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_N \end{bmatrix}.$$

Ținând seama de expresia vectorial-matriceală (36) a ieșirii estimate pe orizontul de predicție, indicele de performanță (27) poate fi scris, succesiv, astfel:

$$\mathbf{J} = (\mathbf{w} - \mathbf{y} - \mathbf{H}\tilde{\mathbf{u}})^T (\mathbf{w} - \mathbf{y} - \mathbf{H}\tilde{\mathbf{u}}) + \lambda \tilde{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{u}},$$

$$\mathbf{J} = (\mathbf{e} - \mathbf{H}\tilde{\mathbf{u}})^T (\mathbf{e} - \mathbf{H}\tilde{\mathbf{u}}) + \lambda \tilde{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{u}},$$

$$\mathbf{J} = (\mathbf{e}^T - \tilde{\mathbf{u}}^T \mathbf{H}^T) (\mathbf{e} - \mathbf{H}\tilde{\mathbf{u}}) + \lambda \tilde{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{u}},$$

$$\mathbf{J} = \tilde{\mathbf{u}}^T (\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \lambda \mathbf{I}_M) \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}}^T \mathbf{H}^T \mathbf{e} - \mathbf{e}^T \mathbf{H}\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{e}^T \mathbf{e}.$$

Soluția optimală se obține prin anularea derivatelor indicelui de performanță  $\mathbf{J}$  în raport cu comanda ipotetică  $\tilde{\mathbf{u}}$ . Din

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \tilde{\mathbf{u}}} = 2(\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \lambda \mathbf{I}_M) \tilde{\mathbf{u}} - 2\mathbf{H}^T \mathbf{e} = 0,$$

obținem comanda optimală

$$\tilde{\mathbf{u}}_{opt} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \lambda \mathbf{I}_M)^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{e}. \quad (38)$$

În cazul cel mai simplu  $M=1$ , când  $\tilde{\mathbf{u}}_{opt} = \Delta u_0 = u_0 - u_{-1}$  și  $\mathbf{H}^T = [h_1 \ h_2 \ \dots \ h_N]$ , din relația (38) obținem algoritmul de reglare cu predicție

$$u_0 = u_{-1} + \frac{h_1 e_1 + h_2 e_2 + \dots + h_N e_N}{h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_N^2 + \lambda}, \quad (39)$$

unde  $\{h_1, h_2, \dots, h_N\}$  este secvența valorilor răspunsului indicial  $h(t)$  al procesului la momentele de timp  $1, 2, \dots, N$  ale orizontului de predicție a ieșirii, iar

$$e_j = w_j - y_j, \quad j=1, 2, \dots, N, \quad (40)$$

sunt valorile erorii libere pe orizontul de predicție a ieșirii (estimate pe baza modelului procesului), unde  $w_j$  sunt valorile mărimii de referință (considerate egale cu  $w_0$  în cazul în care nu se cunoaște traiectoria de referință viitoare), iar  $y_j$  sunt valorile estimate ale ieșirii *libere* (considerând că valorile viitoare  $u_0, u_1, \dots, u_{N-1}$  ale comenzii sunt constante și egale cu  $u_{-1}$ , adică  $\Delta u_0 = 0, \Delta u_1 = 0, \dots, \Delta u_{N-1} = 0$ ).

Alegerea parametrului (de acordare)  $\lambda$  se efectuează pe cale experimentală, în timpul desfășurării operației de reglare.

Algoritmul cu predicție (39) poate fi utilizat în practică sub *forma normalizată*

$$u_0 = u_{-1} + K_R \frac{h_1 e_1 + h_2 e_2 + \dots + h_N e_N}{h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_N^2}, \quad (41)$$

în care  $K_R$  este factorul de proporționalitate acordabil (cu valori subunitare) al regulatorului. În (39) și (41), valorile  $h_j$  ale funcției indiciale a procesului sunt adimensionale, iar valoarea curentă calculată a comenzii  $u_0$ , valoarea anterioară a comenzii  $u_{-1}$  și valorile  $e_j$  ale erorii (abaterii) sunt exprimate în procente. În cazul determinării experimentale a funcției indiciale a procesului, valorile adimensionale  $h_j$  ale funcției indiciale se obțin prin raportarea valorilor procentuale ale mărimii reglate la valoarea procentuală a variației treaptă a semnalului de comandă.

Relațiile de calcul al comenzii la momentul curent se încadrează în forma generală

$$u_0 = u_{-1} + K_R(k_1 e_1 + k_2 e_2 + \dots + k_N e_N), \quad (42)$$

care evidențiază caracterul *integrator* al algoritmului de comandă în raport cu erorile de reglare estimate în fiecare punct al orizontului de predicție. La procesele cu răspuns indicial crescător, așa cum reiese și din (39) și (41), ponderea în comandă a erorii libere  $e_j$  estimate la momentul  $j$  este cu atât mai mare cu cât momentul respectiv este mai îndepărtat de momentul curent.

Orizontul de predicție a comenzii  $M$  se alege de regulă mic (1, 2 sau 3), deoarece o valoare mai mare crește volumul de calcul, fără a mări semnificativ calitatea reglării. În ceea ce privește alegerea orizontului de predicție a ieșirii  $N$ , acesta trebuie să acopere partea semnificativă a regimului tranzitoriu al procesului (inclusiv partea cu timp mort), fără a scădea sub jumătatea timpului de stabilizare a răspunsului indicial.

În cazul  $M=2$ , când

$$\tilde{\mathbf{u}}_{opt} = \begin{bmatrix} \Delta u_0 \\ \Delta u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 - u_{-1} \\ u_1 - u_0 \end{bmatrix}$$

și

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 \\ h_2 & h_1 \\ \vdots & \vdots \\ h_N & h_{N-1} \end{bmatrix},$$

din (38) obținem algoritmul de reglare

$$u_0 = u_{-1} + \frac{h_1 e_1 + (h_2 - \alpha h_1) e_2 + \dots + (h_N - \alpha h_{N-1}) e_N}{A - \alpha B}, \quad (43)$$

unde

$$A = h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_N^2 + \lambda, \quad B = h_1 h_2 + h_2 h_3 + \dots + h_{N-1} h_N,$$

$$\alpha = \frac{B}{h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_{N-1}^2 + \lambda}.$$

În cazul în care considerăm comanda constantă pe primele  $k$  perioade și pe ultimele  $N-k$  perioade ale orizontului de predicție, relația matriceală-

vectorială (34) care exprimă componenta forțată a răspunsului procesului are forma

$$\begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \vdots \\ \tilde{y}_k \\ \tilde{y}_{k+1} \\ \vdots \\ \tilde{y}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 \\ h_2 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ h_k & 0 \\ h_{k+1} & h_1 \\ \vdots & \vdots \\ h_N & h_{N-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_0 \\ \Delta u_k \end{bmatrix},$$

iar din (38) obținem algoritmul de reglare

$$u_0 = u_{-1} + \frac{h_1 e_1 + \dots + h_k e_k + (h_{k+1} - \alpha h_1) e_{k+1} + \dots + (h_N - \alpha h_{N-k}) e_N}{A - \alpha B}, \quad (44)$$

unde

$$\begin{aligned} A &= h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_N^2 + \lambda, \\ B &= h_1 h_{k+1} + h_2 h_{k+2} + \dots + h_{N-k} h_N, \\ \alpha &= \frac{B}{h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_{N-k}^2 + \lambda}. \end{aligned}$$

Pentru  $k=1$ , se obține algoritmul de reglare corespunzător cazului  $M=2$ , iar pentru  $k=2$ , rezultă

$$u_0 = u_{-1} + \frac{h_1 e_1 + h_2 e_2 + (h_3 - \alpha h_1) e_3 + \dots + (h_N - \alpha h_{N-2}) e_N}{A - \alpha B}, \quad (45)$$

unde

$$\begin{aligned} A &= h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_N^2 + \lambda, \\ B &= h_1 h_3 + h_2 h_4 + \dots + h_{N-2} h_N, \\ \alpha &= \frac{B}{h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_{N-2}^2 + \lambda}. \end{aligned}$$

Ca și în cazul algoritmului de tip PID, adăugarea unui bloc de filtrare a mărimii de referință reduce variația inițială a comenzii la modificarea treaptă a referinței.

## 12.8. ALGORITMI DE REGLARE CU MODEL INTERN

### 12.8.1. Caracteristici generale ale reglării cu model intern

La reglarea cu model intern (IMC – Internal Model Control), sistemul de reglare încorporează în structura regulatorului, într-o formă explicită, un model  $\mathbf{M}$  al procesului  $\mathbf{P}$ , de tip proporțional și stabil. În cele ce urmează, procesul  $\mathbf{P}$  va reprezenta partea fixată (compusă din elementul de execuție, procesul propriu-zis și traductorul mărimii reglate), sau partea fixată compensată (prin introducerea unei legături locale de reacție, de tip pur proporțional, pentru transformarea proceselor instabile sau de tip integral în procese stabile, de tip proporțional).

În ipoteza unui *model liniar perfect*, deci cu  $G_M(s) = G_P(s)$ , din schema bloc a sistemului de reglare cu model intern (fig. 12.20) rezultă că la modificarea semnalului de referință  $r$  și a semnalului perturbator  $v$ , semnalul de pe calea de reacție este egal cu  $v$ ; în consecință,

$$C(s) = G_{R_i}(s)[R(s) - V(s)], \quad (46)$$

$$Y(s) = G_P(s)C(s) + V(s) = G_M(s)G_{R_i}(s)[R(s) - V(s)] + V(s),$$

deci

$$Y(s) = G_M(s)G_{R_i}(s)R(s) + [1 - G_M(s)G_{R_i}(s)]V(s), \quad (47)$$

unde  $G_{R_i}(s)$  este funcția de transfer a regulatorului intern. Proiectând regulatorul intern astfel încât să aibă funcția de transfer egală cu inversa funcției de transfer a modelului procesului, adică  $G_{R_i}(s) = G_M^{-1}(s)$ , din (47) rezultă  $Y(s) = R(s)$ , deci  $y(t) = r(t)$  oricare ar fi timpul  $t$ , referința  $r(t)$  și perturbația  $v(t)$ .

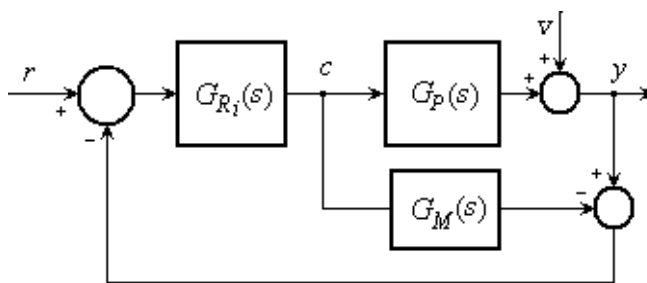


Fig. 12.20. Schema bloc a sistemului de reglare cu model intern.



Proprietatea de mai sus se menține și în cazul general al unui model imperfect. Astfel, pentru  $G_{R_i}(s) = G_M^{-1}(s)$ , funcția de transfer a sistemului închis

$$G_{YR}(s) = \frac{1}{1 + \left[ \frac{1}{G_{R_i}(s)} - G_M(s) \right] \frac{1}{G_P(s)}}$$

devine  $G_{YR}(s) = 1$ , deci  $y(t) = r(t)$  oricare ar fi referința  $r(t)$ . Putem astfel formula

• **Teorema reglării perfecte.** *Dacă funcția de transfer a regulatorului intern este inversa funcției de transfer a modelului procesului, adică*

$$G_{R_i}(s) = \frac{1}{G_M(s)}, \quad (48)$$

atunci se realizează condiția ideală de reglare

$$y(t) = r(t)$$

oricare ar fi referința  $r(t)$  și perturbația  $v(t)$ .

În realitate, modelul unui proces dinamic cu întârziere și inerție nu este perfect inversabil, ci doar într-o formă aproximativă. Astfel, în cazul modelului cu funcția de transfer

$$G_M(s) = \frac{K_M e^{-\tau_M s}}{(T_{M2}s + 1)^2} \quad (49)$$

(strict proprie și cu timp mort), inversa exactă a funcției de transfer

$$G_M^{-1}(s) = \frac{(T_{M2}s + 1)^2 e^{-(-\tau_M)s}}{K_M}$$

este *improprie* (cu partea rațională având gradul numărătorului mai mare decât gradul numitorului) și *necauzală* (cu timp mort negativ). În general, proiectarea regulatorului intern printr-o inversare cât mai exactă a funcției de transfer a modelului nu este recomandată deoarece implică generarea unor semnale de comandă “ascuțite”, cu forma apropiată de cea a impulsului Dirac. În practică, se evită utilizarea unor astfel de semnale de comandă, care pot produce efecte colaterale negative (amplificare excesivă a zgomotului, consum energetic sporit, uzură ridicată, regim periculos de

funcționare a instalației tehnologice, reducerea calității produsului finit etc.). În consecință, pentru a se obține performanțe de reglare ridicate se impune utilizarea unui model matematic cât mai precis.

• **Proprietatea erorii staționare nule.** La reglarea unui proces liniar de tip proporțional, dacă factorul static de proporționalitate al regulatorului intern este egal cu inversul factorului static de proporționalitate al modelului, adică  $K_{R_i} = 1 / K_M$ , sau echivalent

$$G_{R_i}(0) = 1 / G_M(0), \quad (50)$$

atunci regulatorul global este de tip integral.

Demonstrarea acestei proprietăți se poate face pe baza schemei bloc echivalente din fig. 12.21, în care regulatorul global **R** conține o buclă închisă cu reacție pozitivă având pe calea directă regulatorul intern **R<sub>i</sub>**, iar pe calea de reacție modelul **M** al procesului. Funcția de transfer a regulatorului **R** are expresia

$$G_R(s) = \frac{G_{R_i}(s)}{1 - G_{R_i}(s)G_M(s)}. \quad (51)$$

Deoarece  $1 - G_{R_i}(0)G_M(0) = 0$ , regulatorul **R** are un pol în origine, deci este de tip integral.

Dacă relația (50) este satisfăcută și sistemul de reglare este stabil, atunci eroarea staționară este nulă la referință și perturbație treaptă, indiferent de gradul de acuratețe a modelului procesului.

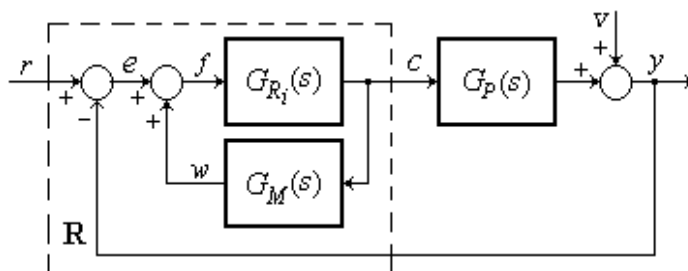


Fig. 12.21. Schema bloc echivalentă a sistemului de reglare cu model intern.

• **Proprietatea comenzii treaptă.** La reglarea unui proces liniar de tip proporțional, dacă modelul este perfect și regulatorul intern este de tip static cu funcția de transfer

$$G_{R_i}(s) = 1 / K_M, \quad (52)$$

atunci semnalul de comandă  $c(t)$  la referință treaptă unitară are forma unei trepte cu magnitudinea  $1/K_M$ .

Intr-adevăr, dacă modelul este perfect, în conformitate cu (46), avem:

$$C(s) = G_{R_i}(s)R(s) = \frac{1}{K_M} R(s).$$

Prin urmare, pentru referință treaptă unitară, rezultă

$$c(t) = \frac{1}{K_M} r(t) = \frac{1}{K_M} 1(t).$$

În ipoteza modelului perfect, în conformitate cu proprietatea comenzii treaptă, regulatorul intern cu funcția de transfer (52) generează semnal de comandă așa cum face un operator uman experimentat care, dorind să schimbe valoarea mărimii reglate, modifică brusc (treaptă) semnalul de comandă exact cu valoarea necesară. În acest fel, răspunsul sistemului de reglare la referință treaptă are forma proporțională cu cea a răspunsului indicial al procesului. Pe baza acestui raționament, putem considera că un sistem de reglare al unui proces fizic de tip proporțional este bine proiectat dacă timpul de răspuns al acestuia la referință treaptă este comparabil cu cel al răspunsului indicial al procesului. În general, calitatea reglării devine și mai bună prin reducerea timpului de răspuns al sistemului sub cel al procesului. Proprietatea comenzii treaptă poate fi valorificată pentru *verificarea și corectarea parametrilor modelului procesului* în timpul funcționării sistemului de reglare în regim automat. În condițiile (52), modul în care semnalul de comandă la referință treaptă se abate de la forma de treaptă oferă informație utilă referitoare la acuratețea modelului procesului și a parametrilor acestuia.

• **Proprietatea raportului de magnitudine a comenzii.** La reglarea stabilă a unui proces liniar de tip proporțional și cu întârziere strictă, dacă  $K_M = K_P$  și

$$G_{R_i}(0) = \frac{1}{K_M}, \quad G_{R_i}(\infty) = \frac{K}{K_M}, \quad (53)$$

unde  $K$  este factorul de acordare al regulatorului (cu valoarea standard 1), atunci semnalul de comandă  $c(t)$  la referință treaptă unitară are valoarea inițială de  $K$  ori mai mare decât valoarea finală, adică

$$\frac{c(0_+)}{c(\infty)} = K. \quad (54)$$

Pentru demonstrarea acestei proprietăți, plecăm de la următoarea observație: Deoarece procesul și modelul acestuia sunt subsisteme cu întârziere strictă, deci având răspunsul indicial cu valoarea inițială zero (la momentul  $t = 0_+$ }, răspunsul  $c(t)$  la referință treaptă unitară are valoarea inițială egală cu valoarea inițială a răspunsului indicial al regulatorului intern (fig. 12.20 sau fig. 12.21), adică

$$c(0_+) = G_{R_i}(\infty).$$

Pe de altă parte, conform proprietății erorii staționare nule, mărimea reglată se stabilizează la valoarea  $y(\infty) = 1$  pentru referință treaptă unitară; în consecință, avem

$$c(\infty) = \frac{y(\infty)}{K_P} = \frac{1}{K_P},$$

deci

$$\frac{c(0_+)}{c(\infty)} = K_P G_{R_i}(\infty) = K_P \cdot \frac{K}{K_M} = K.$$

În conformitate cu proprietatea raportului de magnitudine, prin setarea unei valori mai mari a factorului de acordare  $K$  se obține, ca și în cazul regulatorului PID, o creștere a valorii inițiale a semnalului de comandă generat de regulator, deci o reducere a timpului de stabilizare a răspunsului indicial al sistemului de reglare în condițiile menținerii suprareglajului sub limita admisă.

**Remarca 1.** Din cele prezentate reiese faptul că pentru asigurarea unei reglări performante trebuie satisfăcute trei condiții:

- a) modelul  $\mathbf{M}$  să descrie cât mai exact dinamica procesului  $\mathbf{P}$ ;
- b) factorul de proporționalitate static al regulatorului intern  $\mathbf{R}_i$  să fie egal cu inversul factorului de proporționalitate static al modelului  $\mathbf{M}$ ;
- c) funcția de transfer a regulatorului intern  $\mathbf{R}_i$  să aproximeze rezonabil inversa funcției de transfer a modelului procesului (fără a se forța impunerea unei precizii de aproximare ridicate).

**Remarca 2.** Metoda de reglare cu model intern poate fi extinsă la procesele de *tip integral* și la unele *procese instabile*, prin transformarea

acestora în *subsisteme compensate* stabile și de tip proporțional, cu ajutorul unei legături de reacție locală de tip pur proporțional.

### 12.8.2. Algoritm de reglare IMC cu model și regulator intern de ordinul doi

Modelul de ordinul doi cu funcția de transfer

$$G_M(s) = \frac{K_M e^{-\tau_M s}}{(T_{M2}s + 1)^2}, \quad (55)$$

cu ambele constante de timp de întârziere egale și cu timp mort este adecvat reglării proceselor liniare de tip proporțional, cu răspuns indicial monoton și mărginit. Un model de ordinul unu este prea simplu pentru a pune în evidență inerția procesului reglat, iar un model de ordinul doi cu constante de timp diferite sau un model de ordin mai mare decât doi sunt prea complicate și nu aduc, de regulă, avantaje semnificative.

Cei trei parametri ai modelului (55) pot fi determinați *experimental*, din răspunsul la intrare treaptă al procesului. Constanta de timp  $T_{M2}$  se calculează cu relația

$$T_{M2} = \frac{T_{s95} - \tau_M}{4,74}, \quad (56)$$

în care  $T_{s95}$  este timpul de stabilizare a răspunsului procesului (la 95% din valoarea finală). Expresia constantei de timp  $T_{M2}$  rezultă din egalitatea

$$\frac{y(\tau_M + 4.74T_{M2})}{y(\infty)} \approx 0,95,$$

unde  $y(t)$  este răspunsul indicial al modelului (55). Reamintim că factorul static adimensional de proporționalitate al procesului  $K_p$  se determină experimental cu relația (19).

O funcție de transfer rațională *improprie* poate fi aproximată cu una proprie (de regulă, simplu proprie) prin introducerea unor poli negativi suplimentari, deci a unor constante de timp de întârziere (filtrare) pozitive și de valoare relativ mică, iar o funcție de transfer *necauzală*, cu timp mort negativ, poate fi aproximată (în modul cel mai simplu) cu una cauzală prin eliminarea timpului mort. În consecință, funcția de transfer a regulatorului intern, obținută prin inversarea aproximativă a funcției de transfer (55) a modelului procesului, are forma

$$G_{R_i}(s) = \frac{(T_{M2}s + 1)^2}{K_M(T_\varepsilon s + 1)^2}, \quad (57)$$

unde  $T_\varepsilon$  este o constantă de timp dublă de filtrare (de regulă, mai mică sau egală cu  $T_{M2}$ ).

Constanta de timp  $T_\varepsilon$  reprezintă principalul *parametru de acordare* al regulatorului. Din considerente de ordin practic, se recomandă însă introducerea notației

$$\sqrt{K} = \frac{T_{M2}}{T_\varepsilon}, \quad (58)$$

prin care factorul de proporționalitate adimensional  $K$  (cu valoarea standard 1) devine principalul factor de acordare al regulatorului. Astfel, regulatorul intern are funcția de transfer

$$G_{R_i}(s) = \frac{(T_{M2}s + 1)^2}{K_M \left( \frac{T_{M2}}{\sqrt{K}} s + 1 \right)^2}, \quad (59)$$

care satisface condițiile  $G_{R_i}(0) = \frac{1}{K_M}$ ,  $G_{R_i}(\infty) = \frac{K}{K_M}$ , precum și

$G_{R_i}(s) = \frac{1}{K_M}$  pentru  $K = 1$ . În consecință, ultimele trei proprietăți ale reglării

cu model intern sunt satisfăcute, astfel că, la referință treaptă: a) eroarea staționară este nulă; b) pentru  $K = 1$ , semnalul de comandă  $c(t)$  are forma apropiată de cea a unei trepte; c) pentru  $K_M = K_P$ , semnalul de comandă  $c(t)$  are valoarea inițială de  $K$  ori mai mare decât valoarea finală, adică  $c(0_+) / c(\infty) = K$ . În plus, în ipoteza unui model perfect, din (47), (55) și (59) rezultă următoarea expresie a funcției de transfer a sistemului de reglare:

$$G_{YR}(s) = G_{R_i}(s)G_M(s) = \frac{e^{-\tau_M s}}{\left( \frac{T_{M2}}{\sqrt{K}} s + 1 \right)^2}. \quad (60)$$

În conformitate cu (60), răspunsul teoretic la referință treaptă al sistemului de reglare cu model perfect de forma (55) este monoton și cu atât mai rapid cu cât valoarea lui  $K$  este mai mare.

Regulatorul IMC, numit în continuare și P<sub>0</sub>-IMC, are *patru parametri principali*: un parametru de acordare (factorul de proporționalitate  $K$ ) și trei parametri de model (factorul de proporționalitate  $K_M$ , timpul mort  $\tau_M$  și timpul de stabilizare  $T_s$ ). În general, prin mărirea/micșorarea factorului de acordare  $K$ , regulatorul generează un semnal de comandă mai puternic/slab. Prin urmare, factorul de acordare  $K$  trebuie ales cât mai mare, fără însă ca suprareglajul răspunsului sistemului de reglare la referință treaptă să depășească 5...10%.

În cazul procesului cu răspunsul indicial  $y_1(t)$  determinat experimental și reprezentat grafic în fig. 12.22, parametrii de model pot fi aleși astfel:

$$K_M = K_P = 1,5, \quad \tau_M = \tau_P = 12, \quad T_{s95} = 60,$$

deci

$$T_{M2} = \frac{60 - 12}{4,74} \approx 10,13.$$

Pentru acești parametri de model și  $K=1$ , răspunsurile  $c(t)$  și  $y(t)$  ale sistemului de reglare la modificarea treaptă unitară a referinței sunt reprezentate grafic în fig. 12.22. Deoarece graficul semnalului de comandă  $c(t)$  are forma apropiată de cea a unei trepte, rezultă că toți parametrii de model au fost aleși în concordanță cu caracteristicile dinamice ale procesului. De regulă, în cazul proceselor de tip proporțional cu răspuns indicial mărginit și monoton, performanțele de reglare devin mai bune prin mărirea convenabilă a factorului de acordare  $K$  până la obținerea unui suprareglaj în gama 2...10%.

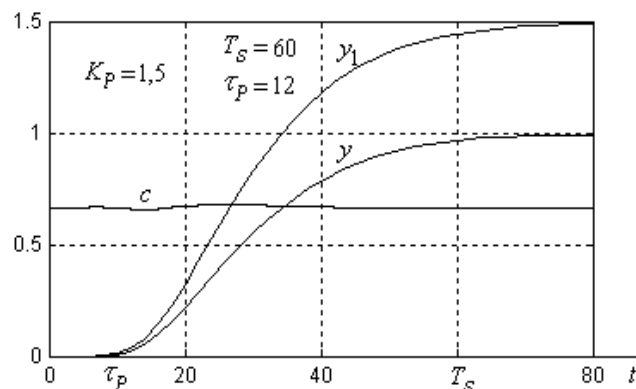


Fig. 12.22. Răspunsul indicial  $y_1$  al procesului și răspunsurile indiciale  $c$  și  $y$  ale sistemului de reglare pentru  $K=1$  și parametri de proces aleși convenabil.

**Remarca 1.** In cazul proceselor cu răspuns indicial monoton și mărginit, proprietatea comenzii treaptă (pentru  $K = 1$ ) sugerează un mijloc practic eficient pentru *verificarea și corectarea parametrilor modelului* procesului, deoarece modul în care semnalul de comandă (la referință treaptă) se abate de la forma treaptă oferă informație referitoare la acuratețea modelului și a fiecăruia din cei trei parametri ai modelului.

Dacă factorul de proporționalitate al modelului este mai mic decât cel al procesului, comanda  $c$  are valoarea inițială mai mare decât valoarea finală, ducând la creșterea vitezei de variație a mărimii reglate  $y$  și, eventual, la suprareglaj (fig. 12.23 - cazul  $K_M = 1,2 < 1,5 = K_P$ ). Dacă însă factorul de proporționalitate al modelului este mai mic decât cel al procesului, comanda  $c$  are valoarea inițială mai mică decât valoarea finală, ducând la scăderea vitezei de variație a mărimii reglate  $y$  și la creșterea timpului de stabilizare (fig. 12.23 - cazul  $K_M = 1,8 > 1,5 = K_P$ ).

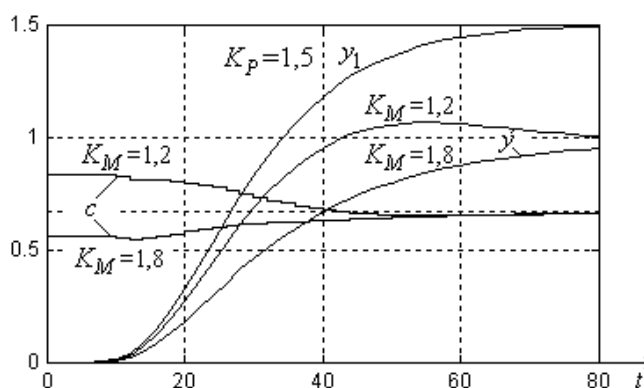


Fig. 12.23. Răspunsul indicial  $y_1$  al procesului și răspunsurile indiciale  $c$  și  $y$  ale sistemului de reglare pentru  $K = 1$  și  $K_M \neq K_P$ .

Dacă timpul mort al modelului este mai mic decât cel al procesului (fig. 12.24 - cazul  $\tau_M = 8 < 12 = \tau_P$ ), sau timpul de stabilizare al modelului este mai mic decât cel al procesului (fig. 12.25 - cazul  $T_S = 50 < 60 = (T_S)_P$ ), atunci comanda  $c$  începe să crească începând cu momentul  $t \approx \tau_M$ , fapt ce mărește viteza de creștere a mărimii reglate  $y$  și favorizează apariția suprareglajului. Variația semnalului de comandă  $c$  după momentul  $t \approx \tau_M$  este mai rapidă în cazul erorii de timp mort decât în cazul erorii de timp de stabilizare. Efectele sunt inverse atunci când timpul mort al modelului este mai mare decât cel al procesului (fig. 12.24 - cazul  $\tau_M = 16 > 12 = \tau_P$ ), sau



timpul de stabilizare al modelului este mai mare decât cel al procesului (fig.12.25 - cazul  $T_S = 75 > 60 = (T_S)_P$ ).

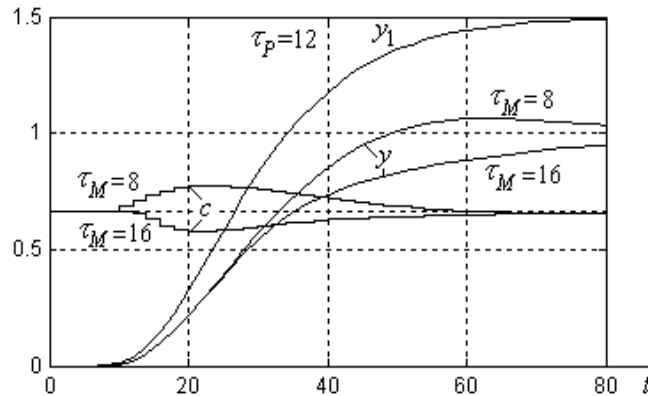


Fig. 12.24. Răspunsul indicial  $y_1$  al procesului și răspunsurile indiciale  $c$  și  $y$  ale sistemului de reglare cu regulator cu  $K = 1$  și  $\tau_M$  diferit de cel al procesului.

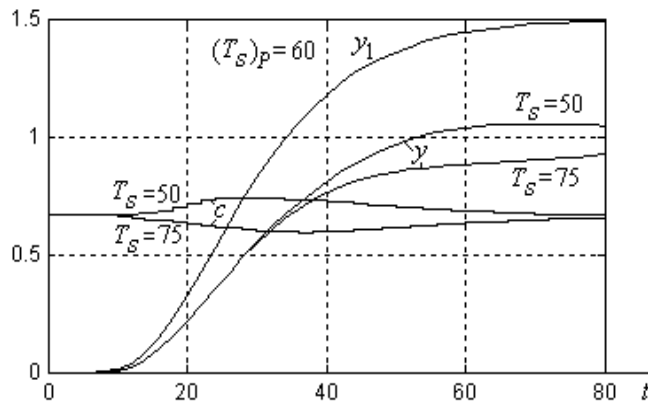


Fig. 12.25. Răspunsul indicial  $y_1$  al procesului și răspunsurile indiciale  $c$  și  $y$  ale sistemului de reglare cu regulator cu  $K = 1$  și  $T_S$  diferit de cel al procesului.

În concluzie, atunci când un parametru al modelului este mai mic decât parametrul respectiv al procesului, semnalul de comandă pentru  $K = 1$  și referință treaptă este deplasat în zona de deasupra liniei orizontale cu mărimea  $c(\infty)$ . Invers, atunci când unul dintre parametrii modelului este mai mare decât parametrul respectiv al procesului, semnalul de comandă este deplasat în zona de sub linia orizontală cu mărimea  $c(\infty)$ . Ca o *recomandare generală*, în cazul proceselor cu răspuns indicial monoton și mărginit este preferabil ca parametrii de model (în special timpul de stabilizare și timpul mort) să fie aleși egali sau ușor mai mari decât

parametrii respectivi ai procesului. In acest fel, sistemul de reglare va avea cele mai bune performanțe dinamice pentru valori supraunitare ale parametrului de acordare  $K$ .

Din cele prezentate, se desprinde următoarea *metodologie de corectare în regim automat* a parametrilor modelului procesului.

- a) Se fixează parametrul de acordare  $K$  la valoarea 1;
- b) Se modifică referința sub formă de treaptă și se reprezintă grafic variația în timp a semnalului de comandă  $c(t)$ ;
- c) Dacă semnalul de comandă  $c(t)$  se abate puțin de la forma de treaptă (de preferință sub linia orizontală cu magnitudinea  $c(\infty)$ ), atunci parametrii modelului sunt bine acordați la proces;
- d) Dacă  $c(0_+) \neq c(\infty)$ , atunci se corectează  $K_M$  prin înmulțire cu raportul  $c(0_+)/c(\infty)$ ;
- e) Dacă  $c(0_+) \approx c(\infty)$ , dar  $c(t)$  se abate semnificativ de la forma de treaptă, se impune modificarea fie a timpului mort  $\tau_M$  (când comanda se abate relativ rapid de la forma treaptă), fie a timpului de stabilizare  $T_s$  (când comanda se abate relativ lent de la forma treaptă).

In cazul creșterii/scăderii intensității comenzii  $c(t)$  față de forma treaptă cu magnitudinea  $c(\infty)$ , corecția oricărui parametru al modelului ( $K_M, \tau_M$  sau  $T_s$ ) trebuie făcută în sensul creșterii/scăderii valorii acestuia.

**Remarca 2.** Ținând seama că discretizatul unui sistem continuu cu funcția de transfer

$$G(s) = \frac{1}{T_0 s + 1} \quad (61)$$

are funcția de transfer

$$G^0(z) = \frac{(1 - p_0)z^{-1}}{1 - p_0 z^{-1}}, \quad p_0 = e^{-T/T_0}, \quad (62)$$

care verifică proprietățile

$$G^0(1) = G(0) = 1, \quad G^0(\infty) = G(\infty) = 0, \quad (63)$$

putem considera cu suficientă precizie că discretizatul modelului continuu de ordinul doi și cu timp mort (55) are funcția de transfer în  $z$

$$G_M^0(z) = \frac{K_M(1-p)^2 z^{-l_m-1}}{(1-pz^{-1})^2}, \quad (64)$$

unde

$$p = e^{-T/T_{M2}},$$

$T$  este perioada de discretizare, iar  $l_m$  - valoarea întregă a raportului  $\tau_M/T$ . În conformitate cu (64) și fig. 12.21, ecuația cu diferențe a modelului are forma

$$w_k - 2pw_{k-1} + p^2w_{k-2} = K_M(1-p)^2 c_{k-l_m-1}. \quad (65)$$

**Remarca 3.** Ținând seama că discretizatul unui sistem continuu cu funcția de transfer

$$G(s) = \frac{T_2 s + 1}{T_1 s + 1} \quad (66)$$

are funcția de transfer

$$G^0(z) = \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{1 - q_0 z^{-1}}{1 - p_0 z^{-1}}, \quad p_0 = e^{-T/T_1}, \quad q_0 = 1 - \frac{T_1}{T_2}(1 - p_0), \quad (67)$$

care verifică proprietățile

$$G^0(1) = G(0) = 1,$$

$$G^0(\infty) = G(\infty) = \frac{T_2}{T_1},$$

putem considera cu suficientă precizie că discretizatul regulatorului intern continuu cu funcția de transfer

$$G_{R_i}(s) = \frac{(T_{M2} s + 1)^2}{K_M \left( \frac{T_{M2}}{\sqrt{K}} s + 1 \right)^2}, \quad (68)$$

are funcția de transfer

$$G_{R_i}(z) = \frac{K(1 - q_2 z^{-1})^2}{K_M(1 - p_2 z^{-1})^2}, \quad (69)$$

unde

$$p_2 = e^{-\sqrt{K}T/T_{M2}}, \quad q_2 = 1 - \frac{1-p_2}{\sqrt{K}}. \quad (70)$$

In conformitate cu (69) și fig. 12.21, ecuația cu diferențe a regulatorului intern poate fi scrisă sub forma

$$c_k - 2p_2c_{k-1} + p_2^2c_{k-2} = \frac{K}{K_M}(f_k - 2q_2f_{k-1} + q_2^2f_{k-2}). \quad (71)$$

**Remarca 4.** Ținând seama de schema sistemului de reglare cu model intern din fig. 12.21, precum și de ecuațiile cu diferențe (65) și (71) ale modelului și regulatorului intern, putem scrie ecuațiile în domeniul timpului ale *regulatorului numeric R*, sub următoarea formă:

$$\begin{cases} e_k = r_k - y_k \\ w_k = 2pw_{k-1} - p^2w_{k-2} + K_M(1-p)^2(c_{k-l_m-1} - c_0) \\ f_k = (e_k - e_0) + w_k \\ c_k = c_0 + 2p_2(c_{k-1} - c_0) + p_2^2(c_{k-2} - c_0) + \frac{K}{K_M}(f_k - 2q_2f_{k-1} + q_2^2f_{k-2}) \end{cases}, \quad (72)$$

unde  $e_0$  și  $c_0$  sunt respectiv valorile inițiale ale erorii și comenzii.

Pentru evitarea șocurilor la comutarea regulatorului din regim MANUAL în regim AUTOMAT este necesar ca înaintea operației de comutare să se efectueze *operația de inițializare* a variabilelor algoritmului de reglare. Variabilele  $c_0$  și  $c_{k-1}, c_{k-2}, \dots, c_{k-l_m-1}$  se inițializează la valoarea curentă a comenzii  $c$ , variabila  $e_0$  se inițializează la valoarea curentă a erorii  $e$ , iar variabilele  $w_{k-1}, w_{k-2}, f_{k-1}$  și  $f_{k-2}$  la valoarea zero. Dacă variabila  $e_0$  este inițializată la valoarea zero, atunci regulatorul inițiază o acțiune imediată de reducere și eliminare a erorii curente, similară celei în care referința  $r$  ar fi suferit o variație treaptă egală cu valoarea curentă a erorii. Aceeași operație de inițializare trebuie efectuată la modificarea în regim automat a factorului de acordare  $K$  și a parametrilor modelului procesului.

**Remarca 5.** Modelul continuu cu funcția de transfer (55) poate fi utilizat pentru toate procesele stabile de tip proporțional, inclusiv pentru procesele cu răspuns indicial cu supradepășire sau de fază neminimă (caracterizate printr-un răspuns indicial având la început semn opus semnului valorii finale).

La procesele de fază *neminimă*, timpul mort  $\tau_M$  va îngloba tot intervalul de timp în care răspunsul indicial are semn opus semnului valorii finale.

La procesele cu *supradepășire*, parametrii modelului sunt determinați prin aproximarea procesului  $\mathbf{P}$  cu procesul  $\bar{\mathbf{P}}$  având răspunsul indicial  $\bar{y}(t)$  fără supradepășire, cu valoarea constantă începând cu momentul punctului de maxim. Mai exact, dacă răspunsul indicial  $y(t)$  al procesului  $\mathbf{P}$  atinge valoarea maximă la momentul  $t_1$ , atunci se consideră  $\bar{y}(t) = y(t)$  pentru  $t \leq t_1$  și  $\bar{y}(t) = y(t_1)$  pentru  $t \geq t_1$ ; prin urmare,

$$K_M = K_{\bar{P}}, \quad \tau_M = \tau_{\bar{P}}, \quad T_s = (T_s)_{\bar{P}} \approx t_1. \quad (73)$$

**Remarca 6.** Algoritmul IMC poate fi aplicat și la reglarea *proceselor de tip integral* sau chiar *instabile*, prin transformarea acestora în *procese compensate* stabile și de tip proporțional, cu ajutorul unei legături locale de reacție de tip pur proporțional, cu factorul de proporționalitate  $K_r$  (fig. 12.26). Procesul compensat are ca intrare mărimea de ieșire  $g$  a regulatorului intern, iar ca ieșire mărimea reglată  $y$ . În această variantă extinsă, regulatorul are *cinci parametri principali*: un parametru de acordare (factorul de proporționalitate  $K$ ), un parametru de compensare a procesului (factorul de reacție  $K_r$ ) și trei parametri ai modelului procesului compensat (factorul de proporționalitate  $K_M$ , timpul mort  $\tau_M$  și timpul de stabilizare  $T_s$ ).

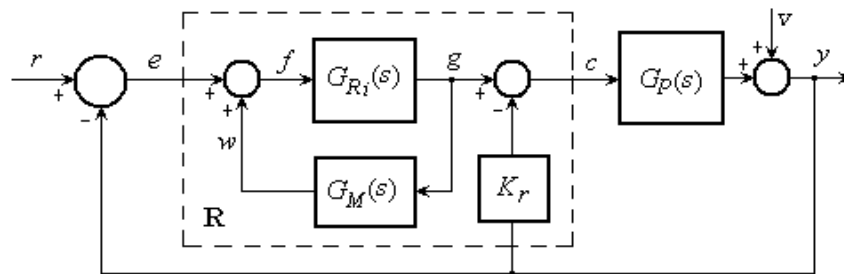


Fig. 12.26. Schema sistemului de reglare cu proces compensat și regulator tip IMC.

Regulatorul global  $\mathbf{R}$  (care include și blocul de reacție locală cu factorul  $K_r$ ) are trei regimuri de funcționare: MANUAL, AUTOMAT și COMPENSAT. În regim COMPENSAT, semnalul de ieșire  $g$  al regulatorului intern poate fi modificat numai de operatorul uman, la fel cum în regim MANUAL, semnalul de ieșire  $c$  al regulatorului global poate fi modificat numai de operatorul uman.

La procesele stabile de tip proporțional, factorul de reacție  $K_r$  al procesului se alege egal cu zero, semnalele  $g$  și  $c$  sunt egale, iar regimul COMPENSAT coincide cu regimul MANUAL. La procesele de tip integral sau instabile, factorul de reacție  $K_r$  se alege cât mai mare, fără a avea însă supradepășire în răspunsul procesului compensat la o variație treaptă a intrării  $g$  (aplicată în regim COMPENSAT). Dacă acest lucru nu este posibil, se urmărește numai obținerea unui proces compensat stabil de tip proporțional.

Cei trei parametri ai modelului sunt determinați experimental, în regim COMPENSAT, din răspunsul la intrare treaptă al procesului compensat. Dacă parametrii modelului procesului compensat sunt bine aleși, atunci răspunsul  $g(t)$  al sistemului de reglare pentru referință treaptă și  $K=1$  are forma apropiată de cea a unei treapte. Abaterea de la forma treaptă permite operatorului uman să ajusteze convenabil parametrii modelului procesului compensat (la fel ca în cazul procesului necompensat).

În conformitate cu (72) și schema din fig. 12.26, *regulatorul numeric*  $\mathbf{R}$  are ecuațiile în domeniul timpului:

$$\left\{ \begin{array}{l} e_k = r_k - y_k \\ w_k = 2pw_{k-1} - p^2w_{k-2} + K_M(1-p)^2(g_{k-l_m-1} - c_0) \\ f_k = (e_k - e_0) + w_k \\ g_k = c_0 + 2p_2(g_{k-1} - c_0) + p_2^2(g_{k-2} - c_0) + \frac{K}{K_M}(f_k - 2q_2f_{k-1} + q_2^2f_{k-2}) \\ c_k = g_k - K_r(y_k - y_0) \end{array} \right. , \quad (74)$$

unde  $e_0$ ,  $c_0$  și  $y_0$  sunt respectiv valorile inițiale ale variabilelor  $e$ ,  $c$  și  $y$ .

La comutarea regulatorului din regim MANUAL în regim AUTOMAT, variabila  $e_0$  se inițializează la valoarea curentă a erorii  $e$ , variabilele  $c_0$  și  $g_{k-1}, g_{k-2}, \dots, g_{k-l_m-1}$  se inițializează la valoarea curentă a comenzii  $c$ ,

variabila  $y_0$  la valoarea curentă a mărimii reglate  $y$ , iar variabilele  $w_{k-1}$ ,  $w_{k-2}$ ,  $f_{k-1}$  și  $f_{k-2}$  la valoarea zero. Aceeași operație de inițializare trebuie efectuată la modificarea parametrilor regulatorului în regim.

*Metodologia de acordare a regulatorului este următoarea:*

a) Se fixează factorul de reacție  $K_r$  la valoarea zero și, cu regulatorul în regim MANUAL, se determină experimental răspunsul procesului la o variație treaptă a intrării  $c$ ;

b) Dacă procesul este de tip integral sau instabil, se comută regulatorul în regim COMPENSAT și se determină experimental răspunsul procesului compensat la o variație treaptă a intrării  $g$  pentru diferite valori ale factorului de reacție  $K_r$ , după care se fixează  $K_r$  la o valoare cât mai mare, dar care să nu genereze supradepășire în răspunsul procesului compensat;

c) Din răspunsul procesului compensat, se determină parametrii  $K_M$ ,  $T_S$  și  $\tau_M$  ai modelului procesului compensat;

d) Pentru  $K=1$ , cu regulatorul în regim AUTOMAT, se determină răspunsurile  $g(t)$  și  $y(t)$  ale sistemului de reglare la referință treaptă; dacă răspunsul  $g(t)$  are forma apropiată de cea a unei trepte, se consideră că parametrii modelului au valori adecvate; în cazul contrar, parametrii modelului pot fi corecți convenabil, în conformitate cu metodologia descrisă la Remarca 1;

e) Se modifică valoarea parametrului de acordare  $K$  astfel încât răspunsul  $y(t)$  al sistemului de reglare la referință treaptă să aibă un suprareglaj mic, de 2...5%.

**Remarca 7.** Un algoritm IMC mai simplu poate fi proiectat prin utilizarea unui regulator intern de ordinul unu, cu funcția de transfer

$$G_{R_i}(s) = \frac{T_{M1}s + 1}{K_M \left( \frac{T_{M1}}{K} s + 1 \right)}, \quad (75)$$

unde constanta de tip  $T_{M1}$  se determină *experimental* din răspunsul la intrare treaptă al procesului, cu relația

$$T_{M1} = \frac{T_{S95} - \tau_M}{3}. \quad (76)$$

Prin utilizarea regulatorului intern de ordinul unu, ultimele trei proprietăți ale reglării cu model intern sunt satisfăcute.

Discretizatul regulatorului intern continuu cu funcția de transfer (75) are funcția de transfer

$$G_{R_i}(z) = \frac{K(1 - q_1 z^{-1})}{K_M(1 - p_1 z^{-1})}, \quad (77)$$

unde

$$p_1 = e^{-KT/T_{M1}}, \quad q_1 = 1 - \frac{1 - p_1}{K}. \quad (78)$$

În majoritatea aplicațiilor practice, performanțele și robustețea sistemelor de reglare cu regulator intern de ordinul unu sunt apropiate de cele ale sistemelor de reglare cu regulator intern de ordinul doi, dar influența factorului de acordare  $K$  asupra intensității acțiunii de reglare este mai puternică.

■ Funcția **p0\_imc1**, realizată în MATLAB, permite studiul sistemului cu regulator  $P_0$ -IMC pentru reglarea procesului cu funcția de transfer

$$G_{P1}(s) = \frac{1,5e^{-6s}}{(3s+1)(4s+1)(8s+1)(10s+1)}$$

(considerată cunoscută pentru simularea procesului, dar necunoscută pentru determinarea modelului procesului).

Construită pe baza relațiilor (55), (64) și (69), funcția **p0\_imc1** realizează reprezentarea grafică a răspunsului indicial  $y_1(t)$  al procesului, precum și a mărimilor  $c(t)$  și  $y(t)$  ale sistemului de reglare la modificarea treaptă unitară a referinței. Funcția are ca argumente de intrare perioada de eșantionare  $T$ , factorul de acordare al regulatorului  $K$  și parametrii modelului ( $KM$  – factorul de proporționalitate,  $T_s$  – timpul de stabilizare,  $T_m$  – timpul mort).

```
function []=p0_imc1(T,K,KM,Ts,Tm)
t=0:T:80;
s=tf('s');
z=tf('z'); z1=z^-1;
P=1.5/(3*s+1)/(4*s+1)/(8*s+1)/(10*s+1); P.iodelay=6;
y1=step(P,t); plot(t,y1,'k'); hold on;
Pd=c2d(P,T);
lm=round(Tm/T);
TM2=(Ts-Tm)/4.74;
p=exp(-T/TM2); Model=KM*(1-p)^2*z1^(lm+1)/(1-p*z1)^2;
K1=sqrt(K); p2=exp(-K1*T/TM2); q2=1-(1-p2)/K1;
Ri=K/KM*(1-q2*z1)^2/(1-p2*z1)^2;
```



```

R=Ri/(1-Ri*Model);
sra_y=R*Pd/(1+R*Pd);
y=step(sra_y,t); plot(t,y,'r');
sra_c=R/(1+R*Pd);
step(sra_c,'b',t);
grid on;

```

Din răspunsul indicial  $y_1(t)$  al procesului, reprezentat grafic în fig. 12.27, rezultă

$$K_p = 1,5; \quad T_s \approx 60; \quad \tau_p \approx 12.$$

Cu comenzile

```
p0_imc1(2, 1, 1.5, 60, 12); p0_imc1(2, 1.7, 1.5, 60, 12);
```

s-au obținut reprezentările grafice ale răspunsului procesului  $y_1(t)$  și răspunsurilor  $c(t)$  și  $y(t)$  ale sistemului de reglare la referință treaptă, pentru perioada de eșantionare  $T=2$  și două valori distincte ale parametrului de acordare  $K$  (fig. 12.27). Pentru  $K=1$ , forma de variație în timp a comenzii  $c(t)$  este apropiată de forma treaptă, iar curba de variație a mărimii reglate  $y(t)$  este apropiată ca formă de cea a răspunsului indicial  $y_1(t)$  al procesului. Cel mai bun răspuns corespunde factorului de acordare  $K=1,7$ .

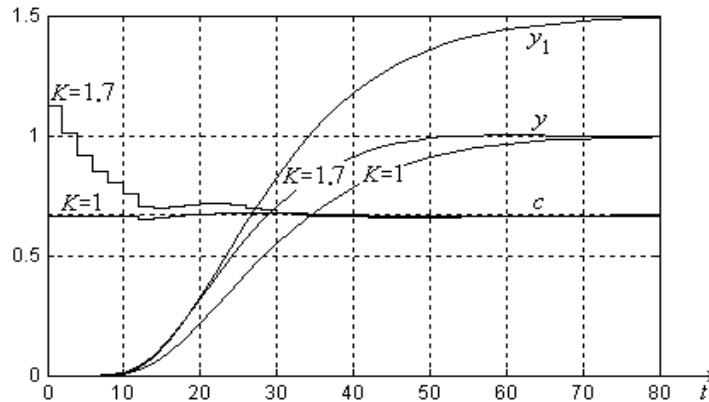


Fig. 12.27. Răspunsul indicial  $y_1$  al procesului cu funcția de transfer  $G_{P1}(s)$  și răspunsurile  $c$  și  $y$  ale sistemului de reglare la referință treaptă unitară.

■ Funcția  $p0\_imc2(T,K,KM,Ts,Tm)$  este asociată procesului de fază neminimă cu funcția de transfer

$$G_{P2}(s) = \frac{1,5(-6s+1)e^{-6s}}{(3s+1)(4s+1)(8s+1)}.$$

Ea diferă de funcția  $p0\_imc1$  numai prin linia

$$P=1.5*(-6*s+1)/(3*s+1)/(4*s+1)/(8*s+1); \quad P.iodelay=6;$$

Din răspunsul indicial  $y_1(t)$  al procesului (fig. 12.28), se aleg următorii parametri de model:

$$K_M = 1,5; \quad T_s \approx 45; \quad \tau_M \approx 15.$$

Timpul mort a fost ales pentru a include și intervalul în care răspunsul indicial  $y_1(t)$  al procesului are semnul negativ. Cu comenzile

$$\text{p0\_imc2}(2, 1, 1.5, 45, 15);$$

$$\text{p0\_imc2}(2, 1.6, 1.5, 45, 15);$$

s-au obținut reprezentările grafice ale răspunsului procesului  $y_1(t)$  și răspunsurilor  $c(t)$  și  $y(t)$  ale sistemului de reglare la referință treaptă, pentru perioada de eșantionare  $T=2$  și două valori distincte ale parametrului de acordare  $K$  (fig. 12.28). Din examinarea răspunsurilor sistemului reiese că algoritmul de reglare poate fi aplicat cu rezultate bune și la procesele stabile de fază neminimă și cu timp mort, în general greu de reglat cu regulatoare PID.

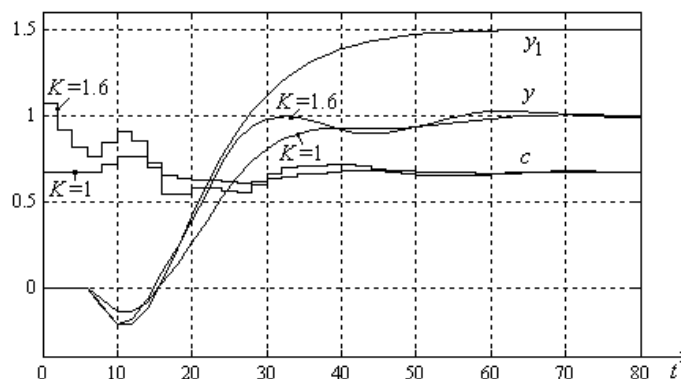


Fig. 12.28. Răspunsul indicial  $y_1$  al procesului cu funcția de transfer  $G_{P2}(s)$  și răspunsurile  $c$  și  $y$  ale sistemului de reglare la referință treaptă unitară.

■ Funcția  $\text{p0\_imc3}(T,K,K_M,T_s,T_m)$  este asociată procesului cu funcția de transfer

$$G_{P3}(s) = \frac{1,5(20s+1)e^{-6s}}{(3s+1)(4s+1)(8s+1)},$$

care are o constantă de timp de avans dominantă, deci suprareglaj. Ea diferă de funcțiile  $\text{p0\_imc1}$  și  $\text{p0\_imc2}$  numai prin linia de comandă

$$P=1.5*(20*s+1)/(3*s+1)/(4*s+1)/(8*s+1); \quad P.iodelay=6;$$

În conformitate cu relațiile (73) de la Remarca 5, din răspunsul indicial asociat  $\bar{y}_1(t)$  al procesului (fig. 12.29), se aleg următorii parametri de model:

$$K_M = 1,82; \quad T_s = t_1 \approx 20; \quad \tau_M \approx 6.$$

Cu comenzile

`p0_imp3(2, 1, 1.82, 20, 6); p0_imp3(2, 0.6, 1.82, 20, 6);`

s-au obținut reprezentările grafice ale răspunsului procesului  $y_1(t)$  și răspunsurilor  $c(t)$  și  $y(t)$  ale sistemului de reglare la referință treaptă, pentru perioada de eșantionare  $T=2$  și două valori distincte ale parametrului de acordare  $K$  (fig. 12.29).

Din examinarea răspunsurilor sistemului de reglare se constată că algoritmul de reglare poate fi aplicat cu rezultate bune și la procesele stabile cu supradepășire și timp mort, în general mai greu de reglat.

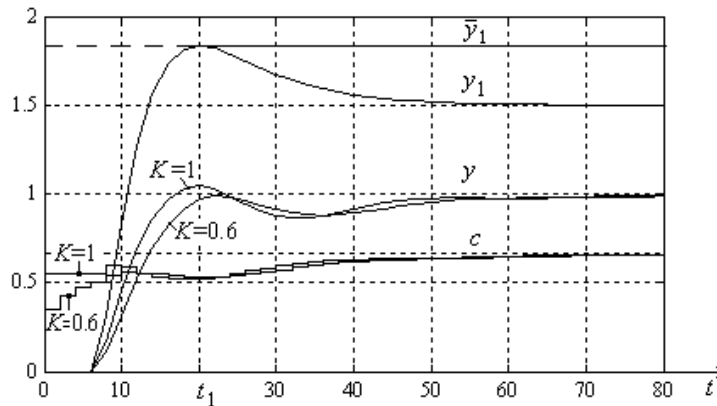


Fig. 12.29. Răspunsul indicial  $y_1$  al procesului cu funcția de transfer  $G_{P3}(s)$  și răspunsurile  $c$  și  $y$  ale sistemului de reglare la referință treaptă unitară.

■ Funcția `p0_imp4(T,K,KM,Ts,Tm,Kr)` este asociată procesului de tip integral cu funcția de transfer

$$G_{P4}(s) = \frac{e^{-3s}}{50s(2s+1)(4s+1)(6s+1)}.$$

Funcția are ca ultim argument de intrare factorul de proporționalitate  $Kr$  al blocului de reacție locală în jurul procesului (fig 12.26).

```
function[]=p0_imp4(T,K,KM,Ts,Tm,Kr)
t=0:T:85;
s=tf('s'); z=tf('z'); z1=z^-1;
P=1/(50*s)/(4*s+1)/(6*s+1)/(2*s+1); P.iodelay=3;
y1=step(P,t); plot(t,y1,'k'); hold on;
Pd=c2d(P,T); PCd=Pd/(1+Kr*Pd);
y0=step(PCd,t); plot(t,y0,'k'); hold on;
lm=round(Tm/T);
TM2=(Ts-Tm)/4.74;
p=exp(-T/TM2); Model=KM*(1-p)^2*z1^(lm+1)/(1-p*z1)^2;
```

```

K1=sqrt(K);
p2=exp(-K1*T/TM2); q2=1-(1-p2)/K1;
Ri=K/KM*(1-q2*z1)^2/(1-p2*z1)^2;
R1=Ri/(1-Ri*Model);
sra_y=R1*PCd/(1+R1*PCd);
y=step(sra_y,t); plot(t,y,'r');
sra_g=R1/(1+R1*PCd);
g=step(sra_g,t); plot(t,g,'b');
c=g-Kr*y;
plot(t,c,'g'); grid on;

```

Pentru  $K_r = 1, 2$ , procesul compensat are răspunsul indicial  $y_0(t)$  din fig. 12.30. Din acest răspuns indicial rezultă

$$K_p = 0,85; \quad T_s \approx 88; \quad \tau_p \approx 8.$$

Cu comenzile

```

p0_imc4(5, 1, 0.85, 88, 8, 1.2);
p0_imc4(5, 1.5, 0.85, 88, 8, 1.2);

```

s-au obținut respectiv răspunsurile din fig. 12.30 ale procesului de tip integral ( $y_1$ ), procesului compensat ( $y_0$ ) și sistemului de reglare ( $g$ ,  $c$  și  $y$ ), pentru perioada de eșantionare  $T = 5$  și două valori distincte ale parametrului de acordare ( $K = 1$  și  $K = 1.5$ ). Răspunsurile  $g(t)$  și  $c(t)$  au aceeași valoare la momentul  $t = 0+$ .

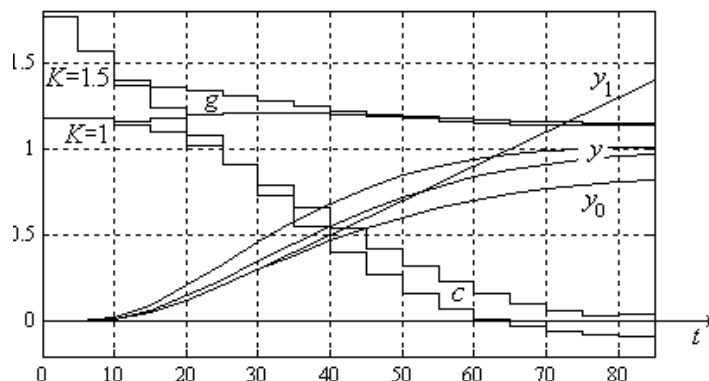


Fig. 12.30. Răspunsurile indiciale ale procesului de tip integral P4 ( $y_1$ ), procesului compensat ( $y_0$ ) și sistemului de reglare ( $g$ ,  $c$ ,  $y$ ).

■ Funcția  $p0\_imc5(T,K,KM,Ts,Tm,Kr)$  este asociată procesului instabil cu funcția de transfer

$$G_{P5}(s) = \frac{2e^{-2s}}{5(s+1)(8s-1)}.$$

```

function[]=p0_imc5(T,K,KM,Ts,Tm,Kr)
t=0:T:20;
s=tf('s');
z=tf('z'); z1=z^-1;
P=2/5/(8*s-1)/(s+1); P.iodelay=2;
y1=step(P,t); plot(t,y1,'k'); hold on;
Pd=c2d(P,T); PCd=Pd/(1+Kr*Pd);
t=0:T:50;
y0=step(PCd,t); plot(t,y0,'k'); hold on;
lm=round(Tm/T);
TM2=(Ts-Tm)/4.74;
p=exp(-T/TM2);
Model=KM*(1-p)^2*z1^(lm+1)/(1-p*z1)^2;
K1=sqrt(K);
p2=exp(-K1*T/TM2);
q2=1-(1-p2)/K1;
Ri=K/KM*(1-q2*z1)^2/(1-p2*z1)^2;
R1=Ri/(1-Ri*Model);
sra_y=R1*PCd/(1+R1*PCd); y=step(sra_y,t); plot(t,y,'r');
sra_g=R1/(1+R1*PCd); g=step(sra_g,t); plot(t,g,'b');
c=g-Kr*y;
plot(t,c,'g');
grid on;

```

Pentru  $K_r = 15,51$ , procesul compensat are răspunsul indicial  $y_0(t)$  din fig. 12.31, din care rezultă

$$K_p = 2.5; \quad T_s \approx 45; \quad \tau_p \approx 3.$$

Cu comenzile

```
p0_imc5(3, 1, 2.5, 45, 3, 2.9);
```

```
p0_imc5(3, 2, 2.5, 45, 3, 2.9);
```

s-au obținut respectiv răspunsurile din fig. 12.31 ale procesului instabil ( $y_1$ ), procesului compensat ( $y_0$ ) și sistemului de reglare ( $g$ ,  $c$  și  $y$ ), pentru perioada de eșantionare  $T = 3$  și două valori distincte ale parametrului de acordare ( $K = 1$  și  $K = 2$ ). Pentru valori ale lui  $K$  între 1,5 și 2,2, răspunsurile  $y$  ale sistemului de reglare la referință treaptă unitară au timpul de stabilizare mai mic decât 30, punând în evidență o foarte bună calitate a reglării procesului instabil.

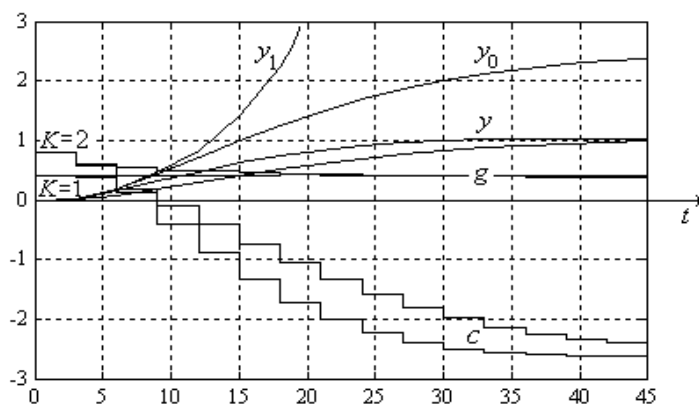


Fig. 12.31. Răspunsurile indiciale ale procesului instabil  $P_5$  ( $y_1$ ), procesului compensat ( $y_0$ ) și sistemului de reglare ( $g, c, y$ ).

### 12.8.3. Algoritmul de reglare $P_1$ -IMC

Varianta de reglare cu model intern  $P_1$ -IMC are regulatorul intern  $\mathbf{R}_i$  de ordinul zero, deci de tip static, cu factorul de proporționalitate egal cu inversul factorului de proporționalitate al modelului procesului (fig. 12.32), adică

$$G_{R_i}(s) = \frac{1}{K_M} = \frac{1}{G_M(0)}. \quad (79)$$

Pentru ca regulatorul să fie acordabil, în structura acestuia se înscriază un element static (pur proporțional) cu factorul de proporționalitate  $K$  având valoarea standard egală cu 1. În acest caz, regulatorul  $\mathbf{R}$  are funcția de transfer

$$G_R(s) = K \cdot \frac{\frac{1}{K_M}}{1 - \frac{1}{K_M} G_M(s)} = \frac{K}{G_M(0) - G_M(s)}. \quad (80)$$

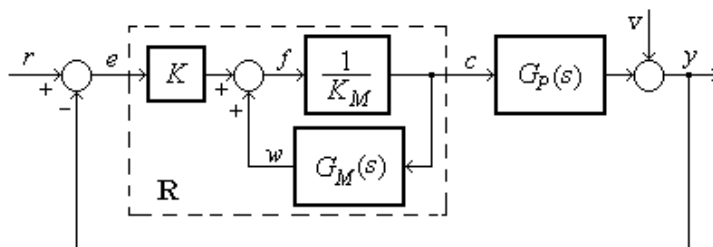


Fig. 12.32. Schema sistemului de reglare cu regulator  $P_1$ -IMC.

Deoarece  $G_R(s)$  are un pol în origine, regulatorul global  $\mathbf{R}$  este de tip *integral*, deci satisface *proprietatea erorii staționare nule* (dacă sistemul de reglare este stabil, atunci eroarea staționară este zero la referință și perturbație treaptă, indiferent de gradul de acuratețe a modelului procesului).

Deoarece, pentru  $K=1$ , algoritmul de reglare  $P_1$ -IMC este identic cu algoritmul de reglare  $P_0$ -IMC, *proprietatea comenzii treaptă* este, de asemenea, satisfăcută.

Fiind satisfăcută și *proprietatea raportului de magnitudine*, dacă sistemul de reglare este stabil și  $K_M=K_P$ , atunci semnalul de comandă la referință treaptă are valoarea inițială de  $K$  ori mai mare decât valoarea finală, adică  $c(0_+)/c(\infty)=K$ . O scurtă demonstrație a acestei proprietăți este dată în continuare. În conformitate cu proprietatea erorii staționare nule, răspunsul  $y(t)$  al sistemului de reglare la referință treaptă unitară are valoarea finală  $y(\infty)=1$ , deci

$$c(\infty) = \frac{1}{K_P}. \quad (81)$$

Pe de altă parte, deoarece procesul  $\mathbf{P}$  și modelul  $\mathbf{M}$  sunt sisteme strict proprii (care împiedică apariția efectului la momentul  $t=0_+$  pe cele două căi de reacție ale sistemului de reglare), valoarea inițială  $c(0_+)$  a semnalului de comandă la referință treaptă unitară este

$$c(0_+) = \frac{K}{K_M}. \quad (82)$$

Așadar, în cazul  $K_M=K_P$ , rezultă

$$\frac{c(0_+)}{c(\infty)} = K. \quad (83)$$

Regulatorul  $P_1$ -IMC utilizat la reglarea proceselor stabile de tip proporțional are, ca și regulatorul  $P_0$ -IMC, *patru parametri* principali: un parametru de acordare (factorul de proporționalitate  $K$ , cu valoarea standard 1) și trei parametri de model (factorul de proporționalitate  $K_M$ , timpul mort  $\tau_M$  și timpul de stabilizare  $T_S$ ).

**Remarca 1.** Ponderea parametrului de acordare  $K$  asupra intensității acțiunii de reglare este mai puternică la algoritmul  $P_1$ -IMC decât la  $P_0$ -IMC, mai ales în cazul proceselor cu timp mort. Uneori, această pondere este prea mică la algoritmul  $P_0$ -IMC (când creșterea lui  $K$  schimbă insensibil intensitatea acțiunii de reglare), respectiv prea mare la algoritmul  $P_1$ -IMC (când o creștere mică a lui  $K$  schimbă substanțial intensitatea acțiunii de reglare).

**Remarca 2.** Ca și la algoritmul  $P_0$ -IMC, proprietatea comenzii treaptă (pentru  $K=1$ ) constituie un mijloc eficient pentru *verificarea și corectarea în regim automat a parametrilor modelului* procesului, deoarece modul în care semnalul de comandă se abate de la forma treaptă oferă informație despre acuratețea setării parametrilor modelului. Metodologia de verificare/corectare a parametrilor modelului este identică cu cea prezentată la sistemele de reglare de tip  $P_0$ -IMC. Astfel, pentru  $K=1$  și referință treaptă, în cazul creșterii/scăderii intensității comenzii  $c(t)$  față de forma treaptă, corecția parametrilor modelului ( $K_M, \tau_M$  sau  $T_S$ ) trebuie făcută în sensul creșterii/scăderii valorii acestora.

**Remarca 3.** Ținând seama de ecuația cu diferențe (65) a discretizatului modelului și de schema regulatorului  $P_1$ -IMC din fig. 12.32, regulatorul numeric  $\mathbf{R}$  are ecuațiile în domeniul timpului:

$$\begin{cases} e_k = r_k - y_k \\ w_k = 2pw_{k-1} - p^2w_{k-2} + K_M(1-p)^2(c_{k-l_m-1} - c_0) \\ c_k = c_0 + \frac{K}{K_M}(e_k - e_0) + \frac{1}{K_M}w_k \end{cases} \quad (84)$$

Pentru ca trecerea regulatorului din starea MANUAL în starea AUTOMAT să se realizeze fără șoc se aplică următoarea *procedură de inițializare*: se inițializează  $w_{k-1}$  și  $w_{k-2}$  la valoarea zero,  $e_0$  la valoarea curentă a erorii  $e$ , iar  $c_0$  și  $c_{k-1}, c_{k-2}, \dots, c_{k-l_m-1}$  la valoarea curentă a semnalului de comandă  $c$ . Dacă însă variabila  $e_0$  este inițializată la valoarea zero, atunci regulatorul inițiază o acțiune imediată de reducere și eliminare a



erorii curente, similară celei în care referința  $r$  ar fi suferit o variație treaptă, egală cu valoarea curentă a erorii.

**Remarca 4.** Algoritmul  $P_1$ -IMC poate fi aplicat și la reglarea proceselor de tip integral sau chiar instabile, prin transformarea acestora în procese compensate stabile și de tip proporțional, cu ajutorul unei legături locale de reacție de tip pur proporțional – fig. 12.33. În această variantă extinsă, regulatorul are *cinci parametri principali*: un parametru de acordare (factorul de proporționalitate  $K$ , cu valoarea standard 1), un parametru de compensare a procesului (factorul de reacție  $K_r$ ) și trei parametri ai modelului procesului compensat (factorul de proporționalitate  $K_M$ , timpul mort  $\tau_M$  și timpul de stabilizare  $T_s$ ).

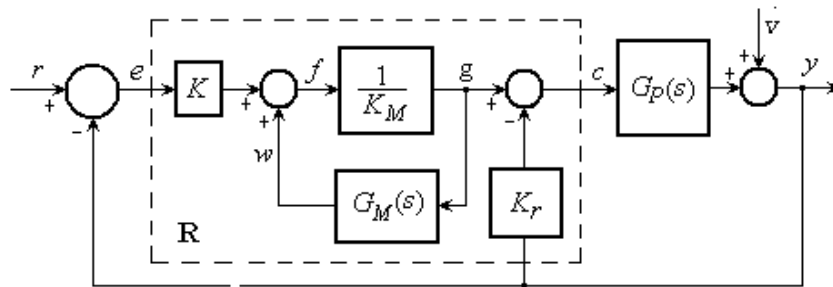


Fig. 12.33. Schema sistemului de reglare cu proces compensat și regulator  $P_1$ -IMC.

Dacă parametrii modelului procesului compensat sunt bine aleși, atunci răspunsul  $c(t)$  al sistemului de reglare la referință treaptă și  $K = 1$  are forma apropiată de forma treaptă. Abaterea de la această formă permite operatorului uman să corecteze convenabil parametrii modelului procesului compensat.

Ecuțiile regulatorului numeric  $P_1$ -IMC cu reacție locală în jurul procesului au următoarea formă:

$$\begin{cases} e_k = r_k - y_k \\ w_k = 2pw_{k-1} - p^2w_{k-2} + K_M(1-p)^2(g_{k-l_m-1} - c_0) \\ g_k = c_0 + \frac{K}{K_M}(e_k - e_0) + \frac{1}{K_M}w_k \\ c_k = g_k - K_r(y_k - y_0) \end{cases}, \quad (85)$$

unde  $e_0$ ,  $c_0$  și  $y_0$  sunt valorile inițiale ale variabilelor  $e$ ,  $c$  și  $y$ .

Pentru ca trecerea regulatorului din starea MANUAL în starea AUTOMAT să se realizeze fără șoc se aplică următoarea *procedură de inițializare*: se inițializează  $w_{k-1}$  și  $w_{k-2}$  la valoarea zero,  $e_0$  la valoarea curentă a erorii  $e$ ,  $y_0$  la valoarea curentă a mărimii reglate  $y$ , iar  $c_0$  și  $g_{k-1}, g_{k-2}, \dots, g_{k-l_m-1}$  la valoarea curentă a semnalului de comandă  $c$ . Aceeași operație de inițializare trebuie efectuată la modificarea parametrilor regulatorului în regim automat.

■ Din funcțiile

**p0\_imc1**(T,K,KM,Ts,Tm),  
**p0\_imc2**(T,K,KM,Ts,Tm),  
**p0\_imc3**(T,K,KM,Ts,Tm),

realizate în MATLAB pentru studiul sistemelor de reglare tip P<sub>0</sub>-IMC (cu regulator intern de ordinul doi), prin înlocuirea liniilor

```
K1=sqrt(K); p2=exp(-K1*T/TM); q2=1-(1-p2)/K1;
Ri=K/KM*(1-q2*z1)^2/(1-p2*z1)^2;
R=Ri/(1-Ri*Model);
```

cu linia

```
Ri=1/KM; R=K*Ri/(1-Ri*Model);
```

se obțin respectiv funcțiile

**p1\_imc1**(T,K,KM,Ts,Tm),  
**p1\_imc2**(T,K,KM,Ts,Tm),  
**p1\_imc3**(T,K,KM,Ts,Tm),

pentru studiul sistemelor de reglare cu regulator P<sub>1</sub>-IMC.

Cu comenzile

```
p1_imc1(2, 1, 1.5, 60, 12); p1_imc1(2, 1.15, 1.5, 60, 12);
p1_imc2(2, 1, 1.5, 45, 15); p1_imc2(2, 1.15, 1.5, 45, 15);
p1_imc3(2, 1, 1.82, 20, 6); p1_imc3(2, 0.8, 1.82, 20, 6);
```

s-au obținut răspunsurile din figurile 12.34, 12.35 și 12.36 asociate respectiv răspunsurilor sistemelor de reglare a acelorași procese cu regulator tip P<sub>0</sub>-IMC din figurile 12.27, 12.28 și 12.29.

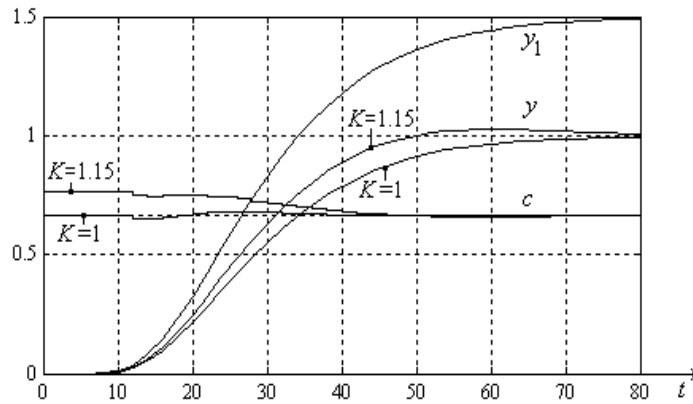


Fig. 12.34. Răspunsul indicial  $y_1$  al procesului cu funcția de transfer  $G_{P1}(s)$  și răspunsurile  $c$  și  $y$  ale sistemului de reglare la referință treaptă unitară.

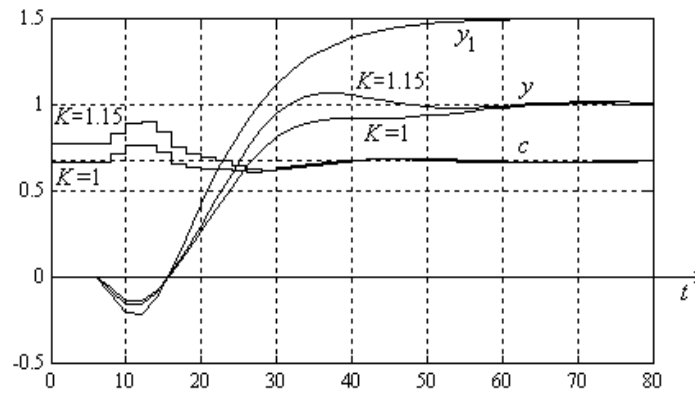


Fig. 12.35. Răspunsul indicial  $y_1$  al procesului cu funcția de transfer  $G_{P2}(s)$  și răspunsurile  $c$  și  $y$  ale sistemului de reglare la referință treaptă unitară.

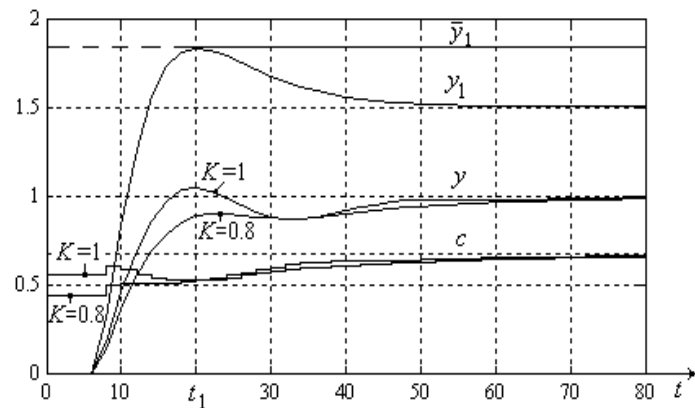


Fig. 12.36. Răspunsul indicial  $y_1$  al procesului cu funcția de transfer  $G_{P3}(s)$  și răspunsurile  $c$  și  $y$  ale sistemului de reglare la referință treaptă unitară.

Performanțele reglării cu cele două tipuri de algoritmi de reglare sunt comparabile. Principala deosebire este dată de ponderea parametrului de acordare  $K$  asupra operației de reglare. Influența lui  $K$  este semnificativ mai mare la algoritmul de tip  $P_1$ -IMC, unde răspunsul  $y(t)$  pentru  $K = 1.15$  (fig. 12.34) este practic identic cu cel obținut cu algoritmul tip  $P_0$ -IMC pentru  $K = 1.7$  (fig. 12.27).

■ Din funcțiile

$$\mathbf{p0\_imc4}(T,K,KM,Ts,Tm,Kr),$$

$$\mathbf{p0\_imc5}(T,K,KM,Ts,Tm,Kr),$$

realizate în MATLAB pentru studiul sistemelor de reglare tip  $P_0$ -IMC (cu regulator intern de ordinul doi și proces de tip integral, respectiv instabil), prin înlocuirea liniilor

$$K1=\text{sqrt}(K); \quad p2=\exp(-K1*T/TM); \quad q2=1-(1-p2)/K1;$$

$$Ri=K/KM*(1-q2*z1)^2/(1-p2*z1)^2;$$

$$R1=Ri/(1-Ri*Model);$$

cu linia

$$Ri=1/KM; \quad R1=K*Ri/(1-Ri*Model);$$

se obțin respectiv funcțiile

$$\mathbf{p1\_imc4}(T,K,KM,Ts,Tm,Kr),$$

$$\mathbf{p1\_imc5}(T,K,KM,Ts,Tm,Kr),$$

pentru studiul sistemelor de reglare cu regulator  $P_1$ -IMC.

Cu comenzile

$$\mathbf{p1\_imc4}(5, 1, 0.88, 90, 8, 1.2); \quad \mathbf{p1\_imc4}(5, 1.2, 0.88, 90, 8, 1.2);$$

$$\mathbf{p1\_imc5}(3, 1, 2.5, 45, 3, 2.9); \quad \mathbf{p1\_imc5}(3, 1.3, 2.5, 45, 3, 2.9);$$

s-au obținut respectiv răspunsurile din figurile 12.37 și 12.38, asociate respectiv răspunsurilor din figurile 12.30 și 12.31 (ale sistemelor de reglare a acelorași procese cu regulator tip  $P_0$ -IMC).

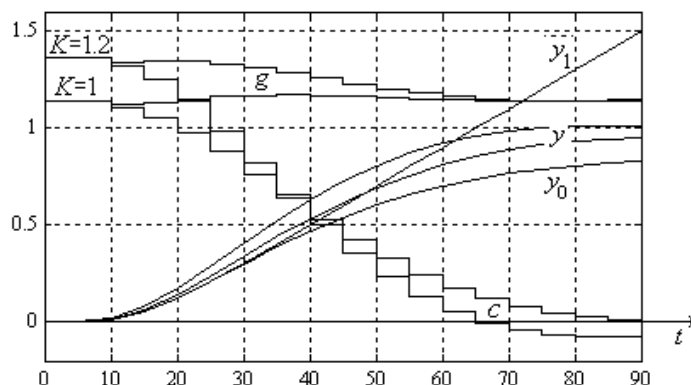


Fig. 12.37. Răspunsurile indiciale ale procesului de tip integral  $P_4$  ( $y_1$ ), procesului compensat ( $y_0$ ) și sistemului de reglare ( $g, c, y$ ).

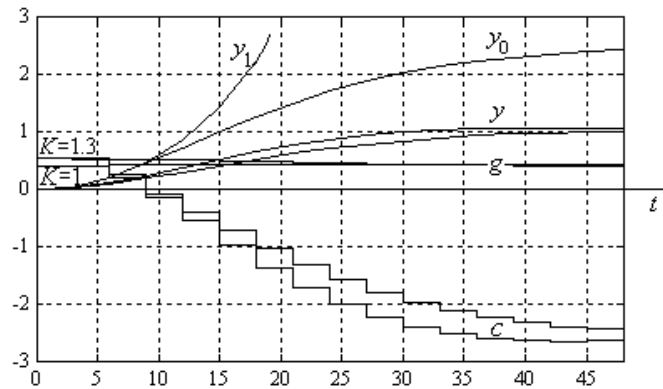


Fig. 12.38. Răspunsurile indiciale ale procesului de tip integral P5 ( $y_1$ ), procesului compensat ( $y_0$ ) și sistemului de reglare ( $g, c, y$ ).

#### 12.8.4. Algoritm de reglare P-IMC

Algoritm de reglare P-IMC, denumit și  $P_\alpha$ -IMC (fig. 12.38), este o extindere a algoritmilor  $P_0$ -IMC și  $P_1$ -IMC, în scopul asigurării unei influențe moderate a factorului de acordare  $K$  asupra intensității acțiunii de reglare.

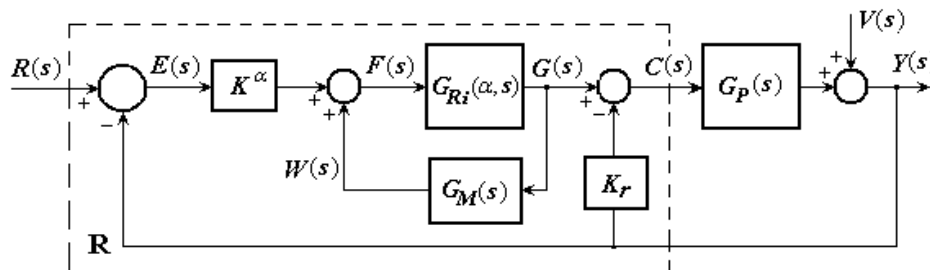


Fig. 12.38. Schema sistemului de reglare cu proces compensat și regulator  $P_\alpha$ -IMC.

Algoritm de reglare  $P_\alpha$ -IMC are regulatorul intern cu funcția de transfer

$$G_{Ri}(s) = \frac{1}{K_M} \left( \frac{T_{M2}s + 1}{T_{M2}s / K^{\frac{1-\alpha}{2}} + 1} \right)^2, \quad \alpha \in [0, 1], \quad (86)$$

și blocul pur proporțional din fața acestuia cu factorul de proporționalitate  $K^\alpha$ .

Sistemul de reglare cu regulator P-IMC satisface proprietatea erorii staționare nule, proprietatea comenzii treaptă și proprietatea raportului de

magnitudine. Influența factorului de acordare  $K$  al algoritmului de reglare P-IMC asupra acțiunii de reglare este cu atât mai puternică cu cât factorul de ponderare  $\alpha$  este mai mare. Valoarea recomandată în aplicații practice este  $\alpha=0,2$ .

La fel ca la reglatoarele P<sub>0</sub>-IMC și P<sub>1</sub>-IMC, regulatorul P-IMC are *cinci parametri*: un parametru de acordare (factorul de proporționalitate  $K$ , cu valoarea standard 1), un parametru de compensare a procesului (factorul de reacție  $K_r$ ) și trei parametri ai modelului procesului compensat (factorul de proporționalitate  $K_M$ , timpul mort  $\tau_M$  și timpul de stabilizare  $T_s$ ).

Determinarea experimentală a parametrilor regulatorului și corecția lor în regim automat se face ca la regulatorul P<sub>0</sub>-IMC.

În conformitate cu (67), putem considera cu suficientă precizie că discretizatului regulatorului intern (86) are funcția de transfer

$$G_{R_i}(z) = \frac{K_1^2(1 - q_2z^{-1})^2}{K_M(1 - p_2z^{-1})^2}, \quad (87)$$

unde

$$K_1 = K^{(1-\alpha)/2}, \quad p_2 = e^{-K_1 T / T_{M2}}, \quad q_2 = 1 - \frac{1 - p_2}{K_1}. \quad (88)$$

Avînd în vedere (87) și fig. 12.38, ecuația cu diferențe a regulatorului intern poate fi scrisă sub forma

$$g_k - 2p_2g_{k-1} + p_2^2g_{k-2} = \frac{K^{1-\alpha}}{K_M}(f_k - 2q_2f_{k-1} + q_2^2f_{k-2}). \quad (89)$$

Prin urmare, ecuațiile *regulatorului numeric R* cu reacție locală în jurul procesului au următoarea formă:

$$\begin{cases} e_k = r_k - y_k \\ w_k = 2pw_{k-1} - p^2w_{k-2} + K_M(1-p)^2(g_{k-l_m-1} - c_0) \\ f_k = K^\alpha(e_k - e_0) + w_k \\ g_k = c_0 + 2p_2(g_{k-1} - c_0) - p_2^2(g_{k-2} - c_0) + \frac{K^{1-\alpha}}{K_M}(f_k - 2q_2f_{k-1} + q_2^2f_{k-2}) \\ c_k = g_k - K_r(y_k - y_0) \end{cases}, \quad (90)$$

unde  $e_0$ ,  $c_0$  și  $y_0$  sunt valorile inițiale ale variabilelor  $e$ ,  $c$  și  $y$ .

■ Funcția **p\_imc1** realizează, în MATLAB, reprezentarea grafică a răspunsului indicial  $y_1(t)$  al procesului cu funcția de transfer

$$G_{p1}(s) = \frac{1,5e^{-6s}}{(3s+1)(4s+1)(8s+1)(10s+1)},$$

precum și a mărimilor  $c(t)$  și  $y(t)$  ale sistemului de reglare cu regulator P-IMC la modificarea treaptă unitară a referinței. Funcția are ca argumente de intrare perioada de eșantionare  $T$ , factorul de acordare al regulatorului  $K$ , parametrii modelului ( $KM$  – factorul de proporționalitate,  $Ts$  – timpul de stabilizare,  $Tm$  – timpul mort), factorul de reacție  $Kr$  și factorul de ponderare  $a$ .

```
function[]=p_imc1(T,K,KM,Ts,Tm,Kr,a)
t=0:T:80;
s=tf('s');
z=tf('z'); z1=z^-1;
P=1.5/(3*s+1)/(4*s+1)/(8*s+1)/(10*s+1); P.iodelay=6;
y1=step(P,t); plot(t,y1,'k'); hold on;
Pd=c2d(P,T); PCd=Pd/(1+Kr*Pd);
y0=step(PCd,t); plot(t,y0, 'k'); hold on; grid on;
lm=round(Tm/T);
TM2=(Ts-Tm)/4.74;
p=exp(-T/TM2); Model=KM*(1-p)^2*z1^(lm+1)/(1-p*z1)^2;
K1=K^((1-a)/2); p2=exp(-K1*T/TM2); q2=1-(1-p2)/K1;
Ri=K^(1-a)/KM*(1-q2*z1)^2/(1-p2*z1)^2;
R1=K^a*Ri/(1-Ri*Model);
sra_y=R1*PCd/(1+R1*PCd);
y=step(sra_y,t); plot(t,y,'r');
sra_g=R1/(1+R1*PCd);
g=step(sra_g,t); plot(t,g,'b');
c= g-Kr*y;
plot(t,c,'g');
grid on
```

Pentru  $a=0$  și  $a=1$ , din funcția **p\_imc1** se obțin respectiv funcțiile **p0\_imc1** și **p1\_imc1**.

Pentru  $a=0.2$ , perioada de eșantionare  $T=2$  și două valori distincte ale parametrului de acordare  $K$ , cu comenzile

```
p_imc1(2, 1, 1.5, 60, 12, 0, 0.2); p_imc1(2, 1.5, 1.5, 60, 12, 0, 0.2);
```

s-au obținut reprezentările grafice din fig. 12.39. Compararea acestora cu graficele similare (pentru același proces) din fig. 12.27 și fig. 12.34, realizate respectiv cu algoritmi de reglare  $P_0$ -IMC și  $P_1$ -IMC, evidențiază rolul factorului  $\alpha$  asupra modului în care factorul de acordare  $K$  influențează intensitatea acțiunii de reglare. Influența este slabă pentru  $\alpha=0$ , moderată pentru  $\alpha=0.2$  și puternică pentru  $\alpha=1$ . Astfel, cele mai bune răspunsuri  $y(t)$  pentru  $\alpha=0$ ,  $\alpha=0.2$  și  $\alpha=1$  au fost obținute respectiv pentru  $K=1.7$  (fig. 12.27),  $K=1,5$  (fig. 12.39) și  $K=1,15$  (fig. 12.34).

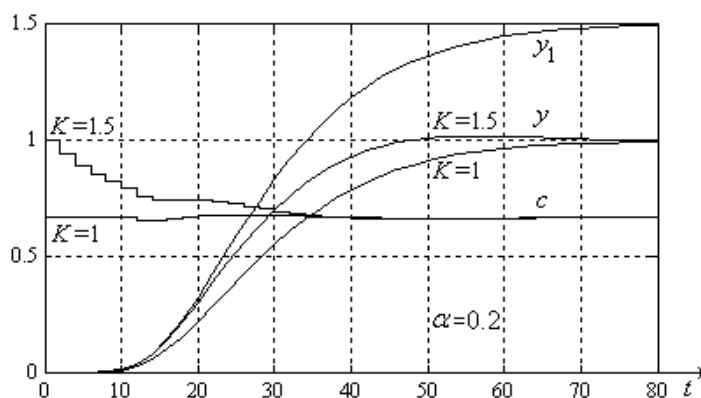


Fig. 12.39. Răspunsul indicial  $y_1$  al procesului cu funcția de transfer  $G_{P1}(s)$  și răspunsurile  $c$  și  $y$  ale sistemului cu algoritm de reglare  $P_{0,2}$ -IMC la referință treaptă unitară.

Prin înlocuirea liniei de definire a procesului, din funcția `p_imc1` se obțin funcțiile **p\_imc2**, **p\_imc3**, **p\_imc4** și **p\_imc5** pentru reglarea proceselor cu funcțiile de transfer  $G_{P2}(s)$ ,  $G_{P3}(s)$ ,  $G_{P4}(s)$  și  $G_{P5}(s)$ . La funcția **p\_imc5**, ca și la funcția **p0\_imc5**, variabila timp se alege  $t=0:T:20$  - pentru răspunsul indicial al procesului instabil și  $t=0:T:50$  - pentru toate celelalte răspunsuri.

Cu comenzile

`p_imc2(2, 1, 1.5, 45, 15, 0, 0.2); p_imc2(2, 1.4, 1.5, 45, 15, 0, 0.2);`

`p_imc3(2, 1, 1.82, 20, 6, 0, 0.2); p_imc3(2, 0.6, 1.82, 20, 6, 0, 0.2);`

`p_imc4(5, 1, 0.85, 88, 8, 1.2, 0.2); p_imc4(5, 1.35, 0.85, 88, 8, 1.2, 0.2);`

`p_imc5(3, 1, 2.5, 45, 3, 2.9, 0.2); p_imc5(3, 1.8, 2.5, 45, 3, 2.9, 0.2);`

s-au obținut reprezentările grafice din figurile 12.40, 12.41, 12.42 și 12.43, asociate sistemelor de reglare a proceselor cu funcțiile de transfer  $G_{P2}(s)$ ,  $G_{P3}(s)$ ,  $G_{P4}(s)$  și  $G_{P5}(s)$ , cu regulatorul de tip  $P_\alpha$ -IMC și  $\alpha = 0,2$ .



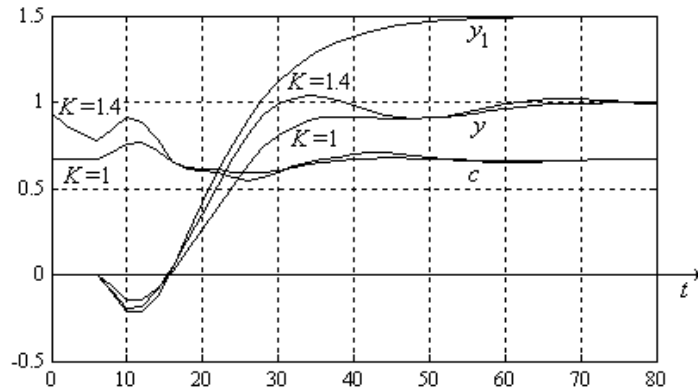


Fig. 12.40. Răspunsul indicial  $y_1$  al procesului cu funcția de transfer  $G_{P2}(s)$  și răspunsurile  $c$  și  $y$  ale sistemului cu regulator  $P_{0,2}$ -IMC la referință treaptă unitară.

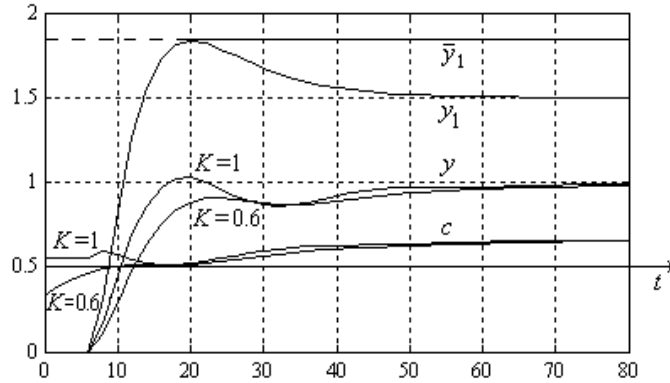


Fig. 12.41. Răspunsul indicial  $y_1$  al procesului cu funcția de transfer  $G_{P3}(s)$  și răspunsurile  $c$  și  $y$  ale sistemului cu regulator  $P_{0,2}$ -IMC la referință treaptă unitară.

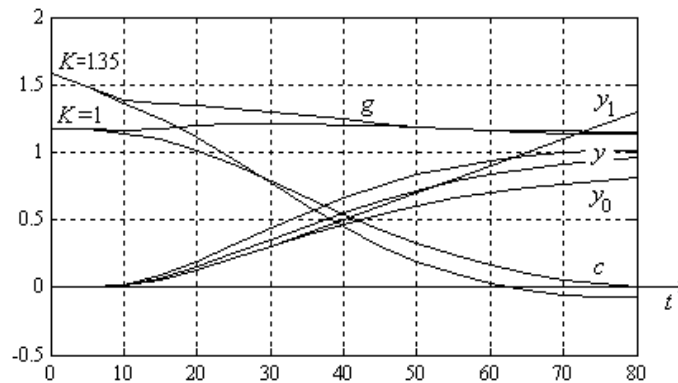


Fig. 12.42. Răspunsurile indiciale ale procesului de tip integral  $P4$  ( $y_1$ ), procesului compensat ( $y_0$ ) și sistemului de reglare cu regulator  $P_{0,2}$ -IMC ( $g$ ,  $c$ ,  $y$ ).

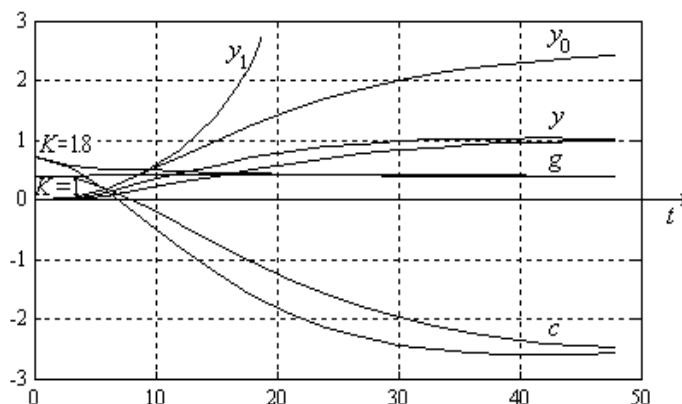


Fig. 12.43. Răspunsurile indiciale ale procesului instabil  $P5$  ( $y_1$ ), procesului compensat ( $y_0$ ) și sistemului de reglare cu regulator  $P_{0,2}$ -IMC ( $g$ ,  $c$ ,  $y$ ).

## 12.9. APLICAȚII DE AUTOCONTROL

### ◆ C12.1. Utilizând funcția Matlab

**p\_imc1a**(T,K,KM,Ts,Tm,Kr,a),

obținută din **p\_imc1**(T,K,KM,Ts,Tm,Kr,a) înlocuind  $t=0:T:80$  cu  $t=0:T:50$  și linia

$P=1.5/(3*s+1)/(4*s+1)/(8*s+1)/(10*s+1)$ ; P.iodelay=6;

cu

$P=1.2((2*s+1)/(4*s+1)/(6*s+1)/(8*s+1))$ ; P.iodelay=5;

să se reprezinte grafic răspunsul indicial  $y_1(t)$  al procesului cu funcția de transfer

$$G_{P1}(s) = \frac{1.2 e^{-5s}}{(2s+1)(4s+1)(6s+1)(8s+1)}$$

din care să se determine parametrii modelului  $KM$ ,  $Ts$  și  $Tm$ . Să se reprezinte grafic, în același sistem de coordonate, pentru  $T=2$  și respectiv  $a=0$ ,  $a=0.2$  și  $a=1$ , răspunsurile  $c(t)$  și  $y(t)$  ale sistemului de reglare la modificarea treaptă unitară a referinței, alegându-se  $K$  astfel încât răspunsul  $y(t)$  să aibă un suprareglaj în gama 1...3%.

### ◆ C12.2. Utilizând funcția Matlab

**p\_imc4a**(T,K,KM,Ts,Tm,Kr,a),

obținută din **p\_imc1**(T,K,KM,Ts,Tm,Kr,a) înlocuind  $t=0:T:80$  cu  $t=0:T:60$  și linia

$P=1.5/(3*s+1)/(4*s+1)/(8*s+1)/(10*s+1)$ ; P.iodelay=6;

cu

$P=1/30/s/(2*s+1)/(6*s+1)$ ; P.iodelay=3;

să se reprezinte grafic răspunsul indicial  $y_1(t)$  al procesului cu funcția de transfer

$$G_{P1}(s) = \frac{e^{-3s}}{30s(2s+1)(6s+1)},$$

precum și răspunsul indicial  $y_0(t)$  al procesului compensat cu  $K_r=1.1$ . Apoi să se reprezinte grafic, în același sistem de coordonate, pentru  $T=2$  și respectiv  $a=0$ ,  $a=0.2$  și  $a=1$ , răspunsurile  $c(t)$  și  $y(t)$  ale sistemului de reglare la modificarea treaptă unitară a referinței, alegându-se  $K$  astfel încât răspunsul  $y(t)$  să aibă un suprareglaj în gama 1...3%.

# 13

---

## PROPRIETĂȚI STRUCTURALE ALE SISTEMELOR LINIARE

---

Teoria structurală a sistemelor operează în mod explicit cu conceptul de *stare*, esențial pentru caracterizarea internă a sistemului la momentul de timp curent. Reamintim că vectorul de stare sintetizează întreaga informație utilă referitoare la evoluția anterioară a sistemului, astfel că starea  $X$  și ieșirea  $Y$  ale unui sistem determinist sunt univoc determinate la momentul  $t > 0$  de starea inițială  $X_0$  și intrarea  $U_{[0,t]}$ .

În cele ce urmează ne vom referi la sistemele multivariabile liniare, invariante și fără timp mort, continue sau discrete, având modelul structural tip I-S-E:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \\ Y(t) = CX(t) + DU(t) \end{cases}, \quad t \in \mathbf{R}, \quad (1)$$

respectiv

$$\begin{cases} X(t+1) = AX(t) + BU(t) \\ Y(t) = CX(t) + DU(t) \end{cases}, \quad t \in \mathbf{Z}. \quad (2)$$

La ambele modele, vectorii de intrare  $U$ , de stare  $X$  și de ieșire  $Y$  au respectiv dimensiunile  $m$ ,  $n$  și  $p$ . Ordinul (dimensiunea) sistemului este  $n$ .

### 13.1. CONTROLABILITATEA

*Controlabilitatea* (reglabilitatea) este acea proprietate structurală a unui sistem liniar, stabil sau instabil, care permite reglarea acestuia prin reacție după stare, cu performanțe dinamice foarte bune (oricât de bune la sistemele continue), prin alocarea convenabilă a spectrului sistemului (format din totalitatea valorilor proprii ale matricei pătrate  $A$ ).

### 13.1.1. Controlabilitatea stării

Prin definiție, o stare  $X_1$  este *controlabilă* (reglabilă) dacă există o comandă  $U$  care s-o transfere în origine într-un interval de timp finit. Starea  $X_1$  este *accesibilă* dacă există o comandă  $U$  care să transfere originea în  $X_1$  într-un interval de timp finit.

Ținând seama de expresia funcției de tranziție a stării *sistemului continuu*  $\Sigma(A, B, C, D)$  – relația (5) de la Cap. 4, starea  $X_1$  a este controlabilă dacă există  $t_1 > 0$  și  $U_{[0, t_1]}$  astfel încât

$$0 = e^{-At_1} X_1 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B U(\tau) d\tau,$$

adică

$$\int_0^{t_1} e^{-A\tau} B U(\tau) d\tau = -X_1. \quad (3)$$

Ținând seama de expresia funcției de tranziție a stării *sistemului discret*  $\Sigma_d(A, B, C, D)$  – relația (42) de la Cap. 4, starea  $X_1$  este controlabilă dacă există un număr finit  $k_1$  de pași de comandă, anume

$$\{U(0), U(1), \dots, U(k_1 - 1)\},$$

astfel încât

$$0 = A^{k_1} X_1 + (A^{k_1-1} B U(0) + A^{k_1-2} B U(1) + \dots + B U(k_1 - 1)).$$

adică

$$A^{-1} B U(0) + A^{-2} B U(1) + \dots + A^{-k_1} B U(k_1 - 1) = -X_1. \quad (4)$$

La ambele tipuri de sisteme, matricea

$$C_n = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1} B], \quad C_n \in \mathbf{R}^{n \times mn}, \quad (5)$$

reprezintă *matricea de controlabilitate* a sistemului.

Pe baza relațiilor (3) și (4) de calcul al stării  $X_1$ , se poate demonstra (mai ușor în cazul sistemelor discrete)

**Teorema controlabilității stării.** *O stare  $X_1$  este controlabilă dacă și numai dacă poate fi scrisă sub forma  $X_1 = C_n W$ , unde  $W \in \mathbf{R}^{mn}$ .*

Conform teoremei de controlabilitate a stării, o stare  $X_1$  este controlabilă dacă și numai dacă aparține imaginii matricei de controlabilitate  $C_n$ , adică

$$X_1 \in \text{Im } C_n.$$

unde

$$\text{Im } C_n \stackrel{\Delta}{=} \{X \in \mathbf{R}^n \mid X = C_n W, W \in \mathbf{R}^{mn}\}, \quad (6)$$

reprezintă *subspațiul controlabil* al sistemului (sau al matricei de controlabilitate  $C_n$ ), cu dimensiunea

$$n_c = \text{rang } C_n \leq n. \quad (7)$$

**Observații. 1°.** In cazul unui *sistem liniar continuu*, dacă starea  $X_1$  este controlabilă, atunci există o comandă  $U_{[0,t_1]}$  care transferă starea  $X_1$  în origine într-un timp  $t_1$  *oricât de mic*. Din cauza incertitudinii modelului sistemului, acest rezultat teoretic nu poate fi însă riguros implementat în aplicațiile practice. Dar și în cazul ipotetic al unui model perfect, reducerea excesivă a timpului de transfer ar necesita utilizarea unui semnal de comandă foarte „ascuțit” (cu forma apropiată de cea a impulsului Dirac), greu de realizat fizic și inacceptabil din punct de vedere practic. La *sistemele liniare discrete* de ordinul  $n$  și cu perioada 1, timpul minim în care starea controlabilă  $X_1$  este tranferată în origine este cuprins între 1 și  $n$ .

**2°.** In cazul  $\text{rang } C_n = n$ , subspațiul controlabil coincide cu  $\mathbf{R}^n$ , deci toate stările  $X \in \mathbf{R}^n$  sunt controlabile. Dacă însă  $\text{rang } C_n < n$ , atunci stările controlabile aparțin subspațiului controlabil  $\text{Im } C_n$ , iar stările necontrolabile aparțin mulțimii  $\mathbf{R}^n \setminus \text{Im } C_n$ , care nu formează un subspațiu vectorial. Există însă un cel mai mare subspațiu vectorial format din elemente ale mulțimii stărilor necontrolabile  $\mathbf{R}^n \setminus \text{Im } C_n$ , notat prin

$$\text{Ker } C_n^T \stackrel{\Delta}{=} \{X \in \mathbf{R}^n \mid C_n^T X = 0\} \quad (8)$$

și cu dimensiunea

$$n_{nc} = n - n_c, \quad (9)$$

numit *subspațiul necontrolabil* al sistemului sau al matricei de controlabilitate  $C_n$  (fig. 13.1). Deoarece  $n_c + n_{nc} = n$ , subspațiul controlabil și subspațiul necontrolabil sunt *complementare* în  $\mathbf{R}^n$ . Orice stare  $X \in \mathbf{R}^n$  poate fi scrisă în mod unic ca sumă a două stări ce aparțin celor două subspații vectoriale, adică

$$X = X' + X''$$

unde  $X' \in \text{Im } C_n$  și  $X'' \in \text{Ker } C_n^T$ . O stare  $X \in \mathbf{R}^n$  necontrolabilă aparține subspațiului necontrolabil sau nu aparține vreunuia din cele două subspații vectoriale.

Subspațiul controlabil și subspațiul necontrolabil sunt *ortogonale*, deoarece produsul scalar al oricăror două elemente aparținând celor două subspații este nul. Astfel, dacă  $X_1$  aparține subspațiului controlabil, iar  $X_2$  aparține subspațiului necontrolabil, atunci

$$X_1^T X_2 = X_2^T X_1 = 0.$$

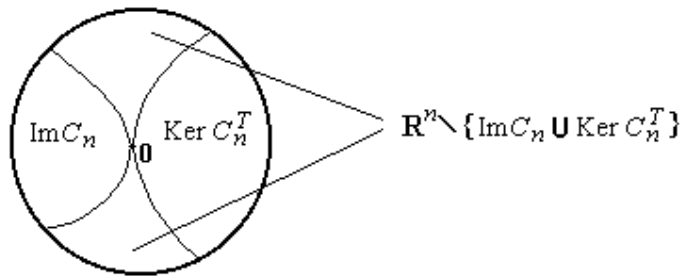


Fig. 13.1. Subspațiul controlabil  $\text{Im } C_n$  și subspațiul necontrolabil  $\text{Ker } C_n^T$ .

**3<sup>o</sup>.** Determinarea unui subspațiu vectorial este echivalentă cu aflarea unei baze a acestuia. O bază  $B_c$  a subspațiului controlabil  $\text{Im } C_n$  este dată de  $n_c$  coloane liniar independente ale matricei de controlabilitate  $C_n$ , iar o bază  $B_{nc}$  a subspațiului necontrolabil este dată de  $n_{nc}$  vectori liniar independenți  $v_i$  care verifică ecuația

$$B_c^T v_i = 0. \quad (10)$$

De notat faptul că orice element al subspațiului controlabil sau al subspațiului necontrolabil poate fi reprezentat ca o combinație liniară a vectorilor  $n$ -dimensionali care formează baza subspațiului respectiv.

### 13.1.2. Controlabilitatea sistemului

Prin definiție, un sistem este *controlabil* (reglabil) atunci când toate stările  $X \in \mathbf{R}^n$  sunt controlabile. Din teorema de controlabilitate a stării rezultă imediat

**Teorema controlabilității sistemului.** *Un sistem liniar de ordinul  $n$  este controlabil dacă și numai dacă matricea de controlabilitate are rangul  $n$ , adică*

$$\text{rang } C_n = n. \quad (11)$$

**Observația 1<sup>o</sup>.** Proprietatea de controlabilitate este asociată exclusiv ecuației de stare a sistemului, adică perechii de matrice  $(A, B)$ .

**Observația 2<sup>0</sup>.** La un sistem liniar controlabil, oricare ar fi două stări  $X_1, X_2 \in \mathbf{R}^n$ , există o comandă  $U_{[0, t_1]}$  care să transfere sistemul din starea inițială  $X_1$  în starea  $X_2$  într-un timp  $t_1$  oricât de mic (dacă sistemul este continuu), sau cuprins între 1 și  $n$  (dacă sistemul este discret). În cazul unui sistem continuu controlabil, demonstrația se reduce la a arăta că dacă  $U'_{[0, t_1]}$  transferă starea  $X_1$  în origine, iar  $U''_{[0, t_1]}$  transferă starea  $-e^{-At_1}X_2$  în origine, atunci comanda  $U_{[0, t_1]} = U' + U''$  va transfera starea  $X_1$  în starea  $X_2$ . Într-adevăr, ținând seama de (3), avem

$$-X_1 = \int_0^{t_1} e^{-A\tau} B U'(\tau) d\tau, \quad e^{-At_1} X_2 = \int_0^{t_1} e^{-A\tau} B U''(\tau) d\tau,$$

iar prin însumare, obținem

$$-X_1 + e^{-At_1} X_2 = \int_0^{t_1} e^{-A\tau} B U(\tau) d\tau,$$

adică

$$X_2 = e^{At_1} X_1 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B U(\tau) d\tau,$$

care exprimă faptul că starea  $X_1$  poate fi transferată în starea  $X_2$  în timpul  $t_1$  cu comanda  $U = U' + U''$ . Demonstrația este similară în cazul sistemelor discrete.

Din proprietatea demonstrată rezultă că la sistemele liniare invariante (cu parametri constanți), controlabilitatea și accesibilitatea sunt proprietăți identice.

**Observația 3<sup>0</sup>.** Între matricele de controlabilitate  $C_n$  și  $\bar{C}_n$  a două sisteme  $\Sigma(A, B, C, D)$  și  $\bar{\Sigma}(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$  echivalente I-S-E există relația

$$C_n = S \bar{C}_n, \quad (12)$$

similară relației de transformare a stării  $X = S \bar{X}$ . Într-adevăr, din teorema de echivalență I-S-E (paragraful 4.4), rezultă:

$$\begin{aligned} S \bar{C}_n &= S [\bar{B} \quad \bar{A} \bar{B} \quad \dots \quad \bar{A}^{n-1} \bar{B}] \\ &= S [S^{-1} B \quad S^{-1} A S \cdot S^{-1} B \quad \dots \quad S^{-1} A^{n-1} S \cdot S^{-1} B] \\ &= [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1} B] = C_n. \end{aligned}$$

Deoarece matricea pătrată  $S$  de transformare a stării este nesingulară, din (12) rezultă

$$\text{rang } C_n = \text{rang } \bar{C}_n, \quad (13)$$



care exprimă proprietatea de conservare prin echivalență a controlabilității, în sensul că subspațiile controlabile a două sisteme echivalente I-S-E au aceeași dimensiune, deci ambele sisteme sunt fie controlabile, fie necontrolabile.

**Observația 4<sup>0</sup>.** Teorema următoare exprimă posibilitatea descompunerii unui sistem necontrolabil în două subsisteme, unul controlabil și celălalt necontrolabil.

**Teorema descompunerii unui sistem necontrolabil.** Fie  $\Sigma(A, B, C, D)$  un sistem liniar necontrolabil de ordinul  $n$ , cu

$$\text{rang } C_n = n_c < n.$$

Efectuând transformarea de stare  $X = S\bar{X}$  cu

$$S = [B_c \ B_{nc}], \quad (14)$$

unde  $B_c$  și  $B_{nc}$  sunt respectiv baze ale subspațiului controlabil și necontrolabil, se obține sistemul echivalent  $\bar{\Sigma}(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$ , având

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = [\bar{C}_1 \ \bar{C}_2], \quad \bar{D} = D, \quad (15)$$

cu  $\bar{A}_{11}$  de tipul  $n_c \times n_c$ ,  $\bar{A}_{22}$  de tipul  $n_{nc} \times n_{nc}$ ,  $\bar{B}_1$  de tipul  $n_c \times m$  și  $\bar{C}_1$  de tipul  $p \times n_c$ .

În cazul sistemelor continue, scriind vectorul de stare  $\bar{X}$  al sistemului  $\bar{\Sigma}$  sub forma

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} \bar{X}_c \\ \bar{X}_{nc} \end{bmatrix} \begin{matrix} \} n_c \\ \} n - n_c \end{matrix} \quad (16)$$

ecuațiile sistemului  $\bar{\Sigma}$  devin astfel:

$$\bar{\Sigma}: \begin{cases} \dot{\bar{X}}_c = \bar{A}_{11}\bar{X}_c + \bar{A}_{12}\bar{X}_{nc} + \bar{B}_1U \\ \dot{\bar{X}}_{nc} = \bar{A}_{22}\bar{X}_{nc} \end{cases}, \quad y = \bar{C}_1\bar{X}_c + \bar{C}_2\bar{X}_{nc} + DU. \quad (17)$$

În mod clar, componenta  $\bar{X}_{nc}$  a stării  $\bar{X}$  este necontrolabilă, deoarece nu poate fi transferată în origine, în timp finit, sub acțiunea comenzii  $U$ . Prin eliminarea acestei componente, obținem *partea controlabilă*  $\bar{\Sigma}_C$  a sistemului  $\bar{\Sigma}$ , cu ordinul  $n_c = \text{rang } C_n$  și ecuațiile

$$\bar{\Sigma}_C: \begin{cases} \dot{\bar{X}}_c = \bar{A}_{11}\bar{X}_c + \bar{B}_1U \\ y = \bar{C}_1\bar{X}_c + DU \end{cases}. \quad (18)$$

De regulă, reglarea sistemului necontrolabil  $\Sigma$  se reduce la reglarea părții sale controlabile  $\bar{\Sigma}_C(\bar{A}_{11}, \bar{B}_1, \bar{C}_1, D)$ .

**Observația 5<sup>0</sup>.** Subsistemul controlabil  $\bar{\Sigma}_C$  este echivalent I-E cu sistemul  $\bar{\Sigma}$ , deci și cu sistemul  $\Sigma$ . Această proprietate este consecința formei particulare a celei de-a doua ecuații de stare a sistemului  $\bar{\Sigma}$ . Astfel, dacă sistemul  $\bar{\Sigma}$  are starea de tip original, adică  $\bar{X}(0)=0$ , deci  $\bar{X}_c(0)=0$  și  $\bar{X}_{nc}(0)=0$ , atunci  $\bar{X}_{nc}(t)=0$  pentru orice  $t \geq 0$ , iar ecuațiile de stare ale sistemului  $\bar{\Sigma}$  devin identice cu cele ale sistemului  $\bar{\Sigma}_C$ .

**Observația 6<sup>0</sup>.** Sistemele echivalente  $\bar{\Sigma}$  și  $\Sigma$  au același *spectru* (definit ca fiind mulțimea valorilor proprii, adică a rădăcinilor ecuației caracteristice). Spectrul  $\sigma_c$  al matricei pătrate  $\bar{A}_{11}$  reprezintă *spectrul controlabil*, iar spectrul  $\sigma_{nc}$  al matricei pătrate  $\bar{A}_{22}$  este *spectrul necontrolabil*. Din

$$\det(sI - A) = \det(sI - \bar{A}) = \det(sI - \bar{A}_{11}) \cdot \det(sI - \bar{A}_{22}),$$

rezultă

$$\sigma(A) = \sigma(\bar{A}) = \sigma_c \cup \sigma_{nc}, \tag{19}$$

care exprimă faptul că spectrul unui sistem este reuniunea disjunctă (la care elementele comune devin multiple) a spectrului controlabil și a spectrului necontrolabil.

**Observația 7<sup>0</sup>.** Pe baza teoremei de descompunere a unui sistem necontrolabil putem demonstra

***Teorema de controlabilitate a lui Hautus.*** *Un sistem liniar  $\Sigma(A, B, C, D)$  de ordinul  $n$  este controlabil dacă și numai dacă pentru orice element  $\lambda$  al spectrului sistemului, matricea de controlabilitate a lui Hautus*

$$H_c(\lambda) = [\lambda I - A \quad B] \tag{20}$$

*are rangul  $n$ .*

Ținând seama de faptul că  $\text{rang}[\lambda I - A] = n$  pentru  $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \sigma(A)$ , din teorema de controlabilitate a lui Hautus rezultă că un sistem este controlabil dacă și numai dacă matricea  $H_c(\lambda)$  are rangul  $n$  pentru orice  $\lambda \in \mathbf{C}$  ( $\mathbf{C}$  - mulțimea numerelor complexe).

**Observația 8<sup>0</sup>.** În cazul unui sistem  $\Sigma(A, B, C, D)$  de ordinul  $n$  și având spectrul  $\sigma(A)$  format din  $n$  elemente distincte, *spectrele controlabil și necontrolabil* sunt date de relațiile

$$\sigma_c = \{\lambda \in \sigma(A) \mid \text{rang} H_c(\lambda) = n\}, \quad (21)$$

$$\sigma_{nc} = \{\lambda \in \sigma(A) \mid \text{rang} H_c(\lambda) < n\}. \quad (22)$$

Pe de altă parte, spectrul unui sistem continuu este reuniunea spectrului stabil (strict)  $\sigma^-$  și a spectrului instabil  $\sigma^+$ , definite astfel

$$\sigma^- = \{\lambda \in \sigma(A) \mid \text{Re } \lambda < 0\}, \quad (23)$$

$$\sigma^+ = \{\lambda \in \sigma(A) \mid \text{Re } \lambda \geq 0\}. \quad (24)$$

### 13.2. STABILIZABILITATEA

*Stabilizabilitatea* este o proprietate structurală mai slabă decât controlabilitatea, care permite numai stabilizarea sistemului prin reacție după stare (prin alocarea spectrului în zona de stabilitate), dar nu și obținerea unor performanțe dinamice convenabile. Toate sistemele intern stabile satisfac, în mod evident, proprietatea de stabilizabilitate. Un sistem intern instabil care nu satisface proprietatea de stabilizabilitate nu poate fi stabilizat prin introducerea unei legături de reacție după stare.

Prin definiție, o stare  $X_1$  este *stabilizabilă* dacă există o comandă  $U$  care s-o transfere în origine, într-un interval de timp oricât de mare (finit sau infinit). Un sistem este *stabilizabil* atunci când toate stările  $X \in \mathbf{R}^n$  sunt stabilizabile.

***Teorema stabilizabilității sistemului.*** *Un sistem liniar este stabilizabil dacă și numai dacă partea necontrolabilă este asimptotic stabilă (spectrul necontrolabil este asimptotic stabil), adică, la sistemele continue,*

$$\sigma_{nc} \subset \mathbf{C}^- \quad (25)$$

Având în vedere lanțul de echivalențe

$$(\sigma_{nc} \subset \mathbf{C}^-) \Leftrightarrow (\lambda \in \sigma^+ \Rightarrow \lambda \in \sigma_c) \Leftrightarrow (\lambda \in \sigma^+ \Rightarrow \text{rang } H_c(\lambda) = n),$$

rezultă

***Teorema de stabilizabilitate a lui Hautus.*** *Un sistem liniar este stabilizabil dacă și numai dacă matricea de controlabilitate a lui Hautus are rangul  $n$  pentru orice element  $\lambda$  al spectrului instabil, adică, la sistemele continue,*

$$\text{rang} H_c(\lambda) = n \quad \forall \lambda \in \sigma^+. \quad (26)$$

### 13.3. FORME CANONICE CONTROLABILE

Utilizarea formelor canonice de reprezentare I-S-E a unui sistem  $\Sigma(A, B, C, D)$  poate aduce simplificări în rezolvarea unor probleme majore de sinteză a sistemelor de reglare automată cu reacție după stare. Teoria formelor canonice are la bază conceptul de echivalență I-S-E, care permite transformarea unui sistem  $\Sigma(A, B, C, D)$  într-un sistem echivalent  $\bar{\Sigma}(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$  prin schimbarea bazei spațiului stărilor. Determinarea noii baze  $S$ , adică a matricei de transformare a stării, după relația  $X = S\bar{X}$ , este esențială în obținerea formei canonice dorite și, eventual, după rezolvarea problemei de sinteză, pentru revenirea la forma inițială. În cele ce urmează este abordat numai cazul sistemelor cu o singură intrare.

**Forma canonică controlabilă de tipul unu.** Un sistem linear controlabil  $\Sigma(A, B, C, D)$ , cu o singură intrare și cu polinomul caracteristic

$$\mathcal{P}(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0,$$

poate fi adus la forma canonică controlabilă de tipul unu  $\Sigma_{C1}(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$ , cu matricele  $\bar{A}$  și  $\bar{B}$  de forma

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (27)$$

prin alegerea bazei  $S_{C1} = [s_1 s_2 \dots s_n]$ , unde

$$\begin{cases} s_n = B \\ s_i = A s_{i+1} + a_i B, \quad i = n-1, n-2, \dots, 1. \end{cases} \quad (28)$$

Matricea pătrată  $S_{C1}$  este nesingulară deoarece, scriind relațiile (28) sub forma explicită

$$\begin{cases} s_n = B \\ s_{n-1} = a_{n-1}B + AB \\ \vdots \\ s_1 = a_1B + a_2AB + \dots + a_{n-1}A^{n-2}B + A^{n-1}B \end{cases},$$

rezultă

$$S_{c1} = C_n A_1,$$

unde  $C_n = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$  este matricea de controlabilitate a sistemului  $\Sigma$ , iar

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Prin urmare,

$$|\det S_{c1}| = |\det C_n| \cdot |\det A_1| = |\det C_n| \neq 0.$$

Pentru a demonstra că prin alegerea bazei  $S_{C1}$  se obține forma canonică echivalentă (27), în conformitate cu teorema de echivalență I-S-E (paragraful 4.4) trebuie arătat că  $\bar{A} = S_{C1}^{-1}AS_{C1}$  și  $\bar{B} = S_{C1}^{-1}B$ , adică

$$S_{C1}\bar{A} = AS_{C1}, \quad S_{C1}\bar{B} = B.$$

A doua relație este evidentă. Pentru demonstrarea primei relații, avem

$$As_1 = (a_1A + a_2A^2 + \dots + a_{n-1}A^{n-1} + A^n)B,$$

iar din teorema Cayley-Hamilton, rezultă

$$As_1 = -a_0B = -a_0s_n.$$

În plus, avem  $As_{i+1} = s_i - s_n a_i$  pentru  $i=1, 2, \dots, n-1$ . Rezultă astfel:

$$A[s_1 \ s_2 \ \dots \ s_{n-1} \ s_n] = [s_1 \ s_2 \ \dots \ s_{n-1} \ s_n] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix},$$

adică  $AS_{C1} = S_{C1}\bar{A}$ .

Sistemul  $\Sigma_{C1}$  este controlabil deoarece este echivalent I-S-E cu sistemul controlabil  $\Sigma$ . Controlabilitatea sistemului  $\Sigma_{C1}$  reiese însă și din faptul că matricea sa de controlabilitate  $\bar{C}_n = [\bar{B} \ \bar{A}\bar{B} \ \dots \ \bar{A}^{n-1}\bar{B}]$  are forma

$$\bar{C}_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & * & * \\ 1 & * & \dots & * & * \end{bmatrix},$$

deci proprietatea  $|\det \bar{C}_n| = 1$ .

Ecuția de stare asociată formei canonice controlabile de tipul unu are forma

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{\bar{x}}_{n-1} = \bar{x}_n \\ \dot{\bar{x}}_n = -a_0\bar{x}_1 - a_1\bar{x}_2 - \dots - a_{n-1}\bar{x}_n + u \end{cases}, \quad (29)$$

care evidențiază faptul că fiecare dintre variabilele de stare  $x_2, x_3, \dots, x_n$  sunt derivatele variabilelor de stare precedente.

De menționat faptul că sistemul monovariabil cu forma canonică controlabilă  $\Sigma_{C1}(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$  și

$$\bar{C} = [c_0 \ c_1 \ \dots \ c_{n-1}], \quad \bar{D} = 0,$$

are funcția de transfer

$$G(s) = \frac{c_{n-1}s^{n-1} + \dots + c_1s + c_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}.$$

**Forma canonică controlabilă de tipul doi.** Un sistem linear controlabil  $\Sigma(A, B, C, D)$ , cu o singură intrare și cu polinomul caracteristic

$$\mathcal{P}(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0,$$

poate fi adus la forma canonică controlabilă de tipul doi  $\Sigma_{C2}(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$ , cu matricele  $\bar{A}$  și  $\bar{B}$  de forma

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (30)$$

prin alegerea bazei  $S_{C2}$  egală cu matricea de controlabilitate  $C_n$  a sistemului  $\Sigma(A, B, C, D)$ .

In conformitate cu teorema de echivalență I-S-E, este suficient să arătăm că

$$C_n \bar{A} = AC_n \text{ și } C_n \bar{B} = B.$$

Ținând seama de cu teorema Cayley-Hamilton, avem

$$\begin{aligned}
 AC_n &= [AB \ A^2B \ \dots \ A^n B] \\
 &= [AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B \ -(a_0I + a_1A + \dots + a_{n-1}A^{n-1})B] \\
 &= [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} = C_n \bar{A}
 \end{aligned}$$

și

$$B = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = C_n \bar{B}.$$

Controlabilitatea sistemului  $\Sigma_{C2}$  reiese și din faptul că matricea sa de controlabilitate  $\bar{C}_n = [\bar{B} \ \bar{A}\bar{B} \ \dots \ \bar{A}^{n-1}\bar{B}]$  este egală cu matricea unitate I.

Ecuțiile de stare asociate formei canonice controlabile de tipul doi au forma

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = -a_0\bar{x}_n + u \\ \dot{\bar{x}}_2 = \bar{x}_1 - a_1\bar{x}_n \\ \vdots \\ \dot{\bar{x}}_n = \bar{x}_{n-1} - a_{n-1}\bar{x}_n \end{cases} \quad (31)$$

### 13.4. OBSERVABILITATEA

Observabilitatea este duala proprietății de controlabilitate. Dacă proprietatea de controlabilitate permite atingerea originii din orice stare inițială într-un timp foarte mic (printr-o comandă convenabilă), deci reglarea sistemului prin reacție după stare cu performanțe dinamice foarte bune, în schimb, proprietatea de *observabilitate* permite estimarea rapidă a stării sistemului prin măsurarea și procesarea convenabilă a mărimilor de intrare și de ieșire.

Prin definiție, o stare  $X_1$  este *observabilă* dacă răspunsul liber (sub acțiunea intrării nule)  $Y_\ell(t)$  din starea inițială  $X_1$  este nenul pentru  $t \geq 0$ . Altfel

spus, o stare  $X_1$  este *neobservabilă* dacă răspunsul liber  $Y_\ell(t)$  din starea inițială  $X_1$  este identic nul pentru  $t \geq 0$ .

La sistemul continuu  $\Sigma(A, B, C, D)$ , starea  $X_1$  este neobservabilă dacă și numai dacă

$$Ce^{At} X_1 = 0 \quad \forall t \geq 0. \quad (32)$$

iar la sistemul discret  $\Sigma_d(A, B, C, D)$ , starea  $X_1$  este neobservabilă dacă și numai dacă

$$CA^k X_1 = 0 \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots \quad (33)$$

Relațiile (32) și (33) sunt echivalente, deoarece (33) implică (32), conform relației de definiție a exponențialei matriceale, iar (32) implică

$$\frac{d}{dt^k} (Ce^{At} X_1) \Big|_{t=0} = 0 \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots,$$

adică (33).

La ambele tipuri de sisteme, matricea

$$Q_n = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}, \quad Q_n \in \mathbf{R}^{pn \times n}, \quad (34)$$

reprezintă *matricea de observabilitate* a sistemului. Pe baza relațiilor (32) și (33) putem demonstra următoarea teoremă.

***Teorema observabilității stării.*** O stare  $X_1$  este neobservabilă dacă și numai dacă

$$Q_n X_1 = 0. \quad (35)$$

Mulțimea stărilor neobservabile formează *subspațiul vectorial neobservabil*, cu dimensiunea  $n - \text{rang } Q_n$ , în timp ce mulțimea stărilor observabile din  $\mathbf{R}^n$  nu formează un subspațiu vectorial, dar conține un cel mai mare subspațiu vectorial, cu dimensiunea  $n_o = \text{rang } Q_n$ , numit *subspațiul observabil*. Cele două subspații, ca și subspațiile controlabil și necontrolabil, sunt ortogonale și complementare în  $\mathbf{R}^n$ .

Prin definiție, un sistem este observabil atunci când toate stările  $X \in \mathbf{R}^n$  sunt observabile, adică subspațiul neobservabil are dimensiunea zero, iar subspațiul observabil are dimensiunea  $n_o = n$ . Am obținut astfel



**Teorema observabilității sistemului.** *Un sistem liniar de ordinul  $n$  este observabil dacă și numai dacă matricea de observabilitate are rangul  $n$ , adică*

$$\text{rang } Q_n = n. \quad (36)$$

Proprietatea de observabilitate este asociată exclusiv perechii de matrice  $(A, C)$ . Din

$$\begin{aligned} Q_n^T(A, C) &= [C^T \quad (CA)^T \quad \dots \quad (CA^{n-1})^T] \\ &= [C^T \quad A^T C^T \quad \dots \quad (A^T)^{n-1} C^T] \\ &= C_n(A^T, C^T), \end{aligned}$$

rezultă

$$\text{rang } Q_n(A, C) = \text{rang } C_n(A^T, C^T), \quad (37)$$

care exprimă

**Principiul dualității.** *Perechea  $(A, C)$  este observabilă dacă și numai dacă perechea  $(A^T, C^T)$  este controlabilă.*

Sistemele  $\Sigma(A, B, C, D)$  și  $\Sigma_1(A^T, C^T, B^T, D)$  se numesc sisteme duale deoarece, conform principiului dualității, studiul observabilității/controlabilității unuia se reduce la studiul controlabilității/observabilității celuilalt. Din principiul dualității putem obține *teorema descompunerii unui sistem neobservabil* (similară teoremei descompunerii unui sistem necontrolabil), precum și

**Teorema de observabilitate a lui Hautus.** *Un sistem liniar  $\Sigma(A, B, C, D)$  de ordinul  $n$  este observabil dacă și numai dacă pentru orice element  $\lambda$  al spectrului sistemului, matricea (de observabilitate a lui Hautus)*

$$H_o(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix} \quad (38)$$

are rangul  $n$ .

**Observația 1<sup>0</sup>.** Intre matricele de observabilitate  $Q_n$  și  $\bar{Q}_n$  a două sisteme  $\Sigma(A, B, C, D)$  și  $\bar{\Sigma}(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$  echivalente I-S-E, cu matricea de transformare  $S$  ( $X = S\bar{X}$ ), există relația

$$\bar{Q}_n = Q_n S. \quad (39)$$

Intr-adevăr,

$$\bar{Q}_n = \begin{bmatrix} \bar{C} \\ \bar{C}\bar{A} \\ \vdots \\ \bar{C}\bar{A}^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CS \\ CS \cdot S^{-1}AS \\ \vdots \\ CS \cdot S^{-1}A^{n-1}S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} S = Q_n S.$$

Deoarece matricea pătrată  $S$  este nesingulară, din (39) rezultă

$$\text{rang } \bar{Q}_n = \text{rang } Q_n, \quad (40)$$

care exprimă proprietatea de conservare prin echivalență a observabilității.

**Observația 2<sup>0</sup>.** În cazul unui sistem  $\Sigma(A, B, C, D)$  de ordinul  $n$  și având spectrul  $\sigma(A)$  format din  $n$  elemente distincte, *spectrul observabil* și *spectrul neobservabil* sunt date de relațiile

$$\sigma_o = \{\lambda \in \sigma(A) \mid \text{rang } H_o(\lambda) = n\}, \quad (41)$$

$$\sigma_{no} = \{\lambda \in \sigma(A) \mid \text{rang } H_o(\lambda) < n\}. \quad (42)$$

### 13.5. DETECTABILITATEA

*Detectabilitatea* este o proprietate mai slabă decât observabilitatea, care permite numai stabilizarea procesului de estimare a stării sistemului pe baza măsurării și procesării convenabile a mărimilor de intrare și de ieșire, dar nu și realizarea unei operații de estimare performante. Starea unui sistem nedetectabil nu poate fi estimată prin procesarea ieșirii.

Prin definiție, o stare  $X_1$  este *detectabilă* dacă este observabilă sau dacă starea sistemului evoluează în regim liber din starea inițială  $X_1$  spre origine, într-un interval de timp finit sau infinit. Dacă toate stările  $X \in \mathbf{R}^n$  sunt detectabile, atunci *sistemul este detectabil*.

**Teorema detectabilității sistemului.** *Un sistem liniar este detectabil dacă și numai dacă spectrul neobservabil este asimptotic stabil, adică, la sistemele continue,*

$$\sigma_{no} \subset \mathbf{C}^-. \quad (43)$$

Având în vedere lanțul de echivalență

$$(\sigma_{no} \subset \mathbf{C}^-) \Leftrightarrow (\lambda \in \sigma^+ \Rightarrow \lambda \in \sigma_o) \Leftrightarrow (\lambda \in \sigma^+ \Rightarrow \text{rang } H_o(\lambda) = n),$$

rezultă

**Teorema de detectabilitate a lui Hautus.** *Un sistem liniar este detectabil dacă și numai dacă matricea de observabilitate a lui Hautus are rangul  $n$  pentru orice element  $\lambda$  al spectrului instabil, adică, la sistemele continue,*

$$\text{rang } H_o(\lambda) = n \quad \forall \lambda \in \sigma^+. \quad (44)$$

Perechea  $(A, C)$  este detectabilă dacă și numai dacă perechea  $(A^T, C^T)$  este stabilizabilă, iar sistemul  $\Sigma(A, B, C, D)$  este detectabil dacă și numai dacă sistemul dual  $\Sigma_1(A^T, C^T, B^T, D)$  este stabilizabil.

### 13.6. FORME CANONICE OBSERVABILE

**Forma canonică observabilă de tipul unu.** *Un sistem liniar observabil  $\Sigma(A, B, C, D)$ , cu o singură ieșire și cu polinomul caracteristic*

$$\mathcal{P}(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0,$$

*poate fi adus la forma canonică observabilă de tipul unu  $\Sigma_{O1}(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ , cu*

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = [1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0], \quad (45)$$

*prin alegerea bazei  $S_{O1}$  egală cu inversa matricei de observabilitate, adică*

$$S_{O1} = Q_n^{-1}.$$

Acest rezultat poate fi obținut din forma canonică controlabilă de tipul doi (30), ținând seama că

$$\tilde{A}^T = \bar{A} \quad \text{și} \quad \tilde{C}^T = \bar{B}.$$

Intr-adevăr, din principiul dualității, avem:

$$(\tilde{A}, \tilde{C}) \text{ observabilă} \Leftrightarrow (\tilde{A}^T, \tilde{C}^T) \text{ controlabilă} \Leftrightarrow (\bar{A}, \bar{B}) \text{ controlabilă}.$$

Prin transpunere, relațiile

$$\tilde{A} = S_{O1}^{-1} A S_{O1}, \quad \tilde{C} = C S_{O1}$$

devin respectiv

$$\bar{A} = S_{O1}^T A^T (S_{O1}^T)^{-1}, \quad \bar{B} = S_{O1}^T C^T.$$

Pe de altă parte, deoarece

$$\bar{A} = S_{C2}^{-1} A S_{C2}, \quad \bar{B} = S_{C2}^{-1} B,$$

obținem

$$S_{O1}^T A^T (S_{O1}^T)^{-1} = S_{C2}^{-1} A S_{C2}, \quad S_{O1}^T C^T = S_{C2}^{-1} B.$$

Din aceste relații rezultă că baza  $S_{O1}$  se obține prin transpunerea și inversarea bazei  $S_{C2}$  după ce, în prealabil, au fost înlocuiți parametrii  $A$  și  $B$  din  $S_{C2} = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$  respectiv cu  $A^T$  și  $C^T$ ; deci,  $S_{O1} = (S_{C2}^T)^{-1} = Q_n^{-1}$ .

Similar, din forma canonică controlabilă de tipul unu (27), rezultă

**Forma canonică observabilă de tipul doi.** Un sistem linear observabil  $\Sigma(A, B, C, D)$ , cu o singură ieșire și cu polinomul caracteristic

$$\mathcal{P}(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0,$$

poate fi adus la forma canonică observabilă de tipul doi  $\Sigma_{O2}(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ , cu

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1], \quad (46)$$

alegând baza  $S_{O2}$  astfel încât  $S_{O2}^{-1} = [s_1 \ s_2 \ \dots \ s_n]^T$ , unde

$$\begin{cases} s_n = C^T \\ s_i = A^T s_{i+1} + a_i C^T, \quad i = n-1, n-2, \dots, 1. \end{cases} \quad (47)$$

De menționat faptul că sistemul monovariabil cu forma canonică observabilă  $\Sigma_{O2}(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$  și

$$\tilde{B}^T = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_{n-1}], \quad \tilde{D} = 0,$$

are funcția de transfer

$$G(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}.$$

## 13.7. APLICAȚII REZOLVATE

◆ **Aplicația 13.1.** Să se studieze controlabilitatea stărilor sistemului cu ecuațiile de stare

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 2x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 + mx_2 - 2u \end{cases}$$

unde  $m$  este un parametru real.

**Soluție.** Sistemul are matricea de controlabilitate

$$C_2 = [B \ AB] = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 1-2m \end{bmatrix}.$$

Pentru  $m \neq 1/2$ , matricea  $C_2$  are rangul 2, deci sistemul este controlabil (are toate stările  $X \in \mathbf{R}^2$  controlabile).

Pentru  $m = 1/2$ , matricea  $C_2$  are rangul 1, deci sistemul nu este controlabil. Subspațiul controlabil are dimensiunea  $n_c = \text{rang } C_2 = 1$ , iar subspațiul necontrolabil are dimensiunea  $n_{nc} = n - n_c = 1$ .

Prima coloană a matricei  $C_2$  formează baza subspațiului controlabil

$$B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Prin urmare, elementele subspațiului controlabil sunt de forma  $X = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbf{R}$ , deci

stările controlabile  $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$  sunt situate în planul  $\mathbf{R}^2$  pe dreapta

$$x_2 = -2x_1$$

Toate stările  $X \in \mathbf{R}^2$  nesituate pe această dreaptă sunt necontrolabile.

O bază  $B_{nc}$  a subspațiului necontrolabil este dată de o soluție nenulă  $v$  a ecuației vectoriale  $B_c^T v = 0$ , unde  $B_c^T = [1 \ -2]$ . Rezultă

$$B_{nc} = v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

deci elementele subspațiului necontrolabil sunt de forma  $X = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbf{R}$ , adică de forma

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$  cu  $x_2 = \frac{1}{2}x_1$ . Dreapta de controlabilitate  $x_2 = -2x_1$  și dreapta de necontrolabilitate

$$x_2 = \frac{1}{2}x_1$$

sunt perpendiculare.

♦ **Aplicația 13.2.** Să se studieze controlabilitatea stărilor sistemului cu ecuațiile de stare

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 + u \\ \dot{x}_2 = -x_2 - 6x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1 + u \end{cases}.$$

**Soluție.** Sistemul are matricea de controlabilitate

$$C_3 = [B \ AB \ A^2B] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & -6 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Deoarece matricea  $C_3$  are determinantul nul, dar conține determinanți de ordinul doi nenuli, rezultă  $\text{rang } C_3 = 2$ . Prin urmare, sistemul este necontrolabil, subspațiul controlabil are dimensiunea  $n_c = \text{rang } C_3 = 2$ , iar subspațiul necontrolabil are dimensiunea  $n_{nc} = n - n_c = 1$ .

O bază  $B_c$  a subspațiului controlabil este formată din primele două coloane ale matricei  $C_3$ , adică

$$B_c = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

iar o bază  $B_{nc}$  a subspațiului necontrolabil este dată de vectorul nenul  $v$  care verifică relația

$B_c^T v = 0$ , unde  $B_c^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -6 & 1 \end{bmatrix}$ ; rezultă

$$B_{nc} = v = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Stările controlabile sunt de forma

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \alpha + \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} \beta = \begin{bmatrix} \alpha - 2\beta \\ -6\beta \\ \alpha + \beta \end{bmatrix},$$

unde  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ , deci sunt situate în planul

$$2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$$

din spațiul  $\mathbf{R}^3$ . Toate stările  $X \in \mathbf{R}^3$  nesituate în acest plan sunt necontrolabile. Stările subspațiului necontrolabil sunt de forma

$$X = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \delta, \quad \delta \in \mathbf{R},$$

deci sunt situate pe dreapta

$$\frac{x_1}{-2} = x_2 = \frac{x_3}{2},$$

perpendiculară pe planul de controlabilitate

♦ **Aplicația 13.3.** Să se studieze controlabilitatea și stabilizabilitatea sistemului liniar continuu cu modelul I-S-E

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 + u \\ \dot{x}_2 = -x_2 - 6x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1 + u \end{cases}, \quad y = x_1 - x_2 - x_3.$$

Să se determine partea controlabilă.

**Soluție.** Avem

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_3 = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & -6 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Deoarece  $n_c = \text{rang } C_3 = 2$ , sistemul nu este controlabil. La același rezultat ajungem aplicând teorema de controlabilitate a lui Hautus. Ecuația caracteristică  $\det(s\mathbf{I} - A) = 0$ , echivalentă cu

$$(s+3)(s^2+2) = 0,$$

are rădăcinile

$$s_1 = -3, \quad s_{2,3} = \pm j\sqrt{2}.$$

Așadar, sistemul are spectrul

$$\sigma = \{-3, -j\sqrt{2}, j\sqrt{2}\}.$$

Matricea de controlabilitate a lui Hautus

$$H_c(\lambda) = [\lambda\mathbf{I} - A \quad B] = \begin{bmatrix} \lambda+2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda+1 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda & 1 \end{bmatrix}$$

are rangul 3 pentru  $\lambda = \pm j\sqrt{2}$  (ultimele trei coloane fiind liniar dependente numai pentru  $\lambda = -3$  și  $\lambda = 2$ ) și rangul 2 pentru  $\lambda = -3$ , rezultat ce confirmă necontrolabilitatea sistemului. Sistemul are spectrul controlabil  $\sigma_c = \{-j\sqrt{2}, j\sqrt{2}\}$  și spectrul necontrolabil  $\sigma_{nc} = \{-3\}$ . Deoarece spectrul necontrolabil  $\sigma_{nc}$  al sistemului coincide cu spectrul stabil  $\sigma^- = \{-3\}$ , din teorema stabilizabilității rezultă că sistemul este stabilizabil. Acest lucru este confirmat de teorema de stabilizabilitate a lui Hautus, prin faptul că matricea  $H_c(\lambda)$  are rangul 3 pentru toate valorile lui  $\lambda$  aparținând spectrului instabil  $\sigma^+ = \{\pm j\sqrt{2}\}$ .

O bază  $B_c$  a subspațiului controlabil este formată din primele două coloane ale matricei  $C_3$ , adică

$$B_c = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

iar o bază  $B_{nc}$  a subspațiului necontrolabil este dată de vectorul nenul  $v$  care verifică relația  $B_c^T v = 0$ , adică

$$B_{nc} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Cu matricea de transformare

$$S = [B_c \quad B_{nc}] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & -6 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \frac{1}{27} \begin{bmatrix} 13 & -2 & 14 \\ -1 & -4 & 1 \\ -6 & 3 & 6 \end{bmatrix},$$

se obține forma necontrolabilă descompusă

$$\bar{\Sigma} : \begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = -2\bar{x}_2 + \frac{7}{3}\bar{x}_3 + u \\ \dot{\bar{x}}_2 = \bar{x}_1 + \frac{5}{3}\bar{x}_3 \\ \dot{\bar{x}}_3 = -3\bar{x}_3 \end{cases}, \quad y = 3\bar{x}_2 - 5\bar{x}_3,$$

care evidențiază clar necontrolabilitatea stării  $\bar{x}_3$ . Prin eliminarea acestei stări, obținem partea controlabilă a sistemului

$$\Sigma_C : \begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}, \quad y = 3x_2.$$

Din

$$\bar{A}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_{22} = -3,$$

rezultă din nou că sistemul are spectrul controlabil

$$\sigma_c = \sigma(\bar{A}_{11}) = \{\pm j\sqrt{2}\}$$

și spectrul necontrolabil

$$\sigma_{nc} = \sigma(\bar{A}_{22}) = \{-3\}.$$

◆ **Aplicația 13.4.** Să se studieze controlabilitatea și stabilizabilitatea sistemului liniar

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + 2x_2 - x_3 - u_1 + 2u_2 \\ \dot{x}_2 = x_2 + u_1 + u_2 \\ \dot{x}_3 = x_1 + 2x_2 + 3u_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1 = x_1 - x_3 \\ y_2 = x_1 - 2x_2 + u_1 \end{cases}.$$

Să se determine partea controlabilă

**Soluție.** Avem



$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_3 = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Deoarece matricea de controlabilitate  $C_3$  are rangul 2 (linia a treia este suma primelor două) sistemul este necontrolabil; subspațiul controlabil are dimensiunea  $n_c=2$ , iar subspațiul necontrolabil are dimensiunea  $n_{nc}=1$ . Alegem baza  $B_c$  a subspațiului controlabil ca fiind formată din prima și a treia coloană a matricei  $C_3$ , apoi baza  $B_{nc}$  a subspațiului necontrolabil sub forma vectorului nenul  $v$  care verifică relația  $B_c^T v = 0$ ; rezultă

$$S = [B_c \quad B_{nc}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Cu matricea de transformare  $S$ , se obține forma necontrolabilă descompusă

$$\bar{\Sigma}: \begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = -\bar{x}_2 - 4\bar{x}_3 + u_1 - u_2 \\ \dot{\bar{x}}_2 = \bar{x}_1 + 2\bar{x}_2 + 4\bar{x}_3 + 3u_2 \\ \dot{\bar{x}}_3 = \bar{x}_3 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1 = -\bar{x}_1 - \bar{x}_2 + 2\bar{x}_3 \\ y_2 = -3\bar{x}_1 - 2\bar{x}_2 - \bar{x}_3 + u_1 \end{cases},$$

care evidențiază necontrolabilitatea stării  $\bar{x}_3$ . Prin eliminarea acestei stări, obținem partea controlabilă a sistemului

$$\Sigma_C: \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + u_1 - u_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2x_2 + 3u_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1 = -x_1 - x_2 \\ y_2 = -3x_1 - 2x_2 + u_1 \end{cases}.$$

Din

$$\bar{A}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_{22} = 1,$$

rezultă că sistemul are spectrul controlabil

$$\sigma_c = \sigma(\bar{A}_{11}) = \{1, 1\}$$

și spectrul necontrolabil

$$\sigma_{nc} = \sigma(\bar{A}_{22}) = \{1\}.$$

Pentru  $\lambda=1$ , matricea lui Hautus

$$H_c(\lambda)=[\lambda I-A \ B]=\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

are rangul 2 (ultima linie fiind suma primelor două), fapt ce confirmă necontrolabilitatea sistemului.

Deoarece spectrul necontrolabil  $\sigma_{nc}$  al sistemului nu este asimptotic stabil, din teorema stabilizabilității rezultă că sistemul nu este nici stabilizabil. Acest lucru este confirmat de teorema de stabilizabilitate a lui Hautus, prin faptul că matricea  $H_c(\lambda)$  are rangul 2 pentru  $\lambda \in \sigma^+ = \{1, 1, 1\}$ .

♦ **Aplicația 13.5.** Să se determine formele canonice controlabile ale sistemului cu

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C=[1 \ 0 \ -1], \quad D=0.$$

**Soluție.** Polinomul caracteristic

$$\mathcal{P}(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & -2 \\ 0 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix}=\lambda^3+\lambda^2-3\lambda-1,$$

are coeficienții

$$a_0=-1, \quad a_1=-3, \quad a_2=1.$$

Pentru a obține forma canonică controlabilă de tipul unu, cu relațiile (28) determinăm baza  $S_{C1}$ , astfel:

$$s_3=B=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad s_2=As_3+a_2B=\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad s_1=As_2+a_1B=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$S_{C1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad S_{C1}^{-1}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 7 & -1 & -4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Rezultă forma canonică  $\Sigma_{C1}(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$  cu

$$\bar{A}=S_{C1}^{-1}AS_{C1}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}=S_{C1}^{-1}B=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{C}=CS_{C1}=[2 \ 1 \ -1], \quad \bar{D}=D=0,$$

adică

$$\Sigma_{C1}: \begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = \bar{x}_2 \\ \dot{\bar{x}}_2 = \bar{x}_3 \\ \dot{\bar{x}}_3 = \bar{x}_1 + 3\bar{x}_2 - \bar{x}_3 + u \end{cases}, \quad y = 2\bar{x}_1 + \bar{x}_2 - \bar{x}_3.$$

Pentru a obține forma canonică controlabilă de tipul doi, calculăm

$$S_{C2} = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -1 & 5 & -7 \\ 2 & -3 & 8 \end{bmatrix}, \quad S_{C2}^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -19 & 7 & 18 \\ 6 & 2 & -2 \\ 7 & -1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Rezultă forma canonică  $\Sigma_{C2}(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$  cu

$$\bar{A} = S_{C2}^{-1}AS_{C2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = S_{C2}^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = CS_{C2} = [-1 \quad 2 \quad -3], \quad \bar{D} = D = 0,$$

adică

$$\Sigma_{C2}: \begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = \bar{x}_3 + u \\ \dot{\bar{x}}_2 = \bar{x}_1 + 3\bar{x}_3 \\ \dot{\bar{x}}_3 = \bar{x}_2 - \bar{x}_3 \end{cases}, \quad y = -\bar{x}_1 + 2\bar{x}_2 - 3\bar{x}_3.$$

♦ **Aplicația 13.6.** Să se studieze observabilitatea și detectabilitatea sistemului liniar continuu cu modelul I-S-E

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 - 2u \\ \dot{x}_3 = -x_2 - x_3 + 2u \end{cases}, \quad y = x_1 + x_2 + 2x_3.$$

**Soluție.** Avem

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$C = [1 \quad 1 \quad 2], \quad D = 0,$$

$$Q_3 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Deoarece matricea de observabilitate  $Q_3$  are rangul 2, sistemul este neobservabil; subspațiul observabil are dimensiunea  $n_o = \text{rang } Q_3 = 2$ , iar subspațiul neobservabil are dimensiunea  $n_{no} = 1$ .

Prin rezolvarea ecuației caracteristice  $\det(sI - A) = 0$ , echivalentă cu  $s(s+1)(s+2) = 0$ , obținem spectrul

$$\sigma = \{-2, -1, 0\}.$$

Matricea de observabilitate a lui Hautus,

$$H_o(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda+1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

are rangul 3 pentru  $\lambda = -2$  și  $\lambda = -1$  (ultimele trei linii fiind liniar independente) și rangul 2 pentru  $\lambda = 0$ , fapt ce confirmă neobservabilitatea sistemului și permite determinarea spectrului observabil  $\sigma_o = \{-2, -1\}$  și a spectrului neobservabil  $\sigma_{no} = \{0\}$ . Deoarece spectrul neobservabil nu este asimptotic stabil (adică inclus în  $C^-$ ), din teorema detectabilității rezultă că sistemul este nedetectabil. Acest lucru este confirmat de teorema de detectabilitate a lui Hautus, deoarece rangul matricei  $H_o(\lambda)$  pentru  $\lambda = 0 \in \sigma^+$  este mai mic decât 3.

◆ **Aplicația 13.7.** Să se determine formele canonice observabile ale sistemului cu

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ -1], \quad D = 0.$$

**Soluție.** Pentru a obține forma canonică observabilă de tipul unu, calculăm

$$S_{O1}^{-1} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad S_{O1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rezultă forma canonică  $\Sigma_{O1}(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$  cu

$$\tilde{A} = S_{O1}^{-1} A S_{O1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = S_{O1}^{-1} B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{C} = C S_{O1} = [1 \ 0 \ 0], \quad \tilde{D} = D = 0,$$

adică

$$\Sigma_{O1}: \begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_2 - u \\ \dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{x}_3 + 2u \\ \dot{\tilde{x}}_3 = \tilde{x}_1 + 3\tilde{x}_2 - \tilde{x}_3 - 3u \end{cases}, \quad y = \tilde{x}_1.$$

Pentru a obține forma canonică observabilă de tipul doi, calculăm polinomul caracteristic

$$\mathcal{P}(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & -2 \\ 0 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda^3 + \lambda^2 - 3\lambda - 1,$$

care are coeficienții

$$a_0 = -1, \quad a_1 = -3, \quad a_2 = 1.$$

Cu relațiile (47) determinăm baza  $S_{O2}$ , astfel:

$$s_3 = C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad s_2 = A^T s_3 + a_2 C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad s_1 = A^T s_2 + a_1 C^T = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$S_{O2}^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad S_{O2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Rezultă forma canonică  $\Sigma_{O2}(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$  cu

$$\tilde{A} = S_{O2}^{-1} A S_{O2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = S_{O2}^{-1} B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{C} = C S_{O2} = [0 \ 0 \ 1], \quad \tilde{D} = D = 0,$$

adică

$$\Sigma_{O2}: \begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_3 + 2u \\ \dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{x}_1 + 3\tilde{x}_3 + u \\ \dot{\tilde{x}}_3 = \tilde{x}_1 - \tilde{x}_3 - u \end{cases}, \quad y = \tilde{x}_3.$$

### 13.9. APLICAȚII DE AUTOCONTROL

♦ **C13.1.** Fie sistemul

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 + u \\ \dot{x}_2 = mx_1 - x_2 \end{cases},$$

unde  $m$  este un parametru real. Să se studieze controlabilitatea stărilor și a sistemului, precum și stabilizabilitatea sistemului.

♦ **C13.2.** Să se studieze controlabilitatea și stabilizabilitatea sistemului cu ecuațiile de stare

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - 2x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_2 - x_3 - u \\ \dot{x}_3 = mx_1 \end{cases},$$

unde  $m$  este un parametru real.

- ◆ **C13.3.** Să se studieze controlabilitatea și stabilizabilitatea sistemului liniar

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + u_1 \\ \dot{x}_2 = mx_1 - 2x_2 - u_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_1 - 2x_2 \end{cases},$$

unde  $m$  este un parametru real.

- ◆ **C13.4.** Să se determine formele canonice controlabile ale sistemului cu

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 1 \ -1], \quad D = 0.$$

- ◆ **C13.5.** Să se studieze observabilitatea sistemului liniar continuu cu modelul I-S-E

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + u \\ \dot{x}_2 = -x_1 - u \\ \dot{x}_3 = -x_2 + x_3 \end{cases}, \quad y = x_1 - x_2 - x_3.$$

- ◆ **C13.6.** Să se determine formele canonice observabile ale sistemului cu

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C = [-1 \ 1 \ -1], \quad D = 0.$$



## REGLAREA PRIN REACȚIE DUPĂ STAREA ESTIMATĂ

Reglarea automată a unui sistem (proces) strict propriu  $\Sigma(A, B, C)$  presupune elaborarea unui semnal de comandă a acestuia în funcție de ieșirea măsurată  $Y$  și de intrarea de referință  $R$ . Rezolvarea *structurală* a problemei sintezei sistemului de reglare se face în două etape:

- construirea, în condițiile observabilității sistemului  $\Sigma$ , a unui *estimator de stare*  $\tilde{\Sigma}$  a cărui ieșire  $\tilde{X}$  să reconstituie *asimptotic exact* starea necunoscută  $X$  a sistemului  $\Sigma$ , pe baza intrării  $U$  și a ieșirii măsurate  $Y$  (fig. 14.1);

- determinarea, în condițiile controlabilității sistemului  $\Sigma$ , a unei *legi de comandă liniară după starea estimată*, de forma

$$U(t) = -F\tilde{X}(t) + PR(t), \quad (1)$$

astfel încât sistemul închis să aibă un spectru apriori fixat.

Prin îndeplinirea condiției de estimare asimptotic exactă a stării  $X$  a sistemului  $\Sigma$ , ieșirea  $\tilde{X}(t)$  a estimatorului de stare  $\tilde{\Sigma}$  converge către starea  $X(t)$  atunci când  $t \rightarrow \infty$ , oricare ar fi starea inițială  $X(0)$  și intrarea  $U_{[0, \infty)}$ .

Sistemul  $\Sigma_c$  format din subsistemul de comandă după stare și estimatorul de stare se numește *compensator liniar*.

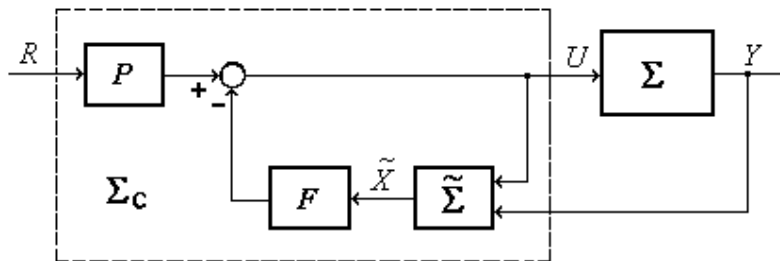


Fig. 14.1. Schema sistemului de reglare cu estimator de stare și reacție după starea estimată.



### 14.1. REGLAREA PRIN REACȚIE DUPĂ STARE

Pentru sistemul continuu liniar  $\Sigma(A, B, C)$  cu  $m$  variabile de intrare și  $n$  variabile de stare, *legea de comandă liniară după stare* are forma (1), unde  $R \in \mathbf{R}^q$  este mărimea de intrare (de referință) a sistemului închis (cu reacție),  $P \in \mathbf{R}^{m \times q}$  este matricea de precompensare, iar  $F \in \mathbf{R}^{m \times n}$  este matricea de reacție după stare. Dacă sistemul  $\Sigma$  are o singură intrare ( $m=1$ ), atunci matricea de precompensare  $P$  și matricea de reacție  $F$  sunt de tip linie.

Sistemul închis cu reacție după stare  $\Sigma_{F,P}(A, B, C)$  din fig. 14.2 are modelul

$$\begin{cases} \dot{X} = A_F X + B_P R \\ Y = C X \end{cases}, \quad (2)$$

unde

$$A_F = A - BF, \quad B_P = BP. \quad (3)$$

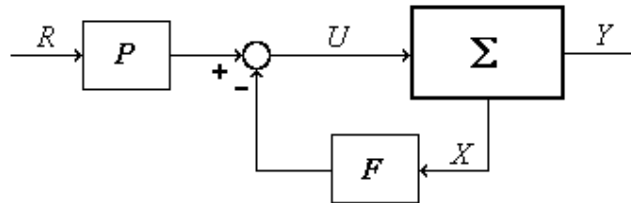


Fig. 14.2. Sistem închis cu reacție după stare.

Un sistem  $\Sigma(A, B, C)$  cu  $n$  variabile de stare se numește *alocabil* dacă oricare ar fi mulțimea simetrică<sup>1</sup>  $\sigma_0$  de  $n$  numere reale sau complexe, există o matrice de reacție  $F$  astfel încât spectrul sistemului cu reacție după stare să coincidă cu  $\sigma_0$ , adică

$$\sigma(A_F) = \sigma_0. \quad (4)$$

Se poate demonstra relativ ușor, pe baza teoremei descompunerii unui sistem necontrolabil (vezi cap. 13), că un sistem necontrolabil  $\Sigma(A, B, C)$  nu este alocabil deoarece, oricare ar fi matricele  $F$  și  $P$ , spectrul sistemului cu reacție după stare  $\Sigma_{F,P}(A, B, C)$  conține spectrul necontrolabil, deci fix, al lui  $\Sigma$ . Mai complicată este demonstrarea condiției necesare și suficiente de alocabilitate a sistemului  $\Sigma(A, B, C)$ .

<sup>1</sup> În care fiecare număr complex apare împreună cu conjugatul său.

**Teorema alocabilității spectrului prin reacție după stare.** *Un sistem este alocabil dacă și numai dacă este controlabil.*

Performanțele dinamice ale sistemului de reglare după stare sunt în mare măsură determinate de spectrul matricei  $A_F$ . Dacă sistemul  $\Sigma$  este controlabil, prin alegerea convenabilă a matricei de reacție  $F$ , putem obține spectrul dorit (impus)  $\sigma_0$  al sistemului închis (al matricei  $A_F$ ), deci putem proiecta sistemul închis pentru a avea performanțe dinamice oricât de bune. Acest lucru nu este însă perfect realizabil în cazul aplicațiilor practice, ca urmare a nivelului ridicat de zgomot și gradului de incertitudine al modelului sistemului  $\Sigma$ .

În cazul sistemelor cu o singură intrare ( $m=1$ ), *procedura de alocare a spectrului este următoarea:*

- a) Se calculează matricea de controlabilitate

$$C_n = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

și se verifică faptul că  $\text{rang } C_n = n$ ;

- b) Se determină vectorul  $h$  cu relația

$$h^T C_n = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1];$$

- c) Se calculează matricea de reacție  $F$  (tip linie) cu relația

$$F = h^T \mathcal{P}_0(A) = h^T \prod_{k=1}^n (A - \lambda_k^0 I), \quad (5)$$

unde  $\mathcal{P}_0(s)$  este polinomul caracteristic dorit (impus) al sistemului închis, iar  $\lambda_1^0, \dots, \lambda_n^0$  sunt rădăcinile lui  $\mathcal{P}_0(s)$ , adică elementele spectrului impus  $\sigma_0$ .

**Observație.** Procedura de alocare se simplifică în cazul unui sistem  $\Sigma_{C1}(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$  având *forma canonică controlabilă de tipul unu*. Astfel, dacă sistemul are polinomul caracteristic

$$\mathcal{P}(\lambda) = \det(\lambda I - \bar{A}) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0,$$

atunci alegând matricea de reacție

$$F_1 = [\alpha_0 - a_0 \quad \alpha_1 - a_1 \quad \dots \quad \alpha_{n-1} - a_{n-1}], \quad (6)$$

sistemul închis va avea polinomul caracteristic impus

$$\mathcal{P}_0(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0.$$

Intr-adevăr, avem

$$\begin{aligned} \bar{A} - \bar{B}F_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [\alpha_0 - a_0 \quad \alpha_1 - a_1 \quad \cdots \quad \alpha_{n-1} - a_{n-1}] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

deci

$$\det[\lambda I - (\bar{A} - \bar{B}F_1)] = \mathcal{P}_0(\lambda).$$

Dacă sistemul controlabil  $\Sigma$  nu are forma canonică controlabilă de tipul unu, atunci matricea de reacție  $F$  poate fi calculată cu relația (5) sau cu relația

$$F = F_1 S_{C1}^{-1}, \quad (7)$$

unde matricea pătrată  $S_{C1} = [s_1 s_2 \cdots s_n]$  este definită prin relațiile (28) de la capitolul 13.

■ In MATLAB, pentru calculul matricei de reacție  $F$  a unui sistem  $\Sigma(A, B, C)$  cu o singură intrare sau cu mai multe intrări, se utilizează respectiv funcțiile

- function  $F = \mathbf{acker}(A, B, s)$ ,
- function  $F = \mathbf{place}(A, B, s)$ .

Vectorul  $n$ -dimensional  $s$  definește spectrul dorit  $\sigma_0$  al sistemului cu reacție după stare.

## 14.2. ESTIMATOARE DE STARE

Cel mai simplu estimator de stare (numit de de tipul 1) al sistemului strict propriu  $\Sigma(A, B, C)$  de ordinul  $n$  este sistemul liniar de ordinul  $n$  și strict propriu, cu modelul

$$\tilde{\Sigma}_1: \dot{\tilde{X}} = A\tilde{X} + BU + L(Y - C\tilde{X}), \quad (8)$$

unde  $\tilde{X}$  este o estimare a stării  $X$  a sistemului  $\Sigma$ , iar  $L \in \mathbf{R}^{n \times p}$  este o matrice de corecție aleasă convenabil. In lipsa termenului de corecție  $L(Y - CW)$ , ecuația estimatorului coincide cu ecuația de stare a sistemului  $\Sigma$ . Dacă sistemul  $\Sigma$  are o singură ieșire ( $p=1$ ), atunci matricea de corecție  $L$  este de tip coloană.

Cu notația

$$A_L = A - LC, \quad (9)$$

modelul estimatorului de stare devine astfel:

$$\tilde{\Sigma}_1: \dot{\tilde{X}} = A_L \tilde{X} + BU + LY. \quad (10)$$

Estimatorul are ca intrări mărimile de intrare și de ieșire ( $U$  și  $Y$ ) ale sistemului  $\Sigma$ , iar ca ieșire mărimea  $\tilde{X}$  de estimare a stării  $X$  a sistemului  $\Sigma$ . Spectrul estimatorului de stare este mulțimea valorilor proprii ale matricei pătrate  $A_L$ .

Notând eroarea de estimare cu  $\tilde{E}$ , adică

$$\tilde{E} = \tilde{X} - X,$$

din ecuația (8) a estimatorului și din ecuațiile sistemului  $\Sigma$

$$\dot{X} = AX + BU, \quad Y = CX,$$

obținem ecuația erorii

$$\dot{\tilde{E}} = A_L \tilde{E}, \quad (11)$$

care implică

$$\tilde{E}(t) = e^{A_L t} \tilde{E}(0), \quad (12)$$

unde  $\tilde{E}(0)$  este eroarea de estimare inițială. Din (12) rezultă că estimatorul este asimptotic stabil, adică  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{E}(t) = 0$  oricare ar fi eroarea inițială  $\tilde{E}(0)$ , dacă și numai dacă toate valorile proprii ale matricei  $A_L$  au partea reală negativă. Ținând seama că

$$\sigma(A_L) = \sigma(A_L^T) = \sigma(A^T - C^T L^T), \quad (13)$$

din teorema alocabilității spectrului prin reacție după stare rezultă că estimatorul este alocabil dacă și numai dacă perechea  $(A^T, C^T)$  este controlabilă. În conformitate cu principiul dualității, perechea  $(A^T, C^T)$  este controlabilă dacă și numai dacă perechea  $(A, C)$  este observabilă. Obținem astfel

***Teorema alocabilității spectrului estimatorului.*** Estimatorul de stare (8) al unui sistem are spectrul alocabil dacă și numai dacă sistemul este observabil.

În cazul unui sistem  $\Sigma$  observabil, alegând valorile proprii ale matricei  $A_L$  în stânga axei imaginare și suficient de departe de aceasta, eroarea de estimare se

poate anula oricât de rapid. Practic, acest lucru nu este realizabil ca urmare a nivelului de zgomot și gradului de incertitudine al modelului sistemului  $\Sigma$ .

**Observație.** Procedul de alocare a spectrului estimatorului este similar celui de la reacția după stare. Astfel, în conformitate cu (13), dacă se dorește ca estimatorul să aibă spectrul  $\sigma_0$ , atunci se notează  $A^T$  cu  $A$  și  $C^T$  cu  $B$ , iar după aflarea matricei de reacție  $F$  astfel încât  $\sigma(A-BF)=\sigma_0$ , se calculează matricea de corecție  $L$  cu relația  $L=F^T$ .

### 14.3. ECUAȚIILE COMPENSATORULUI ȘI SISTEMULUI DE REGLARE CU ESTIMATOR ȘI REACȚIE DUPĂ STARE

Modelul compensatorului de tipul 1, format din legea de comandă după starea estimată (1) și estimatorul de stare (10), are forma

$$\Sigma_C: \begin{cases} \dot{\tilde{X}} = J \tilde{X} + BPR + LY \\ U = -F\tilde{X} + PR \end{cases}, \quad (14)$$

unde

$$J = A - LC - BF. \quad (15)$$

Să considerăm acum sistemul închis cu reacție după ieșire din fig. 14.3, format din sistemul liniar  $\Sigma(A, B, C)$  și compensatorul  $\Sigma_C$  cu modelul (14). Prin eliminarea comenzii  $U$ , din ecuațiile sistemului și compensatorului obținem modelul sistemului închis, de ordinul  $2n$ , sub următoarea formă:

$$\Sigma_0: \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{\tilde{X}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BF \\ LC & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \tilde{X} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BP \\ BP \end{bmatrix} R \\ Y = [C \ 0] \begin{bmatrix} X \\ \tilde{X} \end{bmatrix} \end{cases}. \quad (16)$$

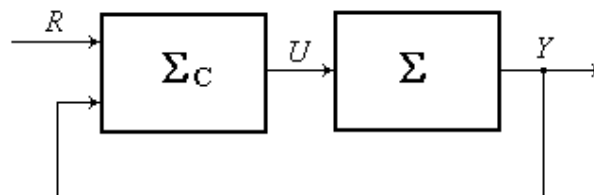


Fig. 14.3. Sistem de reglare cu compensator.

Datorită formei simple a relației (11), modelul sistemului închis se va simplifica prin înlocuirea stării  $\tilde{X}$  cu starea (eroarea)  $\tilde{E}$ . Într-adevăr, din

$$\tilde{X} = X + \tilde{E}$$

și

$$\dot{X} = AX + BU = AX + B(-F\tilde{X} + PR) = (A - BF)X - BF\tilde{E} + BPR,$$

obținem modelul sistemului închis, sub forma

$$\Sigma'_0: \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{\tilde{E}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_F & -BF \\ 0 & A_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \tilde{E} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BP \\ 0 \end{bmatrix} R \\ Y = [C \ 0] \begin{bmatrix} X \\ \tilde{E} \end{bmatrix} \end{cases} . \quad (17)$$

Prin urmare, sistemul închis are spectrul

$$\sigma_1 = \sigma(A_F) \cup \sigma(A_L) , \quad (18)$$

egal cu reuniunea disjunctă a spectrelor sistemului cu reacție după stare și estimatorului de stare.

**Observație.** Problema sintezei compensatorului cu estimator de stare și reacție după stare constă în determinarea matricelor  $P$ ,  $F$  și  $L$  astfel încât sistemul închis să satisfacă anumite performanțe impuse, de regim staționar și dinamic.

Matricea de precompensare  $P$  nu intervine în problema alocabilității sistemului de reglare cu reacție după stare și estimator de stare. În consecință, această matrice rămâne disponibilă în vederea satisfacerii unor cerințe suplimentare, cum ar fi cea referitoare la precizia reglării în regim staționar.

#### 14.4. PRECIZIA DE REGLARE

Pentru un sistem de reglare intern stabil la care vectorul de referință  $R$  are dimensiunea  $q$  egală cu dimensiunea  $p$  a mărimii reglate  $Y$ , să notăm cu  $E$  eroarea de reglare, adică

$$E(t) = R(t) - Y(t) ,$$

corespunzătoare intrării treaptă

$$R(t) = R_0 \cdot 1(t), \quad R_0 \in \mathbf{R}^p.$$

Anularea erorii staționare

$$E_{st} = \lim_{t \rightarrow \infty} E(t)$$

poate fi realizată în două moduri: prin precompensare (în buclă deschisă) și prin introducerea câte unui integrator pe fiecare canal de eroare (în buclă închisă).

Deoarece starea estimată  $\tilde{X}$  coincide în regim staționar (pentru  $t \rightarrow \infty$ ) cu starea  $X$  a procesului, estimatorul de stare nu influențează valoarea erorii staționare  $E_{st}$ . În consecință, pentru calculul erorii staționare vom considera că sistemul de reglare se identifică cu sistemul cu reacție după stare din fig. 14.2. Ținând seama de (2), avem

$$Y(s) = G_{F,P}(s)R(s), \quad G_{F,P}(s) = C(sI - A_F)^{-1}B_P,$$

deci

$$E(s) = R(s) - G_{F,P}(s)R(s) = [I - C(sI - A_F)^{-1}B_P] \frac{R_0}{s},$$

$$E_{st} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = [I + C(A - BF)^{-1}BP]R_0.$$

Prin urmare, eroarea staționară este nulă pentru orice funcție de intrare tip treaptă dacă și numai dacă are loc relația

$$I + C(A - BF)^{-1}BP = 0. \quad (19)$$

În cazul unui sistem de reglare la care numărul  $m$  al mărimilor de comandă, numărul  $q$  al mărimilor de referință și numărul  $p$  al mărimilor reglate sunt egale, iar matricea pătrată  $C(A - BF)^{-1}B$  este nesingulară, din (19) rezultă următoarea expresie a matricei pătrate de precompensare:

$$P = -[C(A - BF)^{-1}B]^{-1}. \quad (20)$$

Rezolvarea problemei anulării erorii staționare prin precompensare nu oferă o soluție practică robustă, datorită incertitudinii modelului sistemului  $\Sigma$ . Problema poate fi însă rezolvată într-o manieră structural robustă prin adăugarea unui set de  $p$  integratoare, câte unul pe fiecare canal de eroare.

## 14.5. APLICAȚII REZOLVATE

◆ **Aplicația 14.1.** Pentru sistemul  $\Sigma(A, B, C, D)$  de la aplicația 13.5, având

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

să se determine matricea de reacție după stare  $F$  astfel încât sistemul de reglare să aibă spectrul  $\sigma_0 = \{-2, -1, -1\}$ .

**Soluție.** Deoarece matricea de controlabilitate

$$C_3 = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -1 & 5 & -7 \\ 2 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

are rangul 3, sistemul este controlabil, deci alocabil.

Din

$$h^T C_3 = [0 \quad 0 \quad 1]$$

obținem  $h^T = [0, 7 \quad -0,1 \quad -0,4]$ , iar din

$$\mathcal{P}_0(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda + 1)^2$$

rezultă

$$\mathcal{P}_0(A) = (A + 2I)(A + I)^2 = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 6 \\ 8 & 12 & 10 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Prin urmare, în conformitate cu (5), avem

$$F = h^T \mathcal{P}_0(A) = [2, 2 \quad 2, 4 \quad 1, 6].$$

Sistemul cu reacție după stare are matricea

$$A_F = A - BF = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -11 & -7 & -8 \\ 16 & 12 & 18 \\ -22 & -19 & -21 \end{bmatrix},$$

cu spectrul  $\sigma(A_F) = \{-2, -1, -1\}$ .

Aceeași matrice de reacție  $F$  poate fi obținută pe baza relațiilor (6) și (7). Utilizând unele rezultate din cadrul aplicației 13.5, avem

$$\mathcal{P}(\lambda) = \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = \lambda^3 + \lambda^2 - 3\lambda - 1,$$

$$\mathcal{P}_0(\lambda) = \lambda^3 + \alpha_2 \lambda^{n-1} + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 = \lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2,$$

$$F_1 = [\alpha_0 - a_0 \quad \alpha_1 - a_1 \quad \alpha_2 - a_2] = [3 \quad 8 \quad 3],$$



$$S_{C1}^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 7 & -1 & -4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad F = F_1 S_{C1}^{-1} = \frac{1}{10} [22 \quad 24 \quad 16].$$

♦ **Aplicația 14.2.** Pentru sistemul  $\Sigma(A, B, C)$  cu

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0,1 \\ 1 & 0 & -0,8 \\ 0 & 1 & -1,7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 0 \quad 1],$$

să se proiecteze estimatorul de stare de tipul 1 care să aibă spectrul  $\sigma(A_L) = \{-2, -2, -2\}$ .

**Soluție.** Notând  $A^T$  cu  $A$  și  $C^T$  cu  $B$ , avem

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0,1 & -0,8 & -1,7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Deoarece perechea  $(A, B)$  are forma canonică controlabilă de tipul unu, în conformitate cu relația (6), din

$$\mathcal{P}(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^3 + 1,7\lambda^2 + 0,8\lambda + 0,1$$

și

$$\mathcal{P}_0(\lambda) = (\lambda + 2)^3 = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 12\lambda + 8,$$

rezultă

$$F = [8 - 0,1 \quad 12 - 0,8 \quad 6 - 1,7] = [7,9 \quad 11,2 \quad 4,3],$$

deci

$$L = F^T = \begin{bmatrix} 7,9 \\ 11,2 \\ 4,3 \end{bmatrix}.$$

Estimatorul proiectat are

$$A_L = A - LC = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0,1 \\ 1 & 0 & -0,8 \\ 0 & 1 & -1,7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7,9 \\ 11,2 \\ 4,3 \end{bmatrix} [0 \quad 0 \quad 1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & -12 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}.$$

și, în conformitate cu (10), are ecuațiile de stare

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = -8\tilde{x}_3 + 4u + 7,9y \\ \dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{x}_1 - 12\tilde{x}_3 + u + 11,2y \\ \dot{\tilde{x}}_3 = \tilde{x}_2 - 6\tilde{x}_3 + 4,3y \end{cases}.$$

Se poate verifica imediat că  $\sigma(A_L) = \{-2, -2, -2\}$ .

## 14.6. APLICAȚII DE AUTOCONTROL

◆ **C14.1.** Pentru sistemul  $\Sigma(A, B, C, D)$  cu

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

să se determine matricea de reacție după stare  $F$  astfel încât sistemul de reglare să aibă spectrul  $\sigma_0 = \{-1, -1, -1\}$ .

◆ **C14.2.** Pentru sistemul  $\Sigma(A, B, C)$  cu

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \ 2 \ 1],$$

să se proiecteze estimatorul de stare de tipul 1 care să aibă spectrul  $\sigma(A_L) = \{-1, -1, -1\}$ .

◆ **C14.3.** Pentru sistemul  $\Sigma(A, B, C)$  cu

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \ 2 \ 1], \quad D = 0,$$

să se proiecteze un compensator astfel încât sistemul cu reacție după stare și estimatorul de stare de tipul 1 să aibă fiecare spectrul  $\sigma = \{-1, -1, -1\}$ , iar eroarea staționară la referință treaptă să fie nulă.



## RĂSPUNSURI LA APLICAȚIILE DE AUTOCONTROL

**C2.1.**  $T_1 T_2 \frac{d^2 u_2}{dt^2} + T_2 \frac{du_2}{dt} + u_2 = u_1$ , unde  $T_1 = RC$ ,  $T_2 = \frac{L}{R}$ .

**C2.2.** a)  $T_1 T_2 \frac{d^2 u_2}{dt^2} + T_2 \frac{du_2}{dt} + u_2 = \frac{1}{2} u_1$ , unde  $T_1 = 2RC$ ,  $T_2 = \frac{L}{2R}$ ;

b) 
$$\begin{cases} L\dot{x}_1 = -2Rx_2 + u_1 \\ 2RC\dot{x}_2 = x_1 - x_2 \end{cases}, \quad u_2 = Rx_2.$$

**C2.3.**  $M\ddot{y} + (\alpha_1 + \alpha_2)\dot{y} + (k_1 + k_2)y = -\alpha_1\dot{u}_1 - k_1u_1 + \alpha_2\dot{u}_2 + k_2u_2$ .

**C2.4.** 
$$\begin{cases} A_1\dot{x}_1 = k_1g(-x_1 + x_2) + Q \\ A_2\dot{x}_2 = k_1gx_1 - (k_1 + k_2)x_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} h_1 = x_1 \\ h_2 = x_2 \end{cases}.$$

**C2.5.** 
$$\begin{cases} C_1\dot{x}_1 = -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)x_1 + \frac{1}{R_2}x_2 + \frac{1}{R_1}p_s \\ C_2\dot{x}_2 = \frac{1}{R_2}x_1 - \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)x_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} p_1 = x_1 \\ p_2 = x_2 \end{cases},$$

unde  $C_1 = \frac{MV_1}{RT}$  și  $C_2 = \frac{MV_2}{RT}$  sunt capacitățile pneumatice ale vaselor.

**C2.6.** Din

$$-\Delta G_2 = \frac{AE}{L} \Delta(h_2 - h_1),$$

rezultă  $\frac{dG_2}{dt} = \frac{AE}{L}(V_1 - V_2)$ , iar în final

$$T_1 \frac{dG_2}{dt} + G_2 = kV_1,$$

unde  $T_1 = \frac{L}{k_2 AE}$ ,  $k = \frac{1}{k_2}$ .

**C2.7.** Din

$$u_1 = R_1 \dot{i}_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + e, \quad e = k_e \omega I_2,$$

$$J \frac{d\omega}{dt} = m_a - m_r, \quad m_a = k_m I_2 \dot{i}_1,$$

rezultă

$$T_1 T_2 \frac{d^2 \omega}{dt^2} + T_1 \frac{d\omega}{dt} + \omega = k_1 u_1 - k_2 \left( T_2 \frac{dm_r}{dt} + m_r \right),$$

unde

$$T_1 = \frac{R_1 J}{k_e k_m I_2^2}, \quad T_2 = \frac{L_1}{R_1}, \quad k_1 = \frac{1}{k_e I_2} \quad \text{și} \quad k_2 = \frac{R_1}{k_e k_m I_2^2}.$$

$$\text{C2.8.} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -\frac{1}{5}x_1 - x_2 - \frac{8}{5}x_3 + \frac{1}{5}u \end{cases}, \quad y = x_1 + 4x_3.$$

$$\text{C2.9.} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -5x_2 + u \end{cases}, \quad y = x_1 - 20x_2 + 4u.$$

$$\text{C2.10.} \quad \begin{cases} x_1(t+1) = 2x_1(t) - 0,5x_3(t) + u(t) \\ x_2(t+1) = x_1(t) \\ x_3(t+1) = x_2(t) \end{cases}, \quad y(t) = 2x_1(t) - 5,5x_3(t) + u(t).$$

$$\text{C2.11.} \quad \begin{cases} x_1(t+1) = x_1(t) - 0,4x_2(t) + u(t) \\ x_2(t+1) = x_1(t) \\ x_3(t+1) = x_2(t) \end{cases}, \quad y(t) = x_1(t) + 2x_3(t).$$

$$\text{C2.12.} \quad \begin{cases} 5x_1(t+1) = x_1(t) - 2x_3(t) + u(t) \\ x_2(t+1) = x_1(t) \\ x_3(t+1) = x_2(t) \\ x_4(t+1) = x_3(t) \end{cases}, \quad y(t) = 2x_4(t).$$

$$\text{C2.13.} \quad \text{Pentru } m = -2: \quad \dot{y} - 3y = -\dot{u} + u.$$

$$\text{Pentru } m \neq -2: \quad \ddot{y} + (4m-1)y = \ddot{u} - 2\dot{u} - (2m+1)u.$$

$$\text{C2.14.} \quad \text{Pentru } m = 0: \quad y(t) + 2y(t-1) = u(t-1).$$

$$\text{Pentru } m \neq 0: \quad y(t) + (m+1)y(t-1) + (m-2)y(t-2) = u(t-1) + (m-1)u(t-2).$$

$$\text{C2.15.} \quad y(t) + y(t-1) = -u(t) + 6u(t-1).$$

\*\*\*\*\*

**C3.1.**  $h(t) = \frac{2}{5}e^{-\frac{t}{5}}, t \geq 0.$

**C3.2.**  $h(t) = 1 - \frac{7}{5}e^{-\frac{t}{5}}, g(t) = \frac{7}{25}e^{-\frac{t}{5}} - \frac{2}{5}\delta_0(t), t \geq 0.$

**C3.3.**  $h(t) = 2 + 4e^{-\frac{t}{2}} - 6e^{-\frac{t}{3}}, t \geq 0.$

**C3.4.**  $h(t) = 1 - 3e^{-\frac{t}{2}} + 2e^{-\frac{t}{3}}, t \geq 0.$

**C3.5.**  $h(t) = -5e^{-\frac{t}{2}} + 5e^{-\frac{t}{3}}, t \geq 0.$

**C3.6.**  $h(t) = t - 6 + 6e^{-\frac{t}{6}}, t \geq 0.$

**C3.7.**  $m > 0; h(t) = 1 - e^{-\frac{3t}{5}} (\cos \frac{t}{5} + 3 \sin \frac{t}{5}), t \geq 0.$

**C3.8.**  $h(t) = 1 - e^{-\frac{3t}{5}} (\cos \frac{t}{5} - \sin \frac{t}{5}), t \geq 0.$

**C3.9.**  $y(t) = \frac{1}{10}(e^{-\frac{t}{6}} - e^{-t}), t \geq 0.$

**C3.10.**  $y(t) = 6e^{-\frac{t}{3}} + \sin t - 3 \cos t, t \geq 0.$

**C3.11.**  $y(t) = 0, t \in \mathbf{R}.$

**C3.12.** a)  $v(t) = 3(1 - e^{-\frac{t}{4}}), t \geq 0;$  b)  $y(t) = 6(1 + 4e^{-\frac{t}{4}} - 5e^{-\frac{t}{5}}), t \geq 0.$

**C3.13.** a)  $5\ddot{y} + 6\dot{y} + 2y = \dot{u} + u;$  b)  $y(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-\frac{3t}{5}} (\cos \frac{t}{5} + \sin \frac{t}{5});$   
c)  $5\ddot{e} + 6\dot{e} + 2e = 5\ddot{u} + 6\dot{u} + u;$  d)  $e(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-\frac{3t}{5}} (\cos \frac{t}{5} + 3 \sin \frac{t}{5}).$

**C3.14.** a)  $y(t) = \delta_0(t) - \frac{1}{3}e^{-\frac{t}{3}};$  b)  $y(t) = 3(1 - e^{-\frac{t}{3}});$

$$c) y(t) = \begin{cases} e^{-\frac{t}{3}}, & t \in [0, 3) \\ -(e-1)e^{-\frac{t}{3}}, & t \in [3, \infty) \end{cases}.$$

$$\text{C3.15. } m \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty); \quad h(t) = 2 - \frac{8}{3} \cdot 2^{-t} + \frac{2}{3} \cdot 5^{-t}, \quad g(t) = \frac{8}{3}(2^{-t} - 5^{-t}).$$

$$\text{C3.16. } h(t) = \frac{8}{5} [1 - 2^{-t} (\cos \frac{\pi t}{2} + 2 \sin \frac{\pi t}{2})]; \quad g(t) = \begin{cases} 0, & t=0 \\ -2^{3-t} \cos \frac{\pi t}{2}, & t \geq 1 \end{cases}.$$

$$\text{C3.17. } h(t) = 3 - (-1)^t - 2 \cos \frac{\pi t}{3} + 2\sqrt{3} \sin \frac{\pi t}{3}; \quad g(t) = 2(-1)^{t+1} + 2 \cos \frac{\pi t}{3} + 2\sqrt{3} \sin \frac{\pi t}{3}.$$

$$\text{C3.18. } h(t) = \begin{cases} 0, & t=0, 1, 2, 3 \\ 2 - 2^{5-t}, & t \geq 4 \end{cases}; \quad g(t) = \begin{cases} 0, & t=0, 1, 2, 3, 4 \\ 2^{5-t}, & t \geq 5 \end{cases}.$$

$$\text{C3.19. } G_1(s) = \frac{2s+1}{10s^2+7s+1} = \frac{1}{5s+1}; \quad G_2(s) = \frac{1}{5s+1}.$$

$$\text{C3.20. } G_1(s) = \frac{s+1}{s^2+ms+2}; \quad G_2(s) = \frac{1}{s+2}; \quad m=3;$$

$$\text{C3.21. } G_1(s) = G_2(s) = \frac{2}{s^2+4s+3}.$$

$$\text{C3.22. } G_1(z) = G_2(z) = \frac{4z^{-1}}{2-z^{-1}}.$$

$$\text{C3.23. } G(s) = \frac{2(2s+1)}{2s^3+ms^2+6s+1}. \text{ Numitorul are rădăcina } -1/2 \text{ pentru } m=9, \text{ când}$$

$G(s) = \frac{2}{s^2+4s+1}$ . Prin urmare, pentru  $m=9$ , sistemul nu este minimal și are forma minimală  $\ddot{y} + 4\dot{y} + y = 2u$ .

$$\text{C3.24. } G(z) = \frac{1+z^{-1}}{6+mz^{-1}+z^{-2}}. \text{ Numitorul are rădăcina } -1 \text{ pentru } m=7, \text{ când}$$

$G(s) = \frac{1}{6+z^{-1}}$ . Sistemul este minimal pentru  $m \neq 7$ . În cazul  $m=7$ , sistemul are forma minimală  $6y(t) + 6y(t-1) = u(t)$ .

**C3.25.** Discretizatul propriu-zis:

$$y_k - (p+1)y_{k-1} + py_{k-2} = KT_1(a+p-1)u_{k-1} + KT_1(1-p-ap)u_{k-2},$$

unde  $p=e^{-T/T_1}$  și  $a=T/T_1$ ;

Discretizatul aproximativ:

$$(a+1)y_k - (a+2)y_{k-1} + y_{k-2} = K T a u_{k-1}.$$

**C3.26.** Discretizatul propriu zis în cazul  $T_1 \neq T_2$ :

$$y_k - (p+q)y_{k-1} + pqy_{k-2} = \left(1 - \frac{cp-q}{c-1}\right)u_{k-1} + \left(pq - \frac{cq-p}{c-1}\right)u_{k-2},$$

unde  $p=e^{-T/T_1}$ ,  $q=e^{-T/T_2}$  și  $c=\frac{T_1}{T_2}$ ;

Discretizatul propriu-zis în cazul  $T_1=T_2$ :

$$y_k - 2py_{k-1} + p^2y_{k-2} = (1-p-ap)u_{k-1} - p(1-p-a)u_{k-2},$$

unde  $p=e^{-T/T_1}$  și  $a=\frac{T}{T_1}$ ;

Discretizatul aproximativ:

$$(a+b+1)y_k - (a+b+2-ab)y_{k-1} + y_{k-2} = ab u_{k-1},$$

unde  $a=T/T_1$  și  $b=T/T_2$ .

**C3.27.**  $g(t)=1+(\frac{\tau_1}{T_1}-1)e^{-t/T_1}$ ,  $g(0)=\frac{\tau_1}{T_1}$ ;

Necesitatea:  $g(0) \geq 0 \Rightarrow \tau_1 \geq 0$ .

Suficiența:  $\tau_1 \geq 0 \Rightarrow g(t) \geq 1 - e^{-t/T_1} \geq 0$ .

**C3.28.**  $g(t) = \begin{cases} 0, & t=0 \\ 1, & t=1 \\ (a-2)a^{t-2}, & t \geq 2 \end{cases}$ ;  $g(t) \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 2$ .

\*\*\*\*\*

**C4.1.**  $m > 0$ ;

$$x_1(t) = -2 + 4e^t - 2e^{2t}; \quad x_2(t) = 1 - 4e^t + 4e^{2t};$$

$$y_1(t) = -3 + 8e^t - 6e^{2t}; \quad y_2(t) = -1 + 2e^{2t}$$

**C4.2.** a)  $x_1(t) = 5 + e^{3t} - 6e^{-2t}$ ;  $x_2(t) = 5 - 2e^{3t} - 3e^{-2t}$ ;

$$y(t) = 15 - 3e^{3t} - 12e^{-2t}.$$

b)  $g(t) = -9e^{3t} + 24e^{-2t}$ .

**C4.3.** a)  $x_1(t) = (-1)^t - 5 \cdot 3^t$ ;  $x_2(t) = -4 + 3(-1)^t + 5 \cdot 3^t$ ;



$$y(t) = -4 + 4(-1)^t.$$

$$\text{b) } x_1(t) = (-1)^t - 3^t; \quad x_2(t) = -4 + 3(-1)^t + 3^t;$$

$$y(t) = -4 + 4(-1)^t.$$

$$\text{C4.4. } \bar{\Sigma}: \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

$$\text{C4.5. } \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \quad V = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad V^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Discretizatul propriu-zis:

$$\Sigma^0: \begin{bmatrix} x_1(t+T) \\ x_2(t+T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a-b & -2a+2b \\ a-b & -a+2b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \frac{1-b}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),$$

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t),$$

unde  $a = e^{-T}$ ,  $b = e^{-2T}$ .

Discretizatul aproximativ:

$$\tilde{\Sigma}: \begin{bmatrix} x_1(t+T) \\ x_2(t+T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2T \\ T & 1-3T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),$$

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t).$$

$$\text{C4.6. a) } X_f(t) = \left( \int_0^t e^{Au} du \right) B U_0 = \left( \int_0^t A e^{Au} du \right) X_0 = (e^{At} - I) X_0 = X_f(t) - X_0.$$

$$\text{b) } \dot{X}_f(t) = e^{At} B U_0 = e^{At} X_0 = X_f(t).$$

$$\text{C4.7. } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{9}(-2x_1 - 6x_2 + u) \end{cases}, \quad y = x_1 + 3x_2.$$

$$\text{C4.8. } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 7x_2 + u \end{cases}, \quad y = -7x_1 - 25x_2 + 4u.$$

$$\text{C4.9. } \frac{-1}{2} \leq m \leq \frac{3}{2}.$$

\*\*\*\*\*

**C5.1.**  $G(s) = \frac{2s+1}{7s+1}$ .

a)  $Y(s) = \frac{2s+1}{s(7s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{5}{7s+1}$ ;  $y(t) = 1 - \frac{5}{7}e^{-\frac{t}{7}}$ ,  $t \geq 0$ .

b)  $Y(s) = \frac{2s+1}{7s+1} = \frac{2}{7} + \frac{5}{7(7s+1)}$ ;  $y(t) = \frac{2}{7}\delta_0(t) + \frac{5}{49}e^{-\frac{t}{7}}$ ,  $t \geq 0$ .

c)  $Y(s) = \frac{2s+1}{s^2(7s+1)} = \frac{1}{s^2} + \frac{5}{s} - \frac{35}{7s+1}$ ;  $y(t) = t + 5 - 5e^{-\frac{t}{7}}$ ,  $t \geq 0$ .

d)  $Y(s) = \frac{2(2s+1)}{(7s+1)(4s^2+1)} = \frac{1}{53} \left( \frac{35}{7s+1} - \frac{20s-18}{4s^2+1} \right)$ ;

$$y(t) = \frac{1}{53} \left( 5e^{-\frac{t}{7}} - 5\cos\frac{t}{2} + 9\sin\frac{t}{2} \right), \quad t \geq 0.$$

**C5.2.**  $G(s) = \frac{2}{2s+1}$ ;  $H(s) = \frac{2}{s(2s+1)} = 2 \left( \frac{1}{s} - \frac{2}{2s+1} \right)$ ;  $h(t) = 2(1 - e^{-\frac{t}{2}})$ ,  $t \geq 0$ ;

$$g(t) = e^{-\frac{t}{2}}, \quad t \geq 0;$$

$$2\dot{y} + y = 2u.$$

**C5.3.**  $G(s) = \frac{3s+1}{3s^2+4s+2}$ ;

$$2H(s) = \frac{2(3s+1)}{s(3s^2+4s+2)} = \frac{1}{s} - \frac{3s-2}{3s^2+4s+2} = \frac{1}{s} - \frac{s-2/3}{(s+2/3)^2 + (\sqrt{2}/3)^2},$$

$$2h(t) = 1 - e^{-\frac{2t}{3}} \left( \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - 2\sqrt{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t \right), \quad t \geq 0.$$

**C5.4.**  $G(s) = \frac{8s^2+3s+1}{4s^3+4s^2+5s+2}$ .

a)  $h(0+) = G(\infty) = 2$ ; b)  $h'(0+) = \frac{b_{n-1}}{a_n} = \frac{3}{4}$ ; c)  $h(\infty) = G(0) = \frac{1}{2}$ .

**C5.5.** a)  $G_1(s) = \frac{3s+1}{4s+1}$ ,  $G_2(s) = \frac{2}{5s+1}$ ,  $G(s) = \frac{2(3s+1)}{(4s+1)(5s+1)}$ .

b)  $V(s) = \frac{3s+1}{s(4s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{4s+1}$ ;  $y(t) = 1 - \frac{1}{4}e^{-\frac{t}{4}}$ ,  $t \geq 0$ .

c)  $Y(s) = \frac{2(3s+1)}{s(4s+1)(5s+1)} = \frac{2}{s} + \frac{8}{4s+1} - \frac{20}{5s+1}$ ;  $y(t) = 2(1 + e^{-\frac{t}{4}} - 2e^{-\frac{t}{5}})$ ,  $t \geq 0$ .

$$\text{C5.6. a) } G_1(s) = \frac{1}{4s+1}, \quad G_2(s) = \frac{1}{2s+1}, \quad G(s) = \frac{2s+1}{2(4s^2+3s+2)}.$$

$$\text{b) } 4Y(s) = \frac{4s+2}{s(4s^2+3s+2)} = \frac{1}{s} - \frac{4s-1}{4s^2+3s+2} = \frac{1}{s} - \frac{(s+3/8)-5/8}{(s+3/8)^2+(\sqrt{23}/8)^2};$$

$$4y(t) = 1 - e^{-\frac{3t}{8}} \left( \cos \frac{\sqrt{23}}{8} t - \frac{5}{\sqrt{23}} \sin \frac{\sqrt{23}}{8} t \right), \quad t \geq 0.$$

$$\text{C5.7. } G_1(s) = \frac{4s+1}{T_1 s(10s+1)}, \quad G_2(s) = \frac{2s+1}{4s+1}, \quad G(s) = \frac{4s+1}{10T_1 s^2 + (T_1+2)s+1}.$$

$$\text{a) } G(s) = \frac{4s+1}{360s^2+38s+1} = \frac{4s+1}{(18s+1)(20s+1)};$$

$$Y(s) = \frac{4s+1}{s(18s+1)(20s+1)} = \frac{1}{s} + \frac{126}{18s+1} - \frac{160}{20s+1};$$

$$y(t) = 1 + 7e^{-t/18} - 8e^{-t/20}, \quad t \geq 0.$$

$$\text{b) } G(s) = \frac{4s+1}{20s^2+4s+1} = \frac{1}{20} \cdot \frac{4s+1}{(s+\frac{1}{10})^2 + \frac{1}{5^2}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{(s+\frac{1}{10}) + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5}}{(s+\frac{1}{10})^2 + \frac{1}{5^2}};$$

$$Y(s) = \frac{4s+1}{s(20s^2+4s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{20s}{20s^2+4s+1} = \frac{1}{s} - \frac{s}{(s+\frac{1}{10})^2 + \frac{1}{5^2}} = \frac{1}{s} - \frac{(s+\frac{1}{10}) - 0,5 \cdot \frac{1}{5}}{(s+\frac{1}{10})^2 + \frac{1}{5^2}};$$

$$y(t) = 1 - e^{-t/10} (\cos t/5 - 0,5 \sin t/5), \quad t \geq 0.$$

$$\text{C5.8. a) } (sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s-1)(s+4)} \begin{bmatrix} s+1 & 3 \\ 2 & s+2 \end{bmatrix},$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B + D = \frac{2-p}{s-1}, \quad h(t) = (2-p)(e^t - 1).$$

b) Sistemul I-S-E nu este minimal deoarece are ordinul 2, iar funcția sa de transfer are ordinul 1.

$$\text{C5.9. a) } (sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+5)} \begin{bmatrix} s+2 & 3 \\ 1 & s+4 \end{bmatrix},$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B + D = \frac{1}{(s+1)(s+5)} \begin{bmatrix} -s-7 & 2s+8 \\ -2s-2 & -2s-2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{b) } Y_1(s) = G_{12}(s)U_2(s) = \frac{2s+8}{s(s+1)(s+5)} = \frac{8}{5s} - \frac{3}{2(s+1)} - \frac{1}{10(s+5)};$$

$$y_1(t) = \frac{8}{5} - \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{10}e^{-5t}.$$

$$\text{C5.10. } (sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 + 2s + 1 - 2p} \begin{bmatrix} s+1 & p \\ 2 & s+1 \end{bmatrix},$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = -\frac{s+3-2p}{s^2 + 2s + 1 - 2p} + 2;$$

$$G(s) = \frac{-1}{s+3} + 2 = \frac{2s+5}{s+3} \text{ pentru } p=2; \quad G(s) = \frac{-1}{s} + 2 = \frac{2s-1}{s} \text{ pentru } p=\frac{1}{2}.$$

**C5.11.** Pentru  $T_1 < T_2$ , avem  $\tau < T_1 < T_2$ .

$$h(t) = 1 + \frac{1}{T_2 - T_1} [(T_1 - \tau)e^{-t/T_1} - (T_2 - \tau)e^{-t/T_2}].$$

$$h''(t) = 0 \Leftrightarrow e^{t(1/T_1 - 1/T_2)} = \frac{(T_1 - \tau)T_2^2}{(T_2 - \tau)T_1^2}.$$

Există  $t > 0$  dacă  $\frac{(T_1 - \tau)T_2^2}{(T_2 - \tau)T_1^2} > 1$ , adică  $\frac{1}{\tau} > \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}$ .

**C5.12.** Se ține seama că sistemul semipropru cu funcția de transfer  $G_1(s) = sG(s)$  are funcția indicială  $h_1(t) = h'(t)$ , deci  $h''(0_+) = h_1'(0_+)$ , apoi se aplică formula (22') în condiția  $h_1'(0_+) > 0$ .

Aplicând C5.12 în condițiile sistemului de la C5.11, rezultă  $\frac{1}{\tau} > \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}$ , adică

$\frac{1}{\tau} > \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}$ . În plus, dacă răspunsul indicial este strict convex în origine, atunci are un punct de inflexiune la un moment  $t > 0$

**C5.13.** Răspunsul la intrare impuls Dirac este  $g(t) = e^{-t/2}$ . Deoarece sistemul este liniar și are semnalul de intrare  $u(t)$  de infinit ori mai mic decât impulsul Dirac, răspunsul  $y(t)$  este de infinit ori mai mic decât  $g(t)$ , adică  $y(t) = 0$  pentru  $t \geq 0$ .

$$\text{C5.14. } y(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} sG(s)U(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot \frac{s+1}{(2s+1)(Ts+1)} \cdot \left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}\right) = 0.$$

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)U(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{s+1}{(2s+1)(Ts+1)} \cdot 0 = 0.$$

$$\mathbf{C5.15.} \quad G_{r1}(s) = \frac{4}{17s+2}; \quad G_{r2}(s) = \frac{-7s+142}{1220s^2+607s+71}.$$

**C5.16.** Sistemul are polii  $p_1 = -1/15$  și  $p_2 = -3/4$ , cu  $p_1 > p_2$ . Deoarece  $p_1 \gg p_2$  ( $p_2 = \frac{45}{4} p_1 < 0$ ), prin eliminarea modului serial asociat polului  $p_2$  - relația (119), rezultă  $G_r(s) = \frac{s+3}{3(15s+1)}$ .

**C5.17.** Sistemul are polii  $p_1 = -1/16$ ,  $p_2 = -1/2$  și  $p_3 = -1$ , cu  $p_1 > p_2 > p_3$ . Deoarece  $p_1 \gg p_2$  ( $p_2 = 8p_1 < 0$ ), prin eliminarea modurilor seriale asociate polilor  $p_2$  și  $p_3$  - relația (119), rezultă  $G_r(s) = \frac{2}{16s+1}$ .

**C5.18.** Din condiția ca funcțiile cu același termen liber

$$f_1(s) = (Ts+1)e^{\tau s} = (Ts+1)\left(1 + \frac{\tau s}{1!} + \frac{\tau^2 s^2}{2!} + \dots\right)$$

și

$$f_2(s) = (T_1 s + 1)(T_2 s + 1),$$

să aibă și termenii în  $s$  și  $s^2$  egali., rezultă

$$T_1 + T_2 = T + \tau, \quad T_1 T_2 = T\tau + \frac{\tau^2}{2},$$

din care obținem

$$G_r(s) = \frac{1}{\tau(T + \tau/2)s^2 + (T + \tau)s + 1}.$$

**C5.19.** Din condiția ca funcțiile cu același termen liber

$$f_1(s) = Ts e^{\tau s} + 1 = Ts\left(1 + \frac{\tau s}{1!} + \frac{\tau^2 s^2}{2!} + \dots\right) + 1$$

și

$$f_2(s) = (T_1 s + 1)(T_2 s + 1),$$

să aibă egali și termenii în  $s$  și  $s^2$ , rezultă

$$T_1 + T_2 = T, \quad T_1 T_2 = T\tau,$$

din care obținem

$$G_r(s) = \frac{1}{T\tau s^2 + Ts + 1}.$$

$$\mathbf{C5.20.} \quad G(s) = \frac{A}{T_1 s + 1} + \frac{B(T_1 s + 1) + Ck_1}{(T_1 s + 1)^2 + k_1^2},$$

unde

$$C = \frac{2\tau}{k_1 T_1} \left( \frac{\tau}{T_1} - 1 \right), \quad A = \frac{k^2}{k_1^2} + \frac{T_1^2}{4\tau^2} C^2, \quad B = \frac{\tau^2}{T_1^2} - A.$$

$$T_1 g(t) = \left( A + B \cos \frac{k_1}{T_1} t + C \sin \frac{k_1}{T_1} t \right) e^{-\frac{t}{T_1}} \geq 0,$$

deoarece

$$A^2 - B^2 - C^2 = \frac{2k_1^2 \tau^2}{T_1^2} \left[ k^2 - \frac{\tau^2}{2T_1^2} k_1^2 - \left( \frac{\tau}{T_1} - 1 \right)^2 \right] \geq 0.$$

**C5.21.** Se ține seama de Propoziția 1'. Avem  $3 < 5 < 9$ ,  $4 < 6 < 7$  și

$$\begin{aligned} 3 &< 4 \\ 3 + 5 &< 4 + 6 \\ 3 + 5 + 9 &= 4 + 6 + 7. \end{aligned}$$

\*\*\*\*\*

$$\begin{aligned} \mathbf{C6.1.} \quad G(z) &= \frac{z^{-1} + 2z^{-3}}{3 - z^{-1} - 2z^{-2}} = -z^{-1} + \frac{4z^{-1} - z^{-2}}{3 - z^{-1} - 2z^{-2}} \\ &= z^{-1} \left[ -1 + \frac{4 - z^{-1}}{(1 - z^{-1})(3 + 2z^{-1})} \right] = z^{-1} \left[ -1 + \frac{3}{5(1 - z^{-1})} + \frac{11}{5(3 + 2z^{-1})} \right] \\ &= z^{-1} \left[ -1 + \frac{3}{5(1 - z^{-1})} + \frac{11}{15} \cdot \frac{1}{5(1 - (-2/3)z^{-1})} \right], \\ g(t) &= -\delta^0(t-1) + \frac{3}{5} \cdot 1^0(t-1) + \frac{11}{5} \left( \frac{-2}{3} \right)^{t-1} \cdot 1^0(t-1), \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

deci

$$\begin{aligned} g(0) &= 0, \\ g(1) &= -1 + \frac{3}{5} + \frac{11}{3} = \frac{1}{3}, \\ g(t) &= \frac{3}{5} + \frac{11}{5} \left( \frac{-2}{3} \right)^{t-1}, \quad t = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

$$\mathbf{C6.2.} \quad G(z) = \frac{0,45z^{-2}}{(1 + 0,4z^{-1})(1 + 0,5z^{-1})};$$

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{0,45z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 + 0,4z^{-1})(1 + 0,5z^{-1})} \\ &= \frac{3}{14(1 - z^{-1})} - \frac{45}{14(1 + 0,4z^{-1})} + \frac{3}{1 + 0,5z^{-1}}; \end{aligned}$$

$$h_k = \frac{3}{14}[1 - 15(-0,4)^k + 14(-0,5)^k]; \quad k=0,1,2,\dots$$

$$g_0 = 0;$$

$$g_k = h_k - h_{k-1} = \frac{9}{4}[-5(-0,4)^k + 4(-0,5)^k] \quad \text{pentru } k=1,2,3,\dots$$

$$\mathbf{C6.3.} \quad G(z) = \frac{3z^{-1} + 4z^{-2}}{(2-z^{-1})(8-z^{-1})};$$

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{3z^{-1} + 4z^{-2}}{(1-z^{-1})(2-z^{-1})(8-z^{-1})} \\ &= \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{11}{3(2-z^{-1})} + \frac{20}{3(8-z^{-1})}; \\ &= \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{11}{6(1-0,5z^{-1})} + \frac{5}{6(1-0,125z^{-1})}; \end{aligned}$$

$$h_k = 1 - \frac{11}{6} \cdot 0,5^k + \frac{5}{6} \cdot 0,125^k.$$

$$\mathbf{C6.4.} \quad (\text{a}) \quad G_1(z) = K = \frac{5}{8}, \quad G_2(z) = \frac{z^{-2}}{2-z^{-1}-z^{-2}};$$

$$G_{YU}(z) = \frac{G_1(z)G_2(z)}{1+G_1(z)G_2(z)} = \frac{5z^{-2}}{16-8z^{-1}-3z^{-2}} = \frac{5z^{-2}}{(4-3z^{-1})(4+z^{-1})};$$

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{5z^{-2}}{(1-z^{-1})(4-3z^{-1})(4+z^{-1})} = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{5}{4-3z^{-1}} + \frac{1}{4+z^{-1}} \\ &= \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{5}{4(1-0,75z^{-1})} + \frac{1}{4(1+0,25z^{-1})}; \end{aligned}$$

$$y_k = 1 - 1,25 \cdot 0,75^k - (-0,25)^{k+1}, \quad k=0,1,2,\dots$$

$$\text{b)} \quad G_{YU}(z) = \frac{G_1(z)G_2(z)}{1+G_1(z)G_2(z)} = \frac{Kz^{-2}}{2-z^{-1}+(K-1)z^{-2}};$$

$P(z) = 2z^2 - z + K - 1$  - polinomul caracteristic.

Pentru  $K=9/8$ , avem  $z_{1,2} = 1/4$ .

Pentru  $9/8 < K \leq 3$ , avem  $z_{1,2} = \frac{1 \pm j\sqrt{8K-9}}{4}$ ,  $|z_{1,2}| = \frac{\sqrt{1+(8K-9)}}{4} = \sqrt{\frac{K-1}{2}} \leq 1$ .

Pentru  $0 < K < 9/8$ , avem  $z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{9-8K}}{4}$ ,  $|z_{1,2}| \leq \frac{1+\sqrt{9-8K}}{4} < \frac{1+\sqrt{9}}{4} = 1$ .

**C6.5.** Discretizatul propriu-zis:

$$G(z) = \frac{(1+0,4\sin\alpha - \cos\alpha)z^{-1} + (1-0,4\sin\alpha - \cos\alpha)z^{-2}}{1-2\cos\alpha z^{-1} + z^{-2}}, \quad \alpha = \frac{T}{5},$$

$$y_k - 2\cos\alpha y_{k-1} + y_{k-2} = (1+0,4\sin\alpha - \cos\alpha)u_{k-1} + (1-0,4\sin\alpha - \cos\alpha)u_{k-2}.$$

Discretizatul aproximativ:

$$25 \cdot \frac{y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2}}{T^2} + y_{k-1} = 2 \cdot \frac{u_k - u_{k-1}}{T} + u_{k-1},$$

$$y_k - (2 - \frac{T^2}{25})y_{k-1} + y_{k-2} = \frac{T(T+2)}{25}u_k - \frac{2T}{25}u_{k-1}.$$

**C6.6.** a) Avem

$$p = e^{-T/2} = e^{-1/2} \approx 0,92;$$

$$(G_E G_P G_T)^0 = \left(\frac{e^{-s}}{11s+1}\right)^0 = (e^{-s})^0 \left(\frac{1}{11s+1}\right)^0 = z^{-1} \frac{(1-p)z^{-1}}{1-pz^{-1}} = \frac{(1-p)z^{-2}}{1-pz^{-1}},$$

$$P(z) = 1 + G_R(z) \cdot (G_E G_P G_T)^0 = 1 + \frac{K(1-p)z^{-2}}{(1-z^{-1})(1-pz^{-1})},$$

$$G_{ER}(z) = \frac{1}{P(z)} = \frac{(1-z^{-1})(1-pz^{-1})}{1-(1+p)z^{-1} + (p+K-Kp)z^{-2}},$$

$$\begin{aligned} E(z) = G_{ER}(z) \cdot R(z) &= \frac{1-pz^{-1}}{1-(1+p)z^{-1} + (p+K-Kp)z^{-2}} \\ &= \frac{1-0,92z^{-1}}{1-1,92z^{-1} + (0,92+0,08K)z^{-2}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } E(z) &= \frac{1-0,92z^{-1}}{1-1,92z^{-1} + 0,9212z^{-2}} = \frac{1-0,92z^{-1}}{(1-0,94z^{-1})(1-0,98z^{-1})} \\ &= \frac{1,5}{1-0,98z^{-1}} - \frac{0,5}{1-0,94z^{-1}}, \end{aligned}$$

$$\varepsilon_k = 1,5 \cdot 0,98^k - 0,5 \cdot 0,94^k, \quad k=0,1,2,\dots$$

$$\text{c) } E(z) = \frac{1-0,92z^{-1}}{1-2 \cdot 0,96z^{-1} + z^{-2}} = \frac{1-0,96z^{-1}}{1-2 \cdot 0,96z^{-1} + z^{-2}} + \frac{0,28z^{-1}}{7(1-2 \cdot 0,96z^{-1} + z^{-2})},$$

$$\varepsilon_k = \cos k\omega + \frac{1}{7} \sin k\omega, \quad k=0,1,2,\dots$$

$$\text{where } \omega = \text{atan} \frac{0,28}{0,96} = \text{atan} \frac{7}{24}.$$



d)  $P(z) = z^2 - 1,92z + 0,92 + 0,08K$  - polinomul caracteristic.

Pentru  $K = 0,02$ , avem  $z_{1,2} = 0,96$ .

Pentru  $0,02 < K \leq 1$ , avem

$$z_{1,2} = 0,96 \pm j\sqrt{0,08(K-0,02)},$$

$$|z_{1,2}| = \sqrt{0,96^2 + 0,08(K-0,02)} \leq \sqrt{0,96^2 + 0,08 \cdot 0,98} = 1.$$

Pentru  $0 < K < 0,02$ , avem

$$z_{1,2} = 0,96 \pm \sqrt{0,08(0,02-K)},$$

$$|z_{1,2}| \leq 0,96 + \sqrt{0,08(0,02-K)} < 0,96 + \sqrt{0,08 \cdot 0,02} = 1.$$

**C6.7.** Avem  $g(0) = G(\infty) = 0$ , iar din

$$G(z) = \frac{a-c}{a+b} \cdot \frac{1}{z-a} + \frac{b+c}{a+b} \cdot \frac{1}{z+b},$$

rezultă

$$g(t) = \frac{a-c}{a+b} \cdot a^{t-1} + \frac{b+c}{a+b} \cdot (-b)^{t-1}, \quad t \geq 1,$$

deci

$$g(1) = \frac{a-c}{a+b} + \frac{b+c}{a+b} = 1.$$

Condiția  $a \geq b+c$  este necesară ca sistemul să fie C-monotonic, deoarece

$$g(2) = \frac{a-c}{a+b} \cdot a + \frac{b+c}{a+b} \cdot (-b) = a - b - c.$$

Condiția  $a \geq b+c$  este suficientă ca sistemul să fie C-monotonic, deoarece

$$g(t) \geq \frac{a-c}{a+b} \cdot a^{t-1} - \frac{b+c}{a+b} \cdot b^{t-1} \geq \frac{a-c}{a+b} \cdot a^{t-1} - \frac{b+c}{a+b} \cdot a^{t-2} b = (a-b-c) a^{t-2} \geq 0.$$

**C6.8.** Deoarece

$$g(1) = a - b - c - d,$$

condiția  $a \geq b+c+d$  este necesară. În conformitate cu aplicația 6.12, sistemul cu funcția de transfer

$$G_1(z) = \frac{1}{(z-a)(z+b)}$$

este C-monotonic dacă și numai dacă  $a-b \geq 0$ . Această condiție este satisfăcută deoarece  $a-b \geq c+d > 0$ ; prin urmare, avem  $g_1(t) \geq 0$  pentru orice  $t \geq 0$ . Scriind funcția de transfer  $G(z)$  sub forma

$$G(z) = 1 + \frac{(a-b-c-d)z + ab + cd}{(z-a)(z+b)},$$

rezultă

$$g(t) = \delta^0(t) + (a-b-c-d)g_1(t+1) + (ab+cd)g_1(t) \geq 0$$

pentru  $t \geq 0$ , deci sistemul cu funcția de transfer  $G(z)$  este C-monotonic.

**C6.9.** Fără a pierde din generalitate, presupunem  $a = \max\{a, b\}$ , deci

$$a \geq c.$$

Deoarece subsistemul cu funcția de transfer  $G_1(z) = \frac{1}{z-b}$  este C-monotonic, este suficient să arătăm că și subsistemul cu funcția de transfer  $G_2(z) = \frac{1}{(z-a)(z+c)}$  este C-monotonic. Asta are loc dacă și numai dacă  $a-c \geq 0$  (aplicația 6.12), ceea ce este adevărat.

\*\*\*\*\*

**C7.1.** a)  $\omega_b = \frac{1}{T_1} = 0,1$  rad/sec.

b)  $A = \frac{2}{\sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1}} = \frac{4}{\sqrt{29}}$ ,  $\alpha = -\arctg T_1 \omega = -\arctg \frac{5}{2}$ ;

**C7.2.** a)  $G_1(s) = \frac{3s+1}{4s+1}$ ,

$$A = \frac{2\sqrt{9\omega^2+1}}{\sqrt{16\omega^2+1}} = \frac{6\sqrt{2}}{5}, \quad \alpha = \arctg 3\omega - \arctg 4\omega = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{4}{3}.$$

b)  $G(s) = \frac{2(3s+1)}{(4s+1)(5s+1)}$ ,

$$A = \frac{2\sqrt{9\omega^2+1}}{\sqrt{(16\omega^2+1)(25\omega^2+1)}} = \frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{145}},$$

$$\alpha = \arctg 3\omega - \arctg 4\omega - \arctg 5\omega = \arctg \frac{3}{2} - \arctg 2 - \arctg \frac{5}{2}.$$

**C7.3.**  $X_2 = \frac{-2X_1+U}{2s+3}$ ,  $X_1 = \frac{U}{2(s+1)(2s+1)}$ ,  $Y = \frac{3U}{(s+1)(2s+1)}$ ,

$$G(s) = \frac{3}{(s+1)(2s+1)}, \quad M(\omega) = \frac{3}{\sqrt{(\omega^2+1)(4\omega^2+1)}},$$

$$\omega_b = \sqrt{\frac{\sqrt{41}-5}{8}} \text{ rad/sec}, \quad M(1) = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

\*\*\*\*\*

**C8.1.**  $k \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$  - intern instabil

$k \in \{0, 1\}$  - intern semistabil

$k \in (0, 1)$  - intern strict stabil

$k \in (-\infty, -3) \cup (-3, 0) \cup (1, \infty)$  - extern instabil

$k \in \{0, 1\}$  - exintern semistabil

$k \in (0, 1) \cup \{-3\}$  - extern strict stabil

**C8.2.**  $k < 0$  - intern instabil

$k \geq 0$  - intern strict stabil

$k \in (-\infty, -1) \cup (1, 0)$  - extern instabil

$k \in (0, \infty) \cup \{-1\}$  - extern strict stabil

**C8.3.** Sistemul este intern instabil pentru orice  $k$  real, deoarece polinomul caracteristic

$$\mathcal{P}(s) = \det(sI - A) = s^3 + 4s^2 + s - 6 = (s-1)(s+2)(s+3)$$

are rădăcina pozitivă  $s_1 = 1$ . Din

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{(k-1)s+1}{(s-1)(s+2)(s+3)},$$

rezultă că sistemul este extern strict stabil pentru  $k=0$  și extern instabil pentru  $k \neq 0$ .

**C8.4.** Sistemul este intern instabil pentru orice  $k$  real, deoarece polinomul caracteristic

$$\mathcal{P}(s) = \det(sI - A) = s^3 - s^2 - (2k+4)s + 2k+4 = (s-1)(s^2 - 2k - 4)$$

are rădăcina pozitivă  $s_1 = 1$ .

**C8.5.** Sistemul are polinomul caracteristic

$$\mathcal{P}(s) = \det(sI - A) = s^3 + (5-k)s^2 + (1-5k)s - k = (s-k)(s^2 + 5s + 1),$$

deci este intern strict stabil pentru  $k < 0$ , intern semistabil pentru  $k=0$  și intern instabil pentru  $k > 0$ . Din

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{3s^2 + (9-2k)s - 3 - 2k}{(s-k)(s^2 + 5s + 1)},$$

rezultă că sistemul este extern strict stabil pentru  $k < 0$  și  $k = \frac{\sqrt{61}-7}{2}$ , extern semistabil pentru  $k = 0$  și extern instabil pentru  $k > 0$ ,  $k \neq \frac{\sqrt{61}-7}{2}$ .

**C8.6.** Sistemul are polinomul caracteristic

$$\mathcal{P}(s) = \det(sI - A) = s^3 + 2s^2 + 2s + k,$$

deci este intern strict stabil pentru  $k \in (0, 4)$ , intern semistabil pentru  $k = 0$  și  $k = 4$ , intern instabil pentru  $k \in (-\infty, 0) \cup (4, \infty)$ . Din

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{s-1}{s^3 + 2s^2 + 2s + k},$$

rezultă că sistemul este extern strict stabil pentru  $k \in (0, 4)$  și  $k = -5$ , extern semistabil pentru  $k = 0$  și  $k = 4$ , extern instabil pentru  $k \in (-\infty, -5) \cup (-5, 0) \cup (4, \infty)$ .

**C8.7.** Sistemul are polinomul polilor

$$P(s) = 30s^3 + 31s^2 + (2k + 10)s + 4k + 1.$$

Sistemul este strict stabil pentru  $-\frac{1}{4} < k < \frac{140}{29}$ , semistabil pentru  $k = -\frac{1}{4}$  și  $k = \frac{140}{29}$ , instabil pentru  $k < -\frac{1}{4}$  și  $k > \frac{140}{29}$ .

**C8.8.** Sistemul are polinomul polilor

$$P(s) = 8s^3 + 8s^2 + 2s + k.$$

Sistemul este strict stabil pentru  $0 < k < 2$ , semistabil pentru  $k = 2$  și instabil pentru  $k > 2$ .

**C8.9.** Sistemul are polinomul polilor

$$P(s) = 16s^3 + 10s^2 + 2s + \frac{1}{T_i}.$$

Sistemul este strict stabil pentru  $T_i > \frac{4}{5}$ , semistabil pentru  $T_i = \frac{4}{5}$  și instabil pentru  $0 < T_i < \frac{4}{5}$ .

**C8.10.** Sistemul are polinomul polilor  $P(s) = 8s^2 + 6s + 1 + \frac{k}{4}$ . Polinomul

$$P\left(s - \frac{1}{3}\right) = 8s^2 + \frac{2}{3}s + \frac{k}{4} - \frac{1}{9}$$

este hurwitzian pentru  $k > \frac{4}{9}$ .

**C8.11.** Sistemul are polinomul caracteristic

$$\mathcal{P}(z) = 10z^3 + 17z^2 + 8z + k.$$

Rădăcinile polinomului caracteristic au modulul subunitar atunci când ecuația

$$\mathcal{P}\left(\frac{s+1}{s-1}\right) = 0,$$

echivalentă cu

$$(k+35)s^3 + 3(13-k)s^2 + (5+3k)s + 1 - k = 0,$$

are rădăcinile cu partea reală negativă. Aplicând criteriul Hurwitz, rezultă

$$\frac{17-3\sqrt{41}}{2} < k < 1.$$

**C8.12.** Sistemul are polinomul caracteristic

$$\mathcal{P}(z) = \det(zI - A) = z^2 - 1 - k.$$

Rădăcinile polinomului caracteristic au modulul subunitar atunci când ecuația

$$\mathcal{P}\left(\frac{s+1}{s-1}\right) = 0,$$

echivalentă cu

$$ks^2 - 2(k+2)s + k = 0,$$

are rădăcinile cu partea reală negativă, adică are toți coeficienții de același semn. Rezultă  $-2 < k < 0$ .

**C8.13.** Sistemul de reglare este strict stabil pentru  $0 < k < \frac{63}{5}$ .

**C8.14.** Sistemul de reglare este strict stabil pentru  $0 < k < \frac{6}{5}$ .

**C8.15.** Avem

$$\begin{aligned} P(z) &= 1 + G_R(z) \cdot (G_T G_P G_E)^o = 1 + k \cdot \left[ \frac{1}{s(4s+1)} \right]^o \\ &= 1 + k \left( \frac{1}{s} - \frac{4}{4s+1} \right)^o = 1 + k \left[ \frac{Tz^{-1}}{1-z^{-1}} - \frac{4(1-p)z^{-1}}{1-pz^{-1}} \right], \end{aligned}$$

cu  $p = e^{-T/4} \approx 0,5$ . Ecuațiile  $P(z) = 0$  și  $P\left(\frac{s+1}{s-1}\right) = 0$  sunt echivalente cu

$$2 + (1,54k - 3)z^{-1} + (1,23k + 1)z^{-2} = 0,$$

$$2,77ks^2 + 2(1 - 1,23k)s + 6 - 0,31k = 0.$$

Sistemul este extern strict stabil atunci când  $0 < k < 0,813$ .

\*\*\*\*\*

**C9.1**  $\varepsilon_{st} = G_{EV}(0) = \frac{1}{1+2K}$ . Rezultatul este valabil numai dacă sistemul este strict stabil, adică pentru  $0 < K < \frac{21}{5}$ . Prin urmare, eroarea staționară este întotdeauna mai mare decât  $\frac{5}{47}$ .

**C9.2**  $\varepsilon_{st} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} G_{ER}(s) = \frac{T_i}{2}$ . Rezultatul este valabil numai dacă sistemul este strict stabil, adică pentru  $T_i > \frac{12}{11}$ .

**C9.3** Sistemul are polinomul polilor

$$P(s) = 4s(2s+1)(8s+1) + K.$$

Polinomul

$$P(s) = \frac{1}{20} (16000s^3 + 7600s^2 + 120s + 250K - 27)$$

este hurwitzian pentru  $\frac{27}{250} < K < \frac{42}{125}$ .

**C9.4** Cu notația  $z(t) = y(t) - y_{st}$ , avem

$$Z(s) = \frac{G(s) - G(0)}{s} = \frac{-T_1 T_2 s + \tau - T_1 - T_2}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2)s + 1},$$

$$I_2 = \frac{(\tau - T_1 - T_2)^2 + T_1 T_2}{2(T_1 + T_2)}.$$

Indicele integral de calitate  $I_2$  este minim pentru  $\tau = T_1 + T_2$ .

**C9.5** Sistemul este strict stabil pentru  $0 < k < \frac{5}{12}$ .

a) Pentru  $r = 1(t)$  și  $0 < k < \frac{5}{12}$ , avem

$$\varepsilon_{st} = \lim_{s \rightarrow 0} G_{ER}(s) = 0.$$

Pentru  $v = t \cdot 1(t)$  și  $0 < k < \frac{5}{12}$ , avem

$$\varepsilon_{st} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} G_{EV}(s) = \frac{-1}{4k}.$$

b) Cu notația  $z(t) = \varepsilon(t)$ , avem

$$Z(s) = \frac{G_{ER}(s)}{s} = \frac{6s^2 + 5s + 1}{6s^3 + 5s^2 + s + 2k},$$

$$I_2 = \frac{38k + 5}{4k(5 - 12k)}.$$

Indicele integral de calitate  $I_2$  este minim pentru  $k \cong 0,137$ .

$$\text{C9.6. } Z(s) = \frac{G_{ER}(s)}{s} = \frac{s^2 + 1}{s^3 + 3s^2 + 2s + 1/T_i}, \quad I_2 = \frac{3T_i^2}{2(6T_i - 1)}, \quad (T_i)_{\text{opt}} = \frac{1}{3}.$$

**C9.7.** Avem

$$Z(s) = \frac{1}{s} [G(s) - G_r(s)] = \frac{T_1 s + T_1 - 3}{4T_1 s^2 + (T_1 + 4)s + 1}.$$

Ținând seama de relația (22), rezultă

$$I(T_1) = \frac{a_2 b_0^2 + a_0 b_1^2}{2a_0 a_1 a_2} = \frac{4T_1^2 - 23T_1 + 36}{8(T_1 + 4)}.$$

Din  $I'(T_1) = 0$  rezultă  $T_1^2 + 8T_1 - 32 = 0$ , deci

$$T_1 = 4(\sqrt{3} - 1) \approx 2,9282.$$

**C9.8.** Deoarece regulatorul este de tip integral, eroarea staționară este nulă, iar semnalul de comandă al regulatorului trebuie să aibă forma  $c(t) = \frac{1}{K_F} \cdot 1(t)$ , deci

$$G_{CR}(s) = \frac{1}{K_F},$$

$$\frac{G_R(s)}{1 + G_R(s)G_F(s)} = \frac{1}{K_F},$$

$$G_R(s) = \frac{1}{K_F - G_F(s)} = \frac{(3s + 1)(4s + 1)}{2s(12s + 7)}.$$

$$\text{C9.9. a) } G_R(s) = \frac{1}{G_F(s)[P_3(s) - 1]} = \frac{(s + 1)(10s + 1)}{3s(4s + 3)}, \quad M = \frac{G_F(0)}{\lim_{s \rightarrow \infty} G_F(s)P_3(s)} = \frac{5}{6};$$

$$\text{b) } G_R(s) = \frac{1}{G_F(s)[P_3(s) - 1]} = \frac{(s + 1)(4s + 3)(10s + 1)}{3s(4s^2 + 8s + 5)}, \quad M = \frac{G_F(0)}{\lim_{s \rightarrow \infty} G_F(s)P_3(s)} = \frac{10}{3}.$$

$$\text{C9.10. a) } G_R(s) = \frac{1}{G_F(s)[P_2(s) - 1]} = \frac{2(4s + 1)(10s + 1)}{9s(5s + 1)}, \quad M = \frac{G_F(0)}{\lim_{s \rightarrow \infty} G_F(s)P_2(s)} = \frac{16}{9};$$

$$\text{b) } G_R(s) = \frac{1}{G_F(s)[P_2(s)-1]} = \frac{(4s+1)(10s+1)}{4s(5s+1)}, \quad M = \frac{G_F(0)}{\lim_{s \rightarrow \infty} G_F(s)P_2(s)} = 2.$$

$$\text{c) } G_R(s) = \frac{1}{G_F(s)[P_2(s)-1]} = \frac{(s+1)(4s+1)(10s+1)}{s(5s+1)(2s+3)}, \quad M = \frac{G_F(0)}{\lim_{s \rightarrow \infty} G_F(s)P_2(s)} = 4.$$

$$\text{C9.11. a) } G_R(s) = \frac{1}{G_F(s)[P_2(s)-1]} = \frac{3(10s+1)}{4(3s+1)},$$

$$\text{b) } G_R(s) = \frac{1}{G_F(s)[P_2(s)-1]} = \frac{3(s+1)(10s+1)}{(3s+1)(2s+3)}$$

**C9.12.** Avem

$$T_1 = \frac{4}{\sqrt{M}}$$

$$\text{a) } T_1 = 4; \quad R_1(s) = \frac{1}{G(s)P_{n-k}(s)} = \frac{(s+1)(8s+1)}{(2s+1)(4s+1)}, \quad R_2(s) = G_0(s) = \frac{e^{-5s}}{(4s+1)^2};$$

$$\text{b) } T_1 = 1; \quad R_1(s) = \frac{1}{G(s)P_{n-k}(s)} = \frac{(4s+1)(8s+1)}{(2s+1)(s+1)}, \quad R_2(s) = G_0(s) = \frac{e^{-5s}}{(s+1)^2}.$$

$$\text{C9.13. } R_1(s) = \frac{1}{G(s)P_{n-k}(s)} = \frac{10s(8s+1)}{(2s+1)^2},$$

$$R_2(s) = G_0(s) = \frac{e^{-6s}}{(2s+1)^3}.$$

\*\*\*\*\*

**C10.1.** Avem

$$\mathbf{I} + \mathbf{GR} = \begin{bmatrix} \frac{s+5}{s+1} & \frac{-k}{2s+1} \\ \frac{2}{2s+1} & \frac{s+2k+1}{s+1} \end{bmatrix},$$

iar ecuația  $\det(\mathbf{I} + \mathbf{GR}) = 0$  este echivalentă cu

$$4s^4 + (8k+28)s^3 + (50k+45)s^2 + (46k+26)s + 12k + 5 = 0.$$

Matricea Hurwitz atașată acestei ecuații are minorii principali

$$\Delta_2 = 4(100k^2 + 394k + 289), \quad \Delta_3 = 2204k^3 + 9650k^2 + 10313k + 3267.$$

Coefficienții ecuației și minorul  $\Delta_3$  sunt pozitivi pentru  $k > \frac{-5}{12}$ .



**C10.2.** a) Avem

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{G}(0) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$d_{12} = \frac{-K_{12}}{K_{11}} = \frac{-1}{3}, \quad d_{21} = \frac{-K_{21}}{K_{22}} = \frac{-1}{2},$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & d_{12} \\ d_{21} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/3 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Avem:

$$D_{11}(s) = D_{22}(s) = 1,$$

$$D_{12}(s) = \frac{-G_{12}(s)}{G_{11}(s)} = \frac{-(2s+1)}{3(4s+1)}, \quad D_{21}(s) = \frac{-G_{21}(s)}{G_{22}(s)} = \frac{-(s+1)}{2(4s+1)},$$

$$\mathbf{D}(s) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-(2s+1)}{3(4s+1)} \\ \frac{-(s+1)}{2(4s+1)} & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{11}(s) & 0 \\ 0 & M_{22}(s) \end{bmatrix},$$

$$M_{11} = G_{11} - \frac{G_{12}G_{21}}{G_{22}} = \frac{94s^2 + 45s + 5}{2(2s+1)^2(4s+1)^2},$$

$$M_{22} = G_{22} - \frac{G_{12}G_{21}}{G_{11}} = \frac{94s^2 + 45s + 5}{3(s+1)^2(4s+1)^2}.$$

c) Avem:

$$\Delta_1 = G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21} = \frac{94s^2 + 45s + 5}{(s+1)^2(2s+1)^2(4s+1)^2},$$

$$\mathbf{D}(s) = \frac{1}{\Delta_1} \begin{bmatrix} G_{22}M_{11} & -G_{12}M_{22} \\ -G_{21}M_{11} & G_{11}M_{22} \end{bmatrix} = \frac{(s+1)(2s+1)(4s+1)}{94s^2 + 45s + 5} \begin{bmatrix} \frac{2(4s+1)}{s+1} & -1 \\ -1 & \frac{3(4s+1)}{2s+1} \end{bmatrix}.$$

Deoarece decuplorul este impropriu, alegem decuplorul simplu propriu cu matricea de transfer

$$\bar{\mathbf{D}}(s) = \frac{1}{s+1} \mathbf{D}(s) = \frac{(2s+1)(4s+1)}{94s^2 + 45s + 5} \begin{bmatrix} \frac{2(4s+1)}{s+1} & -1 \\ -1 & \frac{3(4s+1)}{2s+1} \end{bmatrix}.$$

Procesul decuplat are matricea de transfer

$$\bar{\mathbf{M}} = \frac{1}{s+1} \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(2s+1)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s+1)^2} \end{bmatrix}$$

**C10.3.** a) Avem

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{G}(0) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$d_{12} = \frac{-K_{12}}{K_{11}} = 1/2, \quad d_{21} = \frac{-K_{21}}{K_{22}} = -1/2,$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & d_{12} \\ d_{21} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) In conformitate cu (31) și (32), avem

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} G_{11} & 0 \\ 0 & G_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{(2s+1)(3s+1)} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3s+1} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \frac{1}{1 - \frac{G_{12}G_{21}}{G_{11}G_{22}}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\frac{G_{12}}{G_{11}} \\ -\frac{G_{21}}{G_{22}} & 1 \end{bmatrix} = \frac{4}{3s+5} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{2s+1}{2} \\ \frac{-(3s+1)}{2(2s+1)} & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{4}{3s+5} & \frac{2(2s+1)}{3s+5} \\ \frac{-2(3s+1)}{(2s+1)(3s+5)} & \frac{4}{3s+5} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

c) Avem:

$$D_{12}(s) = \frac{-G_{12}(s)}{G_{11}(s)} = \frac{2s+1}{2}, \quad D_{21}(s) = \frac{-G_{21}(s)}{G_{22}(s)} = \frac{-(3s+1)}{2(2s+1)},$$

deci

$$\mathbf{D}(s) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2s+1}{2} \\ \frac{-(3s+1)}{2(2s+1)} & 1 \end{bmatrix},$$

Deoarece decuplorul este impropriu, alegem decuplorul simplu propriu cu matricea de transfer

$$\bar{\mathbf{D}}(s) = \frac{1}{2s+1} \mathbf{D}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2s+1} & \frac{1}{2} \\ \frac{-(3s+1)}{2(2s+1)^2} & \frac{1}{2s+1} \end{bmatrix},$$

sau decuplorul simplu propriu aproximativ

$$\tilde{\mathbf{D}}(s) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2s+1}{2(0,1s+1)} \\ \frac{-(3s+1)}{2(2s+1)} & 1 \end{bmatrix}.$$

**C10.4.** a) Avem

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{G}(0) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$d_{12} = \frac{-K_{12}}{K_{11}} = -1/2, \quad d_{21} = \frac{-K_{21}}{K_{22}} = 1/2,$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & d_{12} \\ d_{21} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Avem:

$$D_{11}(s) = D_{22}(s) = 1,$$

$$D_{12}(s) = \frac{-G_{12}(s)}{G_{11}(s)} = \frac{-e^{-2s}}{2(3s+1)}, \quad D_{21}(s) = \frac{-G_{21}(s)}{G_{22}(s)} = \frac{-e^{-3s}}{2(3s+1)},$$

$$\mathbf{D}(s) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-e^{-2s}}{2(3s+1)} \\ \frac{-e^{-3s}}{2(3s+1)} & 1 \end{bmatrix}.$$

c) In conformitate cu (25) și (26), avem

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} G_{22} & -G_{12} \\ -G_{21} & G_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2e^{-s}}{2s+1} & \frac{-e^{-4s}}{(6s+1)(3s+1)} \\ \frac{e^{-4s}}{(2s+1)(3s+1)} & \frac{2e^{-2s}}{6s+1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M} = (G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{e^{-3s}}{(6s+1)(3s+1)} \left[ 4 + \frac{e^{-5s}}{(3s+1)(2s+1)} \right] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Deoarece decuplorul și procesul decuplat sunt strict proprii, putem utiliza decuplorul simplu propriu

$$\bar{\mathbf{D}} = (3s+1)\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{2(3s+1)e^{-s}}{2s+1} & \frac{-e^{-4s}}{6s+1} \\ \frac{e^{-4s}}{2s+1} & \frac{2(3s+1)e^{-2s}}{6s+1} \end{bmatrix},$$

pentru a obține procesul decuplat

$$\bar{\mathbf{M}} = (3s+1)\mathbf{M} = \frac{e^{-3s}}{6s+1} \left[ 4 + \frac{e^{-5s}}{(3s+1)(2s+1)} \right] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**C10.5.** a) Avem

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{G}(0) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$d_{12} = \frac{-K_{12}}{K_{11}} = 1/3, \quad d_{21} = \frac{-K_{21}}{K_{22}} = 1,$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & d_{12} \\ d_{21} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Avem:

$$D_{11}(s) = D_{22}(s) = 1,$$

$$D_{12}(s) = \frac{-G_{12}(s)}{G_{11}(s)} = \frac{e^s}{3(3s+1)}, \quad D_{21}(s) = \frac{-G_{21}(s)}{G_{22}(s)} = (4s+1)e^{-2s},$$

$$\mathbf{D}(s) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3(3s+1)} \\ (4s+1)e^{-2s} & 1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3(3s+1)} \\ \frac{(4s+1)e^{-2s}}{0,5s+1} & 1 \end{bmatrix}.$$

c) In conformitate cu (25) și (26), avem

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} G_{22} & -G_{12} \\ -G_{21} & G_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e^{-s}}{(4s+1)(2s+1)} & \frac{e^{-2s}}{(6s+1)(3s+1)} \\ \frac{e^{-3s}}{2s+1} & \frac{3e^{-3s}}{6s+1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M} = (G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{e^{-4s}}{(6s+1)(2s+1)} \left[ \frac{3}{4s+1} - \frac{e^{-s}}{3s+1} \right] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Deoarece decuplorul și procesul decuplat sunt strict proprii, putem utiliza decuplorul simplu propriu

$$\bar{\mathbf{D}} = (2s+1)\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{e^{-s}}{4s+1} & \frac{(2s+1)e^{-2s}}{(6s+1)(3s+1)} \\ e^{-3s} & \frac{3(2s+1)e^{-3s}}{6s+1} \end{bmatrix},$$

pentru a obține procesul decuplat

$$\bar{\mathbf{M}} = (2s+1)\mathbf{M} = \frac{e^{-4s}}{6s+1} \left[ \frac{3}{4s+1} - \frac{e^{-s}}{3s+1} \right] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

\*\*\*\*\*

**C11.1.** a) Compensatorul static are ecuația

$$c = \frac{1}{6}(3r + v_1).$$

b) Compensatorul dinamic dedicat are funcțiile de transfer

$$G_0(s) = \frac{(s+1)(5s+1)(6s+1)}{2(2s+1)^3}, \quad G_1(s) = \frac{(s+1)(5s+1)}{6(2s+1)(5s+1)}.$$

c) Compensatorul dinamic dedicat are funcțiile de transfer

$$G_0(s) = \frac{(s+1)(5s+1)(6s+1)}{2(T_{f0}s+1)^4}.$$

**C11.2.** a) Compensatorul static are ecuația

$$c = \frac{1}{2}(r + v_1).$$

b) Compensatorul dinamic dedicat are funcțiile de transfer

$$G_0(s) = \frac{8s+1}{2(2s+1)}.$$

**C11.3.** a) Compensatorul static are ecuația

$$c = r - \frac{1}{4}v_1.$$

b) Compensatorul dinamic dedicat are funcțiile de transfer

$$G_0(s) = \frac{(2s+1)(5s+1)(6s+1)}{(2s+1)^3}, \quad G_1(s) = \frac{-(6s+1)}{4(s+1)}.$$

**C11.4.** a) Compensatorul static are ecuația

$$c = \frac{1}{6}(3r - v_1).$$

b) Compensatorul dinamic dedicat are funcțiile de transfer

$$G_0(s) = \frac{(5s+1)(6s+1)}{2(\sqrt{3}s+1)^2}, \quad G_1(s) = \frac{-(6s+1)e^{-3s}}{6(4s+1)(10s+1)}.$$

**C11.5.** a) Avem

$$K_{P_0} = \frac{(\Delta y_0)_{total}}{\Delta c} = \frac{2}{1} = 2, \quad K_{P_1} = \frac{(\Delta y_1)_{total}}{\Delta v_1} = \frac{1}{1} = 1.$$

$$K_0 = 1/K_{P_0} = 1/2, \quad K_1 = -K_{P_1}/K_{P_0} = -1/2.$$

Compensatorul staționar are ecuația

$$c = K_0 r + K_1 v_1 = \frac{1}{2}(r - v_1),$$

b) Avem

$$\tau_0 = 0, \quad \tau_1 = 5, \quad \tau = \tau_1 - \tau_0 = 5;$$

$$(T_{tr95})_0 = (T_{s95})_0 - \tau_0 \approx 25 - 0 = 25,$$

$$T_0 \approx \frac{(T_{tr95})_0}{3} \approx 8,3;$$

$$(T_{tr95})_1 = (T_{s95})_1 - \tau_1 \approx 24 - 5 = 19,$$

$$T_1 \approx \frac{(T_{tr95})_1}{3} \approx 6,3.$$

Prin urmare,

$$G_0(s) = \frac{K_0(T_0s+1)}{T_{f0}s+1} = \frac{8,3s+1}{2(T_{f0}s+1)}, \quad T_{f0} = T_0/M_0 = 4,15,$$

$$G_1(s) = \frac{K_1(T_0s+1)e^{-\tau s}}{T_1s+1} = \frac{-(8,3s+1)e^{-5s}}{2(6,3s+1)}.$$

\*\*\*\*\*

**C12.1.** Se aplică comenzile

$$p\_imc\_1a(2, 2.7, 1.2, 45, 6, 0, 0);$$

$$p\_imc\_1a(2, 1.8, 1.2, 45, 6, 0, 0.2);$$

$$p\_imc\_1a(2, 1.23, 1.2, 45, 6, 0, 1);$$

Valorile parametrilor modelului procesului ( $K_M=1.2$ ,  $T_s=45$ ,  $\tau_M=6$ ) se obțin din graficul răspunsului indicial al procesului  $y_1(t)$  - fig. 1. Răspunsurile  $y(t)$  au un suprareglaj în gama 1...3% respectiv pentru  $K=2.7$ ,  $K=1.8$  și  $K=1.23$ .

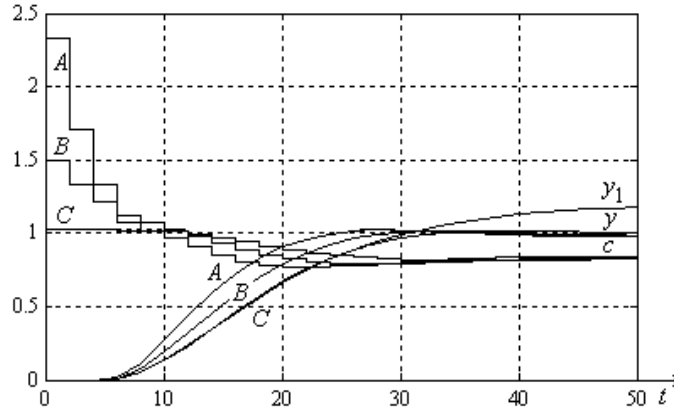


Fig. 1. Răspunsul indicial  $y_1$  al procesului și

răspunsurile  $c$  și  $y$  ale sistemului de reglare la referință treaptă unitară:

$A$  - pentru  $a=0$  și  $K=2.7$ ;  $B$  - pentru  $a=0.2$  și  $K=1.8$ ;  $C$  - pentru  $a=1$  și  $K=1.23$ .

**C12.2.** Se aplică comenzile

$p\_imc\_4a(2, 2.8, 0.95, 60, 7, 1.1, 0)$ ;

$p\_imc\_4a(2, 1.7, 0.95, 60, 7, 1.1, 0.2)$

$p\_imc\_4a(2, 1.2, 0.95, 60, 7, 1.1, 1)$ ;

Procesul compensat are  $K_r=1.1$ . Valorile parametrilor modelului procesului compensat ( $K_M=0.95$ ,  $T_s=60$ ,  $\tau_M=7$ ) se obțin din graficul răspunsului indicial al procesului  $y_1(t)$  - fig. 2.

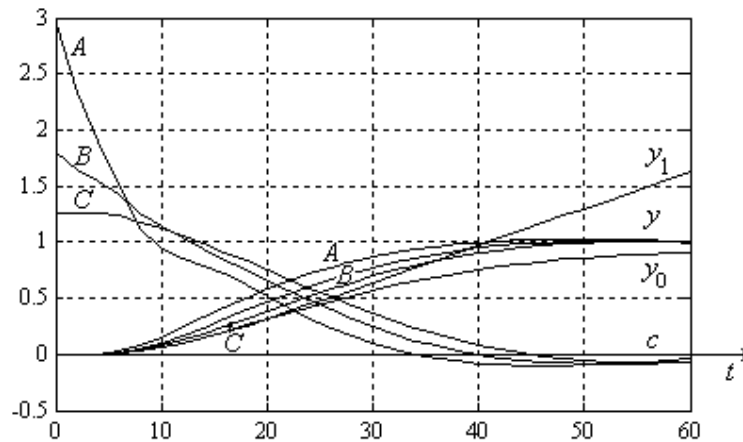


Fig. 2. Răspunsurile indiciale ale procesului de tip integral ( $y_1$ ), procesului compensat ( $y_0$ ) și sistemului de reglare ( $c, y$ ):

$A$  - pentru  $a=0$  și  $K=2.8$ ;  $B$  - pentru  $a=0.2$  și  $K=1.7$ ;  $C$  - pentru  $a=1$  și  $K=1.2$ .

\*\*\*\*\*

$$\mathbf{C13.1.} \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & m \end{bmatrix}.$$

*Cazul*  $m \neq 0$ . Sistemul este controlabil și stabilizabil.

*Cazul*  $m = 0$ . Sistemul nu este controlabil. Stările situate pe dreapta  $x_2 = 0$  (subspațiul controlabil) sunt controlabile. Celelalte stări nu sunt controlabile. Subspațiul necontrolabil e format din dreapta perpendiculară  $x_1 = 0$ . Spectrul controlabil este  $\sigma_c = \{2\}$ , iar spectrul necontrolabil este  $\sigma_{nc} = \{-1\}$ . Deoarece  $\sigma_{nc} \subset \mathbf{C}^-$ , sistemul este stabilizabil.

$$\mathbf{C13.2.} \quad C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1-m \\ 0 & m & m \end{bmatrix},$$

*Cazul*  $m \neq 0$ . Sistemul este controlabil și stabilizabil.

*Cazul*  $m = 0$ . Sistemul nu este controlabil. Subspațiul controlabil are dimensiunea 1. Spectrul controlabil este  $\sigma_c = \{1\}$ , iar spectrul necontrolabil este  $\sigma_{nc} = \{-1, 0\}$ . Deoarece  $\sigma_{nc} \subset \mathbf{C}^-$ , sistemul este stabilizabil.

$$\mathbf{C13.3.} \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1+m & 3 \\ 0 & 1 & m & 2 & -3m & -m-4 \end{bmatrix}.$$

Sistemul este controlabil și stabilizabil pentru orice  $m$  real.

**C13.4.** Sistemul este controlabil deoarece matricea de controlabilitate

$$C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

are rangul 3.

Forma canonică controlabilă de tipul 1:

$$S_{c1} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = S_{c1}^{-1} A S_{c1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = S_{c1}^{-1} B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{C} = C S_{c1} = [3 \ 3 \ 3], \quad \bar{D} = D = 0.$$

Forma canonică controlabilă de tipul 2:



$$S_{c2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = S_{c2}^{-1} A S_{c2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = S_{c2}^{-1} B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{C} = C S_{c2} = [3 \ 3 \ 3], \quad \bar{D} = D = 0.$$

**C13.5.**  $Q_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ . Sistemul este observabil.

**C13.6.** Sistemul este observabil deoarece matricea de observabilitate

$$Q_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

are rangul 3.

Forma canonică observabilă de tipul 1:

$$S_{o1} = Q_3^{-1}, \quad \bar{A} = S_{o1}^{-1} A S_{o1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = S_{o1}^{-1} B = \begin{bmatrix} -1 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix},$$

$$\bar{C} = C S_{o1} = [1 \ 0 \ 0], \quad \bar{D} = D = 0.$$

Forma canonică observabilă de tipul 2:

$$S_{o2}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = S_{o2}^{-1} A S_{o2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = S_{o2}^{-1} B = \begin{bmatrix} -4 \\ 9 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{C} = C S_{o2} = [0 \ 0 \ 1], \quad \bar{D} = D = 0.$$

\*\*\*\*\*

**C14.1.**  $C_3 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix}$ ,  $h^T = \frac{1}{9}[-1 \ 2 \ 1]$ ,  $F = h^T (A+I)^3 = \frac{1}{9}[22 \ 70 \ 17]$ .

**C14.2.**  $C_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & -5 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $h^T = \frac{1}{25}[11 \ -2 \ 4]$ ,  $F = h^T (A+I)^3 = \frac{1}{25}[8 \ 19 \ 12]$ ,

$$L = F^T = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 8 \\ 19 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

**C14.3.**  $L = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 8 \\ 19 \\ 12 \end{bmatrix}$  (conform aplicației precedente C14.2),

$$C_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad h^T = [-2 \ 1 \ -1], \quad F = h^T (A+I)^3 = [-1 \ 1 \ 1],$$

$$P = -[C(A-BF)^{-1}B]^{-1} = \frac{-1}{2},$$

$$A_F = A - BF = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_L = A - LC = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 0 & -16 & -9 \\ 25 & -39 & -69 \\ 0 & 1 & -37 \end{bmatrix},$$

$$J = A_F - LC = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 0 & -16 & -33 \\ 50 & -63 & -94 \\ 25 & -24 & -62 \end{bmatrix}$$

Ecuțiile (14.14) ale compensatorului:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 0 & -16 & -33 \\ 50 & -63 & -94 \\ 25 & -24 & -62 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} r + \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 8 \\ 19 \\ 12 \end{bmatrix} y$$

$$u = -[-1 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} r.$$

Ecuțiile (14.16) ale sistemului de reglare  $\Sigma_0(A_0, B_0, C_0, D_0)$ :

$$A_0 = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -25 & 0 & 0 & 0 \\ 25 & 0 & -50 & 25 & -25 & -25 \\ 0 & 25 & -25 & 25 & -25 & -25 \\ 0 & 16 & 8 & 0 & -16 & -33 \\ 0 & 38 & 19 & 50 & -63 & -94 \\ 0 & 24 & 12 & 25 & -24 & -62 \end{bmatrix}, \quad B_0 = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C_0 = [0 \ 2 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0], \quad D_0 = 0.$$

Ecuțiile (14.17) ale sistemului de reglare  $\Sigma'_0(A'_0, B'_0, C'_0, D'_0)$ :

$$A'_0 = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -25 & 0 & 0 & 0 \\ 50 & -25 & -75 & 25 & -25 & -25 \\ 25 & 0 & -50 & 25 & -25 & -25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -16 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 25 & -39 & -69 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -37 \end{bmatrix}, \quad B'_0 = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C'_0 = [0 \ 2 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0], \quad D'_0 = 0.$$

## BIBLIOGRAFIE

1. Autsaklis P.J., Michel A.N., *Linear Systems*, Mc. Graw Hill, Inc., 1997.
2. Băieșu A., *Tehnica reglării automate*, Editura MatrixRom. București, 2012.
3. Belea C., *Automatică neliniară*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1985.
4. Bequette B.W., *Process Control-Modelling, Design, and Simulation*, Prentice Hall Int., 2002.
5. Borne P., Richard J.P., *Analyse et régulation des processus industriels*, Editions Technip, Paris, 1993.
6. Boucher P., Dumur D., *La commande prédictive*, Editions Technip, Paris, 1996.
7. Brogan W.L., *Modern Control Theory*, Prentice Hall International, 1991.
8. Brosilow C., Joseph B., *Techniques of Model-Based Control*, Prentice Hall-PTR, International Series, 2002.
9. Cîrtoaje V., *Linear Continuous Systems of Monotonic Type*, Control Engineering and Applied Informatics, Vol. 2, Number 1, December 2000.
10. Cîrtoaje V., Băieșu A., *A time domain method for computing the forced response of an I-O linear continuous system*, Buletinul UPG Ploiești, Vol. LX, Seria Tehnică, Number 3, 2009.
11. Cîrtoaje V., Băieșu A., Mihalache S., *Two Controller Design Procedure Using Closed-Loop Pole Placement Technique*, Control Engineering and Applied Informatics, Vol. 11, Number 1, March 2009.
12. Cîrtoaje V., Băieșu A., *Two Design Procedure for a Time Delay Control System*, Control Engineering and Applied Informatics, Vol. 12, No. 4, 2010.
13. Cîrtoaje V., *Sisteme automate*, Editura Universității Petrol-Gaze din Ploiești, 2012.
14. Cîrtoaje V., *Teoria sistemelor automate*, Editura Universității Petrol-Gaze din Ploiești, 2013.
15. Cîrtoaje V., *Teoria sistemelor – Analiza elementară în domeniul timpului*, Editura Universității Petrol-Gaze din Ploiești, 2015.
16. Cîrtoaje V., Băieșu A., *On a Model Based Practical Control Algorithm*, Studies in Informatics and Control, 27(1), 2018.
17. Cîrtoaje V., *A Practical Unified Algorithm of P-IMC Type*, Processes, 8, 165, 2020.
18. Cook P.A., *Nonlinear Dynamical Systems*, Prentice Hall International, 1992.
19. Coughanowr D., *Process Systems – Analysis and Control*, McGraw International Editions, 1991.
20. Cristea M., Agachi S., *Elemente de teoria sistemelor*, Ed. RosoPrint, Cluj-Napoca, 2002.

21. Di Stefano J.J., Stubberud A.R., *Feedback and Control Systems*, Mc. Graw Hill, Inc., 1990.
22. Dragomir O., Dragomir F., Mincă E., Dumitrache C., *Teoria sistemelor automate – Fundamente teoretice și aplicații MATLAB*, Ed. Matrix-Rom, București, 2010.
23. Ilaș C., *Teoria sistemelor de reglare automată*, Ed. Matrix-Rom, București, 2001.
24. Ilaș C., Priboianu M., *Teoria sistemelor de reglare automată - Indrumar de laborator*, Ed. Matrix-Rom, București, 2004.
25. Filipescu A., Stamatescu F., *Teoria sistemelor, Analiza și sinteza sistemelor liniare în abordare structurală*, Editura MatrixRom, Bucuresti, 2002.
26. Ionescu V., *Teoria sistemelor*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1985.
27. Ionescu V., Belea C., *Teoria sistemelor*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1985.
28. Ionescu V., Popeea C., *Conducerea structurală a sistemelor liniare*, Ed. Tehnică, București, 1986.
29. Jora B., Popeea C., Barbulea S., *Metode de calcul numeric în automatică*, Ed. Enciclopedia, București, 1996.
30. Lazăr C., *Conducerea predictivă a proceselor cu model cunoscut*, Editura MatrixRom, Bucuresti, 1999.
31. Mihalache S.F., *Elemente de ingineria reglării automate*, Editura MatrixRom, Bucuresti, 2008.
32. Pozna C., *Teoria sistemelor automate*, Ed. Matrix-Rom, București, 2004.
33. Soare C., Iliescu S., Tudor V., Făgărășan I., Dragomir O.F., *Proiectarea asistată de calculator în MATLAB și SIMULINK – Conducerea avansată a proceselor*, Ed. Agir, 2006.
34. Stefan D., *Teoria sistemelor, Analiza sistemelor*, Editura MatrixRom, Bucuresti, 2005.
35. Stratulat F., *Teoria sistemelor - Analiza asistată de calculator a sistemelor liniare*, Editura MatrixRom, Bucuresti, 2000.
36. Virk G.S., *Digital Computer Control Systems*, Mc Graw-Hill, Inc., New Zork, 1991.
37. Voicu M., Feraru L., Păstrăveanu O., Schonberger F., *Introducere în automatică - Culegere de probleme*, Editura MatrixRom, Bucuresti, 1999.
38. Voicu M., *Introducere în automatică*, Editura PoliRom, Iași, 2002.



